Buxoro davlat universiteti

O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

MATEMATIK FIZIKA VA ZAMONAVIY ANALIZNING TURDOSH MASALALARI

professor D.K. Durdiyev tavalludining 60 yilligiga bag'ishlangan xalqaro ilmiy anjumani

Buxoro shahri, 10-11-oktyabr, 2025 yil

MA'RUZALAR TEZISLARI

I TOM

======== ◇ ========

Bukhara State University

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan

MATHEMATICAL PHYSICS AND RELATED PROBLEMS OF MODERN ANALYSIS

International scientific conference
dedicated to the 60th anniversary of the birth of Professor D.K. Durdiev
Bukhara city, October 10-11, 2025

ABSTRACTS

PART I

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 +517.968 + 519.6.

«Математическая физика и смежные вопросы современного анализа»: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 60-летию со дня рождения профессора Д.К. Дурдиева (10–11 октября 2025 года, Бухара, Узбекистан).
– Бухара. Изд–во «Дурдона». 2025. 310 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции «Математическая физика и смежные вопросы современного анализа» по следующим направлениям: Актуальные проблемы современной алгебры и геометрии, Математический анализ и его приложения, Дифференциальные уравнения, обратные и некорректные задачи математической физики, Дробное исчисление и его приложения, Математическое моделирование и вычислительные методы, Теория вероятностей и математическая статистика, Современные проблемы механики, Перспективы развития математического образования.

За содержание и оригинальность тезисов, представленных в данном сборнике, ответственность несут авторы этих работ.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Самиев К.А. – председатель, проректор БухГУ.,

Жураев Х.О. – сопредседатель, декан БухГУ.

Члены организационного комитета

Рашидов У.У. – проректор БухГУ.,

Хаётов А.Р. – зав. отделом ИМ АН РУз.,

Расулов Т.Х. – профессор БухГУ.,

Тешаев М.Х. – профессор ИМ АН РУз.,

Нуриддинов Ж.З. – доцент БухГУ.,

Бозоров З.Р. – старший научный сотрудник ИМ АН РУз.,

Дилмурадов Э.Б. – зав. кафедры БухГУ.,

Дурдиев У.Д. – зав. кафедры БухГУ.,

Рахмонов А.А. – ведущий научный сотрудник ИМ АН РУз.,

Турдиев Х.Х. – докторант ИМ АН РУз.,

Жумаев Ж.Ж. – докторант ИМ АН РУз.,

Болтаев А.А. – доцент БухГУ.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:

Хамидов О.Х. – ректор БухГУ., (Бухара, Узбекистан).

Заместители председателя:

Розиков У.А. – сопредседатель, замдиректор ИМ АН РУз., (Ташкент, Узбекистан),

Дурдиев Д.К. – зав. отделом ИМ АН РУз., (Бухара, Узбекистан),

Самиев К.А. – проректор БухГУ., (Бухара, Узбекистан).

Члены программного комитета

Алимов Ш.А.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Романов В.Г.	– академик РАН (Россия),
Азамов А.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Беляев А.К.	– член. корр. РАН (Россия),
Лакаев С.Н.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Киране М.	– профессор (УАЭ),
Демиденко Г.В.	– профессор (Россия),
Розиков У.А.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Ашуров Р.Р.	– профессор (Узбекистан),
Икромов И.А.	– профессор (Узбекистан),
Мегралиев Я.Т.	– профессор (Азербайджан),
Кабанихин С.И.	– член-корреспондент РАН (Россия),
Ситник С.М.	– профессор (Россия),
Кожанов А.И.	– профессор (Россия),
Матвеева И.И.	– доцент (Россия),
Псху А.В.	– профессор (Россия),
Тотиева Ж.Д.	– профессор (Россия),
Ашыралыев А.	– профессор (Турция),
Каримов Э.Т.	– профессор (Узбекистан),
Шишикина Э.Л.	– профессор (Россия),
Азизбаёв Э.И.	– профессор (Азербайджан),
Сафаров Ж.Ш.	– профессор (Узбекистан),
Зуннунов Р.Т.	– доцент (Узбекистан).

Секретариат конференции

Худаяров С.С., Маматова Н.Х., Меражова Ш.Б., Холиков С.Х, Хасанов И.И., Суяров Т.Р., Элмурадова Х.Б., Субхонова З.А., Ахмедов О.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

SECTION 2. MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS

СЕКЦИЯ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
SECTION 3. DIFFERENTIAL EQUATIONS, INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

СЕКЦИЯ 4. ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

SECTION 4. FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ
Д.К. ДУРДИЕВУ – 60 ЛЕТ

10 октября 2025 года исполняется 60 лет известному математику, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему Бухарским отделением института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, профессору Бухарского государственного университета Дурдимуроду Каландаровичу Дурдиеву.

Его родители - Дурдиев Каландар и Дурдиева Пулатгул - были тружениками колхоза имени Навои Алатского района Бухарской области. Они воспитали своего сына трудолюбивым, целеустремлённым и исключительно порядочным человеком.

В 1972 году Дурдимурод Каландарович пошёл в первый класс средней школы №12 имени Фурката Алатского района. Учёба в 9-10 классах, по его признанию, стала поворотным моментом в его профессиональной жизни: именно тогда в его жизни открылся "мир увлечённости наукой". Учителя математики Ёшузак Тухтаев и физики Чори Очилов, а также их коллеги сыграли важную роль в формировании в школе атмосферы дружеской конкуренции. Благодаря этому у обычных, в целом, подростков успешно развивались интерес к науке, стремление к познанию нового и навыки самостоятельного, творческого мышления. Интерес к математике и физике, возникший ещё в школьные годы, впоследствии привёл его к научной деятельности в сфере высшей математики.

В 1982 году, окончив школу с золотой медалью, Д.К. Дурдиев поступил на отделение прикладной математики факультета прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета (ныне - Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека). "Учёба в университете стала для меня своего рода продолжением школы - только на новом, более высоком уровне, - вспоминал будущий учёный. - С одной стороны - высококлассные, требовательные преподаватели, с другой - целеустремлённые, ориентированные на учёбу студенты".

После службы в армии в 1983-1985 годах он продолжил учёбу в том же университете. В 1986 году Д.К. Дурдиев перевёлся на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета. С теплотой и благодарностью Дурдимурод Каландарович вспоминает, как в этом университете вели занятия выдающиеся математики и талантливые педагоги: М.М. Лаврентьев, С.К. Годунов, В.Г. Романов, Б.Н. Врагов, А.Б. Кажихов, Г.В. Демиденко, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин и другие. Особенно он отмечает великолепные спецкурсы, "в которых обучали самым современным методам теории некорректных и обратных задач для дифференциальных уравнений которые читали М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин.

Студенческая, как и школьная, жизнь проявила лучшие черты характера Д.К. Дурдиева - гармоничное сочетание отличной учёбы, помощи однокурсникам, активной исследовательской работы и яркой гражданской позиции. Особенно выделялись его организаторские способности: три года подряд - в 1987, 1988 и 1989 годах - он был командиром студенческого строительного отряда "Лучо" при Новосибирском государственном университете. Под его руководством отряд, сформированный из студентов университета, в летние каникулы участвовал в строительных работах в Якутии, на Дальнем Севере России. Д.К. Дурдиев окончил Новосибирский государственный университет в 1990 году. В том же году он успешно сдал вступительные экзамены и был принят в аспирантуру при этом университете. Свою научную деятельность будущий учёный начал ещё в студенческие годы, занимаясь исследованиями под руководством выдающегося математика, лауреата Государственных премий, члена-корреспондента РАН (впоследствии академика), профессора В.Г. Романова. Ранние научные работы Д.К. Дурдиева были посвящены обратным задачам для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа - одному из новых направлений в теории обратных задач для уравнений математической физики. В 1992 году, Д.К. Дурдиев успешно защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения - на тему "Обратные задачи для гиперболических уравнений с памятью" на специализированном совете Новосибирского государственного университета и досрочно окончил аспирантуру.

Он с 1993 года начал работать доцентом кафедры математического анализа Бухарского государственного университета, а затем занял должность заведующего кафедрой математики. Наряду с педагогической и административной деятельностью Д.К. Дурдиев продолжал активную научную работу в Бухарском государственном университете. Результаты своих исследований он обсуждал со своим наставником В.Г. Романовым из института Математики Сибирского отделения РАН, а также с учёными других авторитетных научных учреждений. Его научные изыскания в этот период, являвшиеся продолжением кандидатской диссертации, были посвящены исследованию процессов распространения волн в средах с последействием и изучению свойств этих сред. Если первые работы Д. К. Дурдиева были посвящены изучению задач определения одномерного ядра интегрального оператора, входящего в гиперболическое уравнение с интегральным членом, то впоследствии аналогичные исследования были выполнены для гораздо более сложного случая, когда ядро зависит не только от временной, но и от пространственной переменной. Исследованы задачи об определении нескольких коэффициентов, входящих в различные дифференциальные уравнения. Во всех изучаемых задачах установлены теоремы единственности и оценки устойчивости.

Полученные результаты легли в основу докторской диссертации, успешно защищённой в 2010 году на специализированном учёном совете НИИ Математики и Информационных технологий АН РУз под председательством академика Ш.А. Аюпова по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения. Тема диссертации - "Обратные задачи для сред с последействием". Результаты диссертационной работы были также опубликованы в одноимённой монографии Д.К. Дурдиева, изданной в 2014 издательством "Турон-Икбал" в Ташкенте.

С 2012 года он совместно со своей ученицей из России Ж.Д. Тотиевой начал проводить исследования в области прямых и обратных задач для системы уравнений вязкоупругости, основанных на модели Больцмана. Основной особенностью работ в этом направлении стало систематическое использование локализованных в точке или на границе источников, инициирующих процесс распространения волн. С одной стороны, это повышало прикладную значимость рассматриваемых задач, а с другой - позволило говорить о формировании нового научного направления в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Результаты этих исследований были представлены в международной монографии Д.К. Дурдиева и Ж.Д. Тотиевой *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations*, опубликованной издательством *Springer* в 2023 году. Кроме того, совместно со своим учеником Ж.Ш. Сафаровым он провёл исследования по обратным задачам определения сверточного ядра для более общих интегро-дифференциальных уравнений, важной особенностью которых является наличие в принципиальной части уравнения общего гиперболического оператора второго порядка. Рассматривались случаи, в которых прямая задача формулировалась как задача Коши, так и как начально-краевая задача.

Уравнения, изучаемые в данном направлении, тесно связаны с дробными диффузионно-волновыми уравнениями. Д.К. Дурдиев, опираясь на известную формулу Хилле-Тамаркина-Джрбашяна, доказал, что если ядро в интегралах интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности и волновых уравнений выбрать в специальной форме через функции Миттага-Леффлера, то такие уравнения оказываются эквивалентны дробным диффузионно-волновым уравнениям с производной Герасимова-Капуто по времени.

С 2021 года Д.К. Дурдиев совместно со своими учениками активно занимается обратными задачами для дифференциальных уравнений с дробными производными, преимущественно для дробных диффузионно-волновых уравнений. Им были адаптированы методы исследования обратных задач, применявшиеся ранее для классических уравнений диффузии и колебаний, к более сложному случаю - уравнениям с дробными производными различных типов. В результате были получены новые теоремы существования и единственности решений, а также оценки устойчивости. Результаты проведённого цикла исследований нашли отражение в монографии: *D.K. Durdiev, Inverse Problems for Fractional Diffusion Equations, Springer, Singapore, 2025.*

Д.К. Дурдиев исследовал ряд обратных задач, связанных с определением неизвестных коэффициентов при младшем члене в уравнениях смешанного параболо-гиперболического типа с характеристическими и нехарактеристическими линиями изменения типа. Им доказаны новые теоремы о корректности таких задач в смысле Адамара при различных условиях переопределения.

Он активно занимается научным руководством студентов, бакалавров, магистрантов, соискателей степени PhD, а также докторантов, тем самым сформировав крепкую научную школу. Под его руководством успешно защитили свои диссертации одиннадцать кандидатов (PhD) и три доктора наук. Многие из его учеников - докторанты, магистранты и специалисты - в настоящее время являются преподавателями различных вузов Узбекистана и России. Они в полной мере следуют основным принципам своего наставника: высокой требовательности к себе и своим ученикам, преданности делу, добросовестности, самоотдаче и высокому профессионализму.

Д.К. Дурдиев с 2020 года возглавляет Бухарское отделение Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан. За более чем 30 лет активной научной деятельности он опубликовал свыше 200 научных работ, большая часть которых вышла в высокорейтинговых международных журналах, таких как *Physica D, Fractional Calculus* *and Applied Analysis, Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Дифференциальные уравнения и др. Он входит в состав редакционных коллегий журналов *SOCAR Proceedings, Uzbek Mathematical Journal, Вестник Полоцкого государственного университета*, а также ряда научных изданий Бухарского государственного университета.

Педагогическая карьера Д.К. Дурдиева началась 5 января 1993 года, когда его пригласили преподавателем на кафедру "Математический анализ" Бухарского государственного университета. За 32 года работы он прошёл путь от ассистента до профессора, занимал должности заведующего кафедрой, декана физико-математического факультета и факультета экономики, а также проректора по учебной работе БухГУ. В 2019 году была издана книга Д.К. Дурдиева "Уравнения в частных производных рекомендованная Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов бакалавриата по направлениям "Математика" и "Прикладная математика и информатика" университетов. Кроме того, он является автором нескольких учебных и учебно-методических пособий по дифференциальным уравнениям, предназначенных для студентов бакалавриата и магистратуры. В настоящее время он продолжает педагогическую деятельность в Бухарском государственном университете, являясь профессором кафедры дифференциальных уравнений.

Всегда рядом с Дурдимуродом Каландаровичем находятся самые близкие ему люди, полностью разделяющие его научные интересы и гражданскую позицию (жена Маралджан Кадирова - доцент кафедры зелёной экономики Бухарского государственного университета; сын Умиджан Дурдиев - заведующий кафедрой дифференциальных уравнений того же университета; сын Дилшод Дурдиев - постдокторант-исследователь в Дармштадтском университете Германии; дочь Дилноза Дурдиева - магистрантка Узбекского государственного университета мировых языков; дочь Дурдона Дурдиева - ученица частной Кембриджской школы в Бухаре). Д.К. Дурдиев - известный учёный, талантливый педагог, требовательный руководитель и мудрый наставник. В беседе с ним всегда ощущается постоянный поток новых научных идей и свежих мыслей. В эти дни он отмечает свой 60-летний юбилей.

От всей души поздравляем Дурдимурода Каландаровича и желаем ему крепкого здоровья, радости в жизни, новых творческих успехов и благодарных учеников!

Сафаров Ж.Ш., Тотиева Ж.Д., Бозоров З.Р., Меражова Ш.Б., Алимов Х.Н., Нуриддинов Ж.З., Рахмонов А.А., Жумаев Ж.Ж., Турдиев Х.Х., *Дурдиев У.Д., Холиков С.Х., Болтаев А.А., Атоев Д.Д.!*

СЕКЦИЯ 1. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ
SECTION 1. ACTUAL PROBLEMS IN MODERN ALGEBRA AND GEOMETRY

On the solutions of one quadratic equation in prime numbers taken from an arithmetic progression

Allakov I.[1], **Imamov O.Sh.** [2]

Termez State University, Termez, Uzbekistan;
iallakov@mail.ru, oybekimamov000@gmail.com

Let us consider the following equation:

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3^2 = b \tag{1}$$

where a_1, a_2, a_3, b are integers, and p_1, p_2, p_3 are prime numbers. If in (1) we take $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, then we arrive at a classical problem posed in 1938 by Hua Loo-Keng [1]. I. Allakov and N. Muzropova [2] proved that equation (1) has solutions in prime numbers under certain conditions and obtained a lower bound for the number of such representations. In the work of M. C. Liu and Tao Zhan [3], in the corresponding linear case namely, in the ternary Goldbach-type theorem with primes in arithmetic progression it was proved that there exists a positive constant $\delta > 0$ such that for all positive integers and $\sum\limits_{i=1}^{3} l_i = b\,(\bmod D)$ sufficiently large odd b, the following Diophantine equation has a solution:

$$\begin{cases} b = p_1 + p_2 + p_3, \\ p_i \equiv l_i\,(\bmod D)\,, i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

where $(l_i, D) = 1$.

Furthermore, in the works of I. Allakov and O. Sh. Imamov [4–6], a lower bound was obtained for the number of representations of a natural number as the sum of the squares of five prime numbers taken from an arithmetic progression.In the author's paper [7], an improved estimate was given for a special set in the problem of representing a natural number as the sum of four squares of prime numbers. In [8], the problem of representing a natural number as the sum of the squares of four primes from an arithmetic progression was considered.

In this work, we examine the solvability conditions of equation (1) in prime numbers p_i from an arithmetic progression, $p_i \equiv l_i (\bmod D)$, $i = 1, 2, 3,$ $D \le N^{\delta}$.

We assume, in the general case, that $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ and

$$\gcd(a_1, a_2, a_3) = 1. \tag{2}$$

Furthermore, following the approach in Xua's work on the Tarry problem (see [9], p. 162), we consider the solvability condition of equation (1) in the sense of congruences. That is, we define the quantity $N(q)$ as follows:

$$N(q) := card\{\ (n_1, n_2, n_3)\,|\,1 \le n_j \le q,\ (n_j, q) = 1,$$
$$a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3^2 \equiv b\,(\bmod q)\}\,, \tag{3}$$

and require that the following condition holds: “for all $q \geq 1,\ N(q) \geq 1$“.

Let us assume that the integers a_1, a_2, a_3, b satisfy conditions (2) and (3), and define B as

$$B := \max\{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}. \tag{4}$$

In the present paper, by combining the methods of [2,3], the following result has been proved:

Theorem. *Suppose the integers a_1, a_2, a_3, b satisfy conditions (2)-(4). Then there exists an effective constant $A > 0$ such that the following assertions hold:*
(a) If all of a_1, a_2, a_3 are positive and $b \geq B^A$, then equation (1) has a solution in prime numbers p_1, p_2, p_3 taken from an arithmetic progression, $p_i \equiv l_i(\mathrm{mod} D)$, $D \leq N^\delta$.
(b) If all of a_1, a_2, a_3 are not of the same sign, then equation (1) has a solution in primes p_1, p_2, p_3 taken from an arithmetic progression $p_i \equiv l_i(\bmod D)$, $i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$, satisfying for p_1, p_2, p_3 which were not greater than $3|b| + B^A$.

This theorem can be regarded as a nonlinear generalization of the ternary Goldbach theorem.

Corollary. *If $N$is sufficiently large, then the number of solutions of equation (1) in prime numbers $NB^{-1} < p_1, p_2, p_3 \leq N$, $p_i \equiv l_i(\mathrm{mod} D)$, $i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$ is at least $c_1 N^{3/2}\left(BQ^{83/420}D\ln^3 N\right)^{-1}$, where c_1 is a positive constant and $Q = N^{21\delta}$.*

The result obtained is new and has important significance for the study of a number of problems in the additive direction of analytic number theory. In particular, this result can be effectively applied to the study of problems concerning the representation of a number as a sum of several prime numbers and squares of primes taken from an arithmetic progression,as well as in the analysis of complicated trigonometric sums.

LITERATURE

1. Xua Lo-Ken. Some results in the additive prime number theory, Quart. J. Math.Oxford.1938, pp. 68-80.
2. Аллаков И., Музропова, Н.С. О решении одного уравнения в простых числах, Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 5-26.
3. M. C. Liu and T. Zhan. The Goldbach problem with primes in arithmetic progressions, in: Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Math. Soc.
4. Аллаков И., Имамов О.Ш. О числах, представимых в виде суммы пяти квадратов простых чисел, из арифметической прогрессии., Научный вестник СамГУ, 2024. №3. с. 113-119.
5. Имамов О.Ш. О количестве представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов простых чисел из арифметической прогрессии, Научный вестник НамГУ, 2024. №4. с. 78-83.
6. Allakov I., Imamov O. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression, Bull. Inst. Math. 2024. V 7, №4, pp. 86-93.
7. Imamov O. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers, Samarkand University Scientific Bulletin., 2025, №1, pp.106-110.
8. Allakov I and Imamov O. The exceptional set for the sum of the squares of four prime numbers in an arithmetic progression, Bull. Inst. Math.,(in print)
9. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Труды Матем. инс. им. В.А.Стеклова.1947. с. 3-179 .

Some properties of the curvature of Riemannian manifolds with polynomial structure

Aslonov J.O.[1] **Ergashev M.A.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
jasurbek.aslonov@nuu.uz, muxammadali.ergashev@nuu.uz

In 2002, the Argentine mathematician Vera Martha Winitzky de Spinadel introduced the concept of metallic structures, providing a new perspective on differential geometry. Her primary works focused on geometric fractals, which are widely applied in design and architecture. Additionally, her research in the field of metallic averages, which develops the classical concept of the golden section, has gained recognition among mathematicians. Turkish mathematicians C.E. Hrecanu and M. Crasmareanu, continuing work in this area, introduced the same concept on Riemannian manifolds, leading to numerous new ideas for applications in various fields of science.

Riemannian geometry is a fundamental branch of differential geometry, named after the German mathematician Bernhard Riemann (1826-1866). In Riemannian geometry, smooth manifolds are studied together with a Riemannian metric. In this context, tangent vectors and the angles between them are commonly considered; therefore, vector fields play a crucial role. A Riemannian metric can be viewed as a tensor field that defines an inner product at each tangent space. This naturally requires the introduction of several fundamental concepts, including the lengths of vectors and curves. Consequently, the notions of connection, curvature operator, and curvature tensor are introduced.

Let J be a smooth $(1,1)$-tensor field on a smooth manifold M.

Definition [2]. If there exists a nontrivial tensor field J of type $(1,1)$ on a smooth manifold M such that $J^2 = pJ + qI$, where p and q are positive integers, then this polynomial is called a metallic structure. In this case, the pair (M, J) is said to be a metallic manifold.

Remark [1]. A polynomial structure J is compatible with a connection ∇ on the manifold M, if $\nabla J = 0$.

Assume that X, Y are smooth vector fields, and that the polynomial structure J is compatible.

Theorem. If the polynomial structure J is a golden structure on a Riemannian manifold, then the following relations hold:

1. $R(X,Y)JZ = J(R(X,Y)Z)$;
2. $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$;
3. $g(JX,Y) = g(X,JY)$.

LITERATURE

1. A. D. Nezhad, S. Beizavi. A new approach to the chromatic polynomial structure on Finsler manifolds, Mathematical Analysis and Convex Optimization, 2 (2021), no. 2, 1–16.
2. C.E. Hrecanu, M. Crasmareanu. Metallic structures on Riemannian manifolds, Revista de la Uniyn Matematica Argentina, 54 (2013), no. 2, 15–27.
3. J.M. Lee. Introduction to Riemannian Manifolds, Department of Mathematics, University of Washington, WA, USA, 2018.
4. M. Guk. A study of submanifolds of metallic Riemannian manifolds, Journal of Geometry, 112(3) (2021), no. 34, 1–27.
5. S.I. Goldberg, K. Yano. Polynomial structures on manifolds, Kodai Mathematical Journal, 22 (1970), no. 2, 199–218.

Restoration of closed surfaces with vertices

Artykbayev A., Tillayev D.
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
artykbayev@mail.ru

We define the class of closed convex surfaces with vertices and present some of their properties. Such surfaces are significant within the class of similar surfaces.

In A.D. Alexandrov [1], a closed convex surface is defined as the complete boundary of a bounded convex body. Points on a closed convex surface Φ, denoted as $X \in \Phi$, are classified based on the tangent cone at that point. The set of tangents to all curves emanating from a point Φ is called the *tangent cone*. The tangent cone at a point on the surface can be one of three types: a cone with its vertex at the point $X \in \Phi$, a dihedral angle, or a plane. Accordingly, points on the surface are classified as conical (vertex), edged, or regular points, depending on the type of tangent cone.

A closed surface with vertices is defined as a convex surface that has a finite number of conical points, with all other points being regular [2,3].

Consider a closed convex surface Φ with vertices and a unit sphere S^2, where $M \subset \Phi$. The unit outward normals of the support planes at each point of the set M are translated parallel to the center of the sphere S^2. The endpoints of these normals form a set $M^* \subset S^2$ on the sphere, referred to as the *spherical image* of the set M.

The *external curvature* of the set M on the surface is defined as the area of its spherical image: $\omega_\Phi(M) = S(M^*)$.

The properties of external curvature for general convex surfaces have been studied in [2]. Naturally, the external curvature of a closed convex surface with vertices retains the properties of the external curvature of general convex surfaces, such as being positive definite and additive. The spherical image is unique at regular points but not single-valued at conical points.

We denote by $W(A_i)$ the class of closed convex surfaces with vertices at points $A_i, i = 1, \ldots, k$, which are single-valuedly projected onto the sphere S^2. The external curvature $\omega_\Phi(M)$ of a closed convex surface has the following properties:

Lemma 1. For any Borel set M, the condition $\omega_\Phi(M) \geq 0$ holds, where the set M and its closure $\overline{M}$ may include some vertices A_i.

The following property of the external curvature of a closed convex surface with vertices is referred to as a *special property.*

Lemma 2. If the set M has a non-zero Lebesgue measure, then the set M^* also has a non-zero Lebesgue measure.

The distance from the center of the sphere S^2 to a vertex $A_i \in \Phi$ of the closed convex surface is called the radius of the vertex and is denoted by h_i.

Lemma 3. The external curvature of a vertex of a closed convex surface with vertices is a monotonically increasing function of the vertexŸs radius.

Consider a surface $\Phi \in W(A_i)$ and a similar surface Φ'. Naturally, Φ' also belongs to the set $W(A_i)$.

Theorem 1. The external curvature functions of the surfaces $\Phi \in W(A_i)$ and Φ' are equal.

The proof of the theorem follows from the fact that the support planes at corresponding points of similar surfaces are parallel.

It follows from the theorem that the solution to the problem of reconstructing a convex surface from $W(A_i)$ differs only by similarity. Therefore, we solve the problem relative to a unit sphere. The uniqueness of the solution is understood within the class of similar surfaces.

Initially, the problem of restoration a surface based on a given external curvature function is considered in the class of convex polyhedra. Here, the external curvature is a discrete function, taking the value $\omega(A_i) = \omega_i > 0$ at the points A_i on the sphere S^2, and the value 0 at all other points.

Theorem 2. If the numbers $0 < \omega_i < 2\pi, i = 1, \ldots, n$ satisfy the condition $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 4\pi$, then there exists a convex polyhedra in $W(A_i)$ with external curvatures ω_i at the vertices A_i.

Given a function $\mu(M)$ and positive numbers ω_i, Theorem 2 allows us to solve the problem of restoration a closed convex surface with an external curvature function equal to $\mu(M)$ and external curvatures ω_i at its vertices.

Theorem 3. If the function $\mu(M)$ satisfies the following conditions:

1. For all Borel sets $M \subset S^2$, $\mu(M) \geq 0$,
2. For sets M_i in any $\varepsilon > 0$ neighborhoods of points a_i, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(M_i) = \omega_i < 2\pi$,
3. For the sphere S^2, $\mu(S^2) = \mu(S^2 \setminus \{a_i\}) + \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 4\pi$,

then there exists a unique closed convex surface with vertices at A_i along the rays Oa_i, with external curvatures ω_i at the vertices A_i, and an external curvature $\omega_\Phi(M) = \mu(M)$.

The uniqueness of restoration a closed convex surface with vertices based on the external curvature function is proven in the class of polyhedra and in the general case, ensuring the uniqueness of the solution within the class of similar surfaces.

LITERATURE

1. Alexandrov A. D. Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Russian: Chapman and Hall, 2010.
2. Bakelman I.Ya., Venger A.L. and Kantor B.E.. Introduction to Global Differential Geometry. Russian: Demand Book, 2012.
3. Artykbayev A. and Tillayev D.. Properties of External Curvature of Surfaces with Vertices, Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2023. Vol. 4, No. 1. P. 9-12. (in Russian).
4. Tillayev D. R. Restoration from the External Curvature of a Surface with a single Vertex, Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science. 2025. Vol. 1, No. 1. P. 50-56.

Berilgan natural sonni tub son, tub sonning kvadrati va tub sonning kubi yig'indisi ko'rinishida tasvirlashlar haqida

Abrayev B.X.[1], **Ishqobilova A.B.** [2]
Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
babrayev@mail.ru, ishqobilovaa@gmail.com

Ushbu Diofant tenglamani qaraylik:

$$a_1 p_1 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^3 = n, \tag{1}$$

bu yerda a_1, a_2, a_3 butun sonlar, n natural son va p_1, p_2, p_3 turli tub sonlar. (1) tenglamaning koefitsiyentlari va n natural son ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv n \pmod 2. \tag{2}$$

$$(a_i, a_j) = 1, \quad (n, a_1, a_2, a_3) = 1. \tag{3}$$

shartlarini qanoatlantirsin. $r(n)$ orqali (1) tenglamaning logarifmik vaznli tub sonlardagi yechimlari sonini belgilaylik ya'ni

$$r(n) := \sum_{\substack{n=a_1p_1+a_2p_2^2+a_3p_3^3\\ M<|a_1|p_1\le N,\\ M<|a_2|p_2^2\le N,\\ M<|a_3|p_3^3\le N}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3).$$

Tub sonlar bilan bog'liq eksponensial yig'indilarni ushbu ko'rinishda aniqlaymiz ([1] ga qarang):

$$S_j(\alpha) := \sum_{M_j<p_j^k\le N_j} (\log p_j)e(a_jp_j^k\alpha), \quad (k=j=1,2,3),$$

bu yerda $e(x) := \exp(2\pi ix)$.

Eksponensial integralning ortogonalik xossasidan foydalanib $r(n)$ uchun Furye koeffitsienti formulasiga ko'ra quyidagini topamiz([1] ga qarang):

$$r(n) = \int_0^1 S(\alpha)e(-\alpha n)\,d\alpha = \sum_{\substack{n=a_1p_1+a_2p_2^2+a_3p_3^3\\ M<|a_1|p_1\le N\\ M<|a_2|p_2^2\le N\\ M<|a_3|p_3^3\le N}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3).$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$L := \log N, \quad P := \left(\frac{N}{D}\right)^{1/6-\varepsilon}, D := \max\{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}. \tag{4}$$

q modul bo'yicha χ_1, χ_2, χ_3 Dirichle xarakterlari uchun darajali xarakterlar yig'indisini mos holda quyidagicha aniqlaymiz([2]):

$$C_{\chi_j}(a_j) := \sum_{k=1}^{q} \chi_j(m)e\left(\frac{a_jk^j}{q}\right), \quad C_q(a_j) := C_{\chi_0}(a_j), \ \ (j=1,2,3)$$

bu yerda χ_0- q modul bo'yicha bosh xarakter.

Shu bilan birga

$$B(q,\chi_1,\chi_2,\chi_3) := \sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{kn}{q}\right)\prod_{j=1}^{3} C_{\chi_j}(a_jk), \tag{5}$$

va

$$A(q) := \frac{B(q,\chi_0)}{\varphi^3(q)}, \ \ F(q,\chi_1,\chi_2,\chi_3) := \sum_{k=1}^{q} e\left(-\frac{kn}{q}\right)\prod_{j=1}^{3} C_{\chi_j}(a_jk) \tag{6}$$

$$\mathfrak{S}(n,x) := \sum_{q\le x} A(q), \tag{7}$$

bo'lsin.

Bundan tashqari [3] dagi singari, (1) tenglama uchun kongruent yechimga ega bo'lishlik va musbat yechimga ega bo'lishlik shartlarini quyidagicha aniqlaymiz, ya'ni

$$N(q) := \left\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3 : 1\le n\le q,\ a_1n_1 + a_1n_2^2 + a_3n_3^3 = n\right\}, \tag{8}$$

$$\tilde{N}(q) := \Big\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : 1 \le n_i \le q,\ (n, q) = 1,$$
$$a_1 n_1 + a_2 n_2^2 + a_3 n_3^3 \equiv n (mod q)\Big\}. \quad (9$$

Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teoremalardan iborat:

1-teorema. $j = 1, 2, 3$ bo'lganda $\chi_j \pmod{p^{\alpha_j}}$ primitiv xarakterlar va $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bo'lsin. Har qanday $t \ge \alpha$ va $\chi_0(modp^t)$ bo'lganda $B(p^t, \chi_1\chi_0, \chi_2\chi_0, \chi_3\chi_0)$ funksiya uchun quyidagilar o'rinlidir:

(a) $B(p^\alpha, \chi_1\chi_0, \chi_2\chi_0, \chi_3\chi_0,) = F(p^\alpha, \chi_1\chi_0, \chi_2\chi_0, \chi_3\chi_0,)$,

(b) $B(p^t) = 0$, agar $t \ge \theta + \max\{\theta, \alpha\}$ bo'lsa, bu yerda $\theta = 1$ agar $p \ne 3$ va $\theta = 2$ agar $p = 3$,

(c) Har qanday $\eta \ge \alpha$ uchun: $\sum_{\nu=\alpha}^{\eta} \varphi(p^\nu)^{-3} B(p^\nu) = \varphi(p^\eta)^{-3} F(p^\eta)$.

2-teorema Ushbu baholar o'rinli:

a) Har qanday $x > 0$ uchun va qandaydir musbat doimiy $c_2 > 0$ mavjud boÇlib,

$$\sum_{q>x} |A(n, q)| \ll \frac{\log(x + 2)^c}{x}$$

o'rinli bo'ladi.(bu esa singulyar qator $\mathfrak{S}(n) := \mathfrak{S}(n, \infty)$ absolyut yaqinlashuvchi ekanligini bildiradi.)

(b) Ixtiyoriy $c > 0$ o'zgarmas son uchun $\mathfrak{S}(n) \gg \frac{1}{(\log D)^c}$, baho o'rinli .

Adabiyotlar

1. I. Allakov, B. Kh. Abrayev, Tub sonlar bilan ifodalangan chiziqli tenglamalar sistemasining maxsus to'plami haqida, Chebyshevskiy sbornik, jild. 24, 2-son, , 15–37, 2023.
2. L. K. Xua, Additiv sonlar nazariyasidagi ba'zi natijalar, The Quarterly Journal of Mathematics, 9. (1938), 68–80.
3. I. Allakov, N. S. Muzropova, Bir tenglamaning tub sonlardagi yechimi haqida. Chebyshevskiy sbornik. Jild. 25. (2024)
4. H. Davenport, Multiplikativ sonlar nazariyasi, 3-nashr, Springer, 2000.

On the τ-density of the space τ-closed subsets

Beshimov R. B.[1], Manasipova R. Z.[2]
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
rbeshimov@mail.ru
National Pedagogical University of Uzbekistan named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan;
rezidabadrutdinova@gmail.com

Let X be a topological T_1-space and τ an infinite cardinal number. The set of all closed subsets of the space X will be denoted by $\exp X$. A basis of the Vietoris topology defined on the set $\exp X$ is the family of sets of the form

$$O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \left\{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, F \cap U_i \ne \varnothing \text{ for } i = 1, \ldots, n\right\},$$

where $U_1, U_2, \ldots, U_n$ are open subsets of the space X[1].
In 1980, I. Juhasz in the book [2] introduced the definition of a τ-closed set.
Definition 1 [2]. A subset $F \subset X$ is called τ-closed in a topological space X if for every subset $B \subset F$ such that the cardinality of B does not exceed the infinite cardinal number τ, the closure of the set B in X is contained in F.

In 2016, O. G. Okunev introduced the following concept of the τ-closure of a subset.
Definition 2 [3]. The τ-closure of a subset A of a topological space X is the set

$$[A]_\tau = \bigcup \{\bar{B} : B \subset A, |B| \leq \tau\}.$$

A subset is called τ-dense if its τ-closure coincides with the whole space X.
In 2023, in paper [4], R.B. Beshimov, N.K. Mamadaliev, and R.Z. Manasypova studied certain properties of τ-closed and τ-open subsets, as well as the properties of τ-closure, τ interior, and τ-boundary of sets. Examples of topological spaces were given, demonstrating both similarities and differences between τ-closure, τ-interior, τ-boundary of subsets and the corresponding classical notions of closure, interior, and boundary.

In paper [5], the theory of τ-closed subsets was further developed, and the definitions of certain cardinal invariants were introduced, in particular, τ-density and the τ-Suslin number. Examples of topological spaces were provided, showing the difference between τ-density and classical density, as well as between the τ-Suslin number and the Suslin number. For a topological space X, the τ-density is defined as the least cardinal number of the form $|A|$, where A is a τ-dense subset of X, i.e.,

$$d^\tau(X) = \min\{|A|; A \text{ is a } \tau\text{-dense subset of } X\}.$$

In paper [6], the notions of a τ-base and a system of τ-neighborhoods of a topological space were introduced, and their properties were studied. Furthermore, the space of τ continuous mappings was constructed, and it was shown that this space is a T_i-space whenever the image of τ-continuous mappings is a T_i-space for $i = 0, 1, 2, 3$.

In this paper, the concept of the space of τ-closed subsets is introduced, and some of its topological and cardinal properties are investigated.

By $\exp^\tau X$ we denote the family of all τ-closed subsets of the space X.

Theorem 1. Let $U_1, \ldots, U_n$ be τ-open subsets of the space X. The families of sets of the form

$$O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \left\{F : F \in \exp^\tau X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, F \cap U_i \neq \varnothing \text{ for every } i = \overline{1, n}\right\},$$

form a basis of some topology on the set $\exp^\tau X$.
Theorem 2. If Y is an everywhere τ-dense subset of a T_1-space X, then $\exp^\tau Y$ is an everywhere dense subset of the space $\exp^\tau X$.

Theorem 3. Let X be an infinite T_1-space. Then

$$d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X).$$

LITERATURE

1. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *General Topology: Basic Constructions.* Moscow: FIZMATLIT, 2006, p.117.

2. I.Juhasz, *Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later,* Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980, 13-14.

3. Okunev O., The minitightness of products, *Topology and its Applications* 208 (2016), 10-16.

4. R.B. Beshimov, N.K. Mamadaliev, R.Z. Manasypova, On some properties of the τ-boundary of a set, *Bulletin of the National University of Uzbekistan,* 2023, pp. 176–183.

5. Beshimov R.B., D.N.Georgiou, R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, F.Sereti, Some topological properties of e-space and description of τ-closed sets, *Filomat* 39:8 (2025), 2625–2637, https://doi.org/10.2298/FIL2508625B.

6. Beshimov R.B., R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, On τ-base and e-density of topological spaces, *Filomat* 39:10 (2025), 3353вЂ"3358 https://doi.org/10.2298/FIL2510353B

Some cohomologically rigid lie algebras

Gaybullaev R.K. [1] **Solijanova G.O.** [2] **Urazmatov G.Kh.** [3]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

r.gaybullaev@nuu.uz, gulhayo.solijonova@mail.ru, gulmurod0405@gmail.com

The study of cohomology groups of Lie algebras has been a key focus in mathematical physics and algebraic geometry. Numerous papers, including [1]-[3], have investigated cohomology-related problems. In this work, we consider cohomology groups of maximal solvable Lie algebras.

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(\mathcal{L}, [-,-])$ over a field of $\mathbb{F}$ is called a Lie algebra if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$ the following identities hold:

$$[x, y] = -[y, x]$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

For a given Lie algebra $(L, [-,-])$ the lower central and the derived series are defined recursively as follows:

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1; \quad L^{[1]} = L, L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], k \geq 1.$$

Definition 2. An algebra $(L, [-,-])$ is said to be solvable (respectively, nilpotent) if there exists $m \in \mathbb{N}$ (respectively, $n \in \mathbb{N}$) such that $L^m = 0$ ($L^{[n]} = 0$).

For a given Lie algebra R, let $C^k(R, M)$ be the space of all alternating F-linear homogeneous mappings $\wedge^n R \to M$, $k \geq 0$ and $C^0(R, M) = M$. Let $d^k : C^k(R, M) \to C^{k+1}(R, M)$ be an F-homomorphism defined by

$$(d^k f)(x_1, \dots, x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} [x_i, f(x_1, \dots, \widehat{x}_1, \dots, x_{k+1})] +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots \widehat{x}_j, \dots, x_{k+1}),$$

where the elements $Z^k(R, M)$ and $x_i \in R$. Since the derivative operator $d = \sum_{i \geq 0} d^i$ satisfies the property $d \circ d = 0$, the k-th cohomology group well defined and

$$H^k = Z^k(R, M)/B^k(R, M),$$

where the elements $Z^k(R, M) := \ Kerd^k$ and $B^k(R, M) := \ Imd^{k-1}$ are called k-cocycles and k-coboundaries, respectively.

Hoschild-Serre factorization theorem simplifies computations of cohomology groups for semidirect sums of algebras [2].

Theorem 1. If $\mathcal{R} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$ is a solvable Lie algebra such that $\mathcal{Q}$ is Abelian and operators $ad_{\mathcal{R}}t$ $(t \in \mathcal{Q})$ are diagonal, then the adjoint cohomology $H^p(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ satisfies the following isomorphism

$$H^p(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \cong \sum_{a+b=p} H^a(\mathcal{Q}, \mathbb{K}) \otimes H^b(\mathcal{N}, \mathcal{R})^{\mathcal{Q}},$$

where

$$H^b(\mathcal{N}, \mathcal{R})^{\mathcal{Q}} = \{\varphi \in H^b(\mathcal{N}, \mathcal{R}) |\ (t.\varphi) = 0,\ t \in \mathcal{Q}\}$$

is the space of $\mathcal{Q}$-invariant cocycles of $\mathcal{N}$ with values in $\mathcal{R}$, the invariance being defined by

$$(t.\varphi)(z_1, z_2, \dots, z_b) = [t, \varphi(z_1, z_2, \dots, z_b)] - \sum_{s=1}^{b} \varphi(z_1, \dots, [t, z_s], \dots, z_b).$$

Let consider

$$H^a(\mathcal{Q}, \mathbb{K}) = \frac{Ker\ (d^a)}{Im\ (d^{a-1})},$$

where $d^a : C^a(\mathcal{Q}, \mathbb{K}) \to C^{a+1}(\mathcal{Q}, \mathbb{K})$. Since $\varphi : \mathcal{Q} \times \dots \times \mathcal{Q} \to \mathbb{K}$ and $[t_i, t_j] = 0,\ t_i, t_j \in \mathcal{Q}$ we get $(d^a\varphi)(t_1, \dots, t_{a+1}) = 0$. It implies that $Im\ d^a = 0$ and $Ker\ d^a = C^a(\mathcal{Q}, \mathbb{K})$, i.e., $H^a(\mathcal{Q}, \mathbb{K}) = \wedge^a \mathcal{Q}$. Therefore, the cohomology groups $H^k(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ vanish if and only if the space of $\mathcal{Q}$-invariant cocycles $H^b(\mathcal{N}, \mathcal{R})^{\mathcal{Q}}$ vanish. On the other hand, $H^p(\mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0$ implies that $H^b(\mathcal{N}, \mathcal{R})^{\mathcal{Q}} = 0$ for all $0 \le b \le p$.

Definition 3. A torus on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a commutative subalgebra of $Der(\mathcal{L})$ (the set of all derivations of $\mathcal{L}$) consisting of semisimple endomorphisms. A torus is said to be maximal if it is not strictly contained in any other torus. We denote by $\mathcal{T}_{max}$ a maximal torus of a Lie algebra $\mathcal{L}$.

We should note that if $dim\mathcal{T} = dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$, then $\mathcal{N}$ is called nilpotent Lie algebra of maximal rank.

Definition 4. A solvable Lie algebra $\mathcal{R}_{\mathcal{T}} = \mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}$ is said to be of maximal rank, if $dim\mathcal{T} = dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$.

The dimension of a maximal torus of a nilpotent Lie algebra is denoted by $rank(\mathcal{N})$.

Denote by $W = \{\alpha \in \mathcal{T}^* : \mathcal{N}_\alpha \neq 0\}$ the roots system of $\mathcal{N}$ associated to $\mathcal{T}$, and by $\Psi_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ the set of primitive roots such that any non-primitive root can be expressed by a linear combination of them. In fact, any root $\alpha \in W$ we have $\alpha = \sum\limits_{\alpha_i \in \Psi_1} p_i\alpha_i$ with $p_i \in \mathbb{Z}$.

Let $\mathcal{R} = \mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}$ and $rank(\mathcal{N}) = 2$. Then we have the following results:

Theorem 1. If $3\alpha_1 + \alpha_2 \notin W$ and $\alpha_1 + 3\alpha_2 \notin W$, then $H^2(\mathcal{N}, \mathcal{R})^{\mathcal{T}} = 0$.

Corollary 1. If $3\alpha_1 + \alpha_2 \notin W$ and $\alpha_1 + 3\alpha_2 \notin W$, then $\mathcal{R}$ is cohomologically rigid.

LITERATURE

1. F. Leger, E. Luks. Cohomology theorems for Borel-Like Solvable Lie algebras in arbitrary characteristic, Canad.J. Math., 24 (1972), 1019-1026.

2. G. Hochschild and J.P. Serre, Cohomology of Lie algebras, Ann. Math., 57 (1953), 591-603.

3. Ancochea Bermúdez J. M. Campoamor-Stursberg R. Cohomologically rigid solvable Lie algebras with a nilradical of arbitrary characteristic sequence, Linear Algebra Appl., 488 (2016), 135-147.

2-local derivations on algebras of locally measurable operators affiliated with a type I_∞ real W*-algebra.

Rakhimov A. A.[1], **Kholbekova S.**[2]
[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
[2] Fergana state technical university, 86, Fergana str., Fergana, Uzbekistan;
rakhimov@ktu.edu.tr, kholbekovasyyora94892123@gmail.com

Given an algebra A, a linear operator $D : A \to A$ is called a derivation, if

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad \text{for all } x, y \in A.$$

Each element $a \in A$ implements a derivation D_a on A defined as

$$D_a(x) = [a, x] = ax - xa, \quad x \in A.$$

Such derivations D_a are said to be inner derivations. If the element a, implementing the derivation D_a, belongs to a larger algebra B containing A, then D_a is called a spatial derivation on A. There exist various types of linear operators which are close to derivations. In particular R. Kadison [1] has introduced and investigated so-called local derivations on von Neumann algebras and some polynomial algebras.

A linear operator Δ on an algebra A is called a local derivation if given any $x \in A$ there exists a derivation D (depending on x) such that $\Delta(x) = D(x)$. The main problems concerning this notion are to find conditions under which local derivations become derivations and to present examples of algebras with local derivations that are not derivations [1]. In particular Kadison [1] has proved that each continuous local derivation from a von Neumann algebra M into a dual M-bimodule is a derivation.

In 1997, P. Semrl [2] introduced the concept of 2-local derivations and automorphisms. A map $\Delta : A \to A$ (not linear in general) is called a 2-local derivation if for every $x, y \in A$, there exists a derivation $D_{x,y} : A \to A$ such that

$$\Delta(x) = D_{x,y}(x) \quad \text{and} \quad \Delta(y) = D_{x,y}(y).$$

Local and 2-local derivations have been studied on different operator algebras by many authors. The following theorem is the main result of this paper.

Theorem. Let R be a real W*-algebra of type I_∞ and $LS(R)$ be the real $*$-algebra of all linear operators that are locally measurable with respect to R. Let A be a real $*$-subalgebra of $LS(R)$ such that $R \subset A$. Then every 2-local derivation $\Delta : A \to A$ is a derivation.

LITERATURA

1. Kadison R.V. Local derivations, J. Algebra. 130 (1990), 494–509.
2. Semrl P. Local automorphisms and derivations on B(H), Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2677–2680.

Recovering a surface generated by a translation surface of type 1 according to mean curvature

Kholmurodova G.N.
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
xolmurodovagulnoza3@gmail.com

Let there be given a translation surface of type 1 F by the following vector equation in a isotropic space[1]:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + (f(u)+g(v))\,\overrightarrow{k},$$

Where, the isotropic planar translation curves are $\gamma_1(u) = (u, 0, f(u))$ and $\gamma_2(v) = (0, v, g(v))$. We assume that, the surface F has no isotropic tangent planes. $\overrightarrow{N}_P$ be a isotropic unit normal vector at a point P of the surface F. Take a unit vector at the point P, we consider the following:

$$\overrightarrow{Z}_P = d_1\overrightarrow{r}(u) + d_2\overrightarrow{r}(v) + d_3\overrightarrow{N}_P$$

In this case, $\overrightarrow{r}(u), \overrightarrow{r}(v)-$ are tangent vectors at the point P, $d_1^2 + d_2^2 = 1$

Definition 1. If there is a function h determined by:

$$h : F \to F^h, \;\; h(P) = P + l\,\overrightarrow{Z}_P$$

where l is constant, then the surface F^h is a surface generated by the translation surface F. We can write the following parametrization[2]:

$$\overrightarrow{r}^h(u,v) = \overrightarrow{r}(u,v) + l\,\overrightarrow{Z}(u,v)$$

From this we get:

$$\overrightarrow{r}^h(u,v) = \overrightarrow{r}(u,v) + l(d_1\overrightarrow{r}(u) + d_2\overrightarrow{r}(v) + d_3\overrightarrow{N}(0,0,1))$$

If we take $ld_1 = \eta,\; ld_2 = \mu,\; ld_3 = \gamma$, where, $\eta^2 + \mu^2 = l^2$. From this, the translation surface F^h has the following form:

$$\overrightarrow{r}^h(u,v) = (u+\eta, v+\mu, (f(u)+\eta f'(u)) + (g(v)+\mu g'(v)) + \gamma)$$

In the isotropic space, the total and mean curvatures of this surface are:

$$K^h = (f'' + \eta f''')(g'' + \mu g''')$$

$$H^h = \frac{(f'' + \eta f''') + (g'' + \mu g''')}{2}$$

Equation of the surface generated by a translation surface of type 1 according to zero mean curvature was found in the work [2]. Furthermore, in the work of A.Artykbaev and Sh.Ismoilov [3], the dual translation surfaces are investigated according to mean curvature,where this curvature is sum of two separate variable differentiable functions in the isotropic space. In this paper, we will find analytical equation of the surface generated by a translation surface of type 1 according to mean curvature in this space.
Let the surface generated by a translation surface of type 1 be one-valued projected onto the Oxy plane. Then the surface F^h is parameterized by:

$$z^h(u,v) = f(u) + \eta f'(u) + g(v) + \mu g'(v) + \gamma$$

From this, we obtain the main theorem:
Theorem 1. If the mean curvature is given by $\rho(u) + \lambda(v)$, then the analytical form of the surface generated by a translation surface of type 1 is:

$$z^h(u,v) = 2(\int[\int \rho(u)du]du + \int[\int \lambda(v)dv]dv) + \frac{\tau}{2}(u^2 - v^2)$$

$$+\eta(c_1 u + c_2) + \mu(d_1 v + d_2) + \gamma$$

where, τ, c_i, d_i- const, $i = 1, 2$.

LITERATURE

1. Sipus Z.M. Translation surfaces of constant curvatures in a simply isotropic space, Period Math.Hungar. 2014. Vol. 68, No. 2. P. 160–175.
2. Karacan M.K., Cakmak A., Kiziltug S., Es H. Surfaces generated by translation surfaces of type 1 in I_3^1, Iranian J.Math.Sci.Inform. 2021. Vol. 16, No. 1. P. 123–135.
3. Artykbaev A., Ismoilov Sh.Sh. Surface recovering by a given total and mean curvature in isotropic space R_3^2, Palastine J. Math. 2022. Vol. 11, No. 3. P. 351–361.

Stably properly infinite real $AW*-$algebras

Kim D.I [1,2], Rakhimov, A.A [1]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
Tashkent Branch of the G.V. Plekhanov Russian University of Economic,Tashkent, Uzbekistan
dmitriy.kim.1995.04.23@gmail.com, rakhimov@ktu.edu.tr

A Banach *-algebra A over a field $\mathbb{C}$ is called a *C*-algebra* if $\|x^*x\| = \|x\|^2$, for any $x \in A$. Let A be a ring and S a non-empty subset of A. Assume that $R(S) = \{x \in A \mid sx = 0$ for all $s \in S\}$ and call $R(S)$ the right annihilator of S. Similarly, $L(S) = \{x \in A \mid xs = 0$ for all $s \in S\}$ denotes the left annihilator of S. A *Baer *-ring* is a ring A such that for every non-empty subset S of A, $R(S) = gA$ for a suitable projection g. The equality $L(S) = ((R(S^*)))^* = ((hA))^* = Ah$ (for some projection h) shows that this definition can also be given through the left annihilator. *AW*-algebra* is a C*-algebra, which is also a Baer *-ring.

Let e, f be projections from A. We say that e is equivalent to f, and write $e \sim f$, if $e = w^*w$, $f = ww^*$ for some partial isometry w from M. A projection e is called: *finite*, if $e \sim f \leq e$ implies $f = e$; *infinite* - otherwise; *purely infinite*, if e doesn't have any nonzero finite subprojection; *abelian*, if the algebra eAe is an abelian AW*-algebra. An AW*-algebra A is called *finite, infinite, purely infinite*, if $\mathbb{1}$ is a finite, infinite, purely infinite respectively; *properly infinite*, if every nonzero projection from $Z(A)$ is infinite; Determining which type is an AW*-algebra is greatly related to question of the quasitrace [1],[2].

Definition 1. Let A be a C*-algebra with identity and let A_h be its hermitian part. A 1-quasitrace τ on A is a function $\tau : A \to \mathbb{C}$ satisfying the conditions:

(i) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$, for all $x \in A$;

(ii) $\tau(a + ib) = \tau(a) + i\tau(b)$, for all $a, b \in A_h$;

(iii) τ – linear on any abelian C^*-subalgebra B of A.

Definition 2. Let R be a unital real C*-algebra. A quasitrace τ on R is a function $\tau : R \to \mathbb{R}$ that satisfies the following conditions

(i') $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$, $x \in R$;

(ii') $\tau(a+b) = \tau(a)$, for $a \in R_h, b \in R_k$;

(iii') τ is linear on an abelian C*-subalgebra B of R.

Both definitions can be extended to matrices over these algebras, and quasitrace over this matrices often referred as 2-quasitrace. It is known that complex or real AW*-algebra is finite if and only if it possess a family of faithful nontrivial 2-quasitraces. For trivial case almost no research were made and a good question arise if AW*-algebra properly infinite or purely infinite if it has trivial 2-quasitrace? We first consider general case for real C*-algebras since complex case was studied in [3] In [3] is given a numerical estimate of the inadmissibility of quasitraces and tracial states; in particular, for quasitraces, how large a matrix algebra is required to obtain a properly infinite unit, and for tracial states, how large an n-tuple is required in real case? In next theorem we consider two equivalent conditios for a real C*-algebra to be properly infinite.

Theorem 3. Let R be a real C*-algebra with unity. Then the following conditions are equivalent.

(1) R admit only trivial quasitraces.

(2) For any $0 < \delta < \frac{1}{2}$ there exist $n \geq 2$ and $x_1, .., x_n \in R$ satisfying the conditions $\sum_{i=1}^n x_i^* x_i = 1_R$ и $\| \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \| \leq \delta$

In the case when A is an AW*-algebra, the matrix $M_n(A)$ is properly infinite only if A is properly infinite or $n = \infty$. That is, such a smallest number n for which A is finite and $M_n(A)$ is properly infinite does not exist in the case when A is an AW*-algebra. In the real case, things get even more complicated for $n > 1$, the matrix $M_n(A)$ can lose its AW*-properties when it has non-AW*-complexification, namely, it may ceases to be a *-Baer ring [4]. It can be seen that proper infiniteness is stable over taking matrix in real case while *-Baer ring's property is not. From the above, the following statements are easily proven.

Theorem 4. If R is a real AW*-algebra such that $R + iR$ is an AW*-algebra, then $M_n(R)$ $(n \geq 1)$ is a real AW*-algebra. Additionally if R is properly infinite then $M_n(R)$ $(n \geq 1)$ is also properly infinite.

Recall that an algebra R is called *stably properly infinite* if $M_n(R)$ is properly infinite for all n.

Corollary 5. Let R be a real AW*-algebra such that $R + iR$ is an AW*-algebra. If R is properly infinite, then R is stably properly infinite.

LITERATURE

1. Haagerup U. Quasitraces on exact C*-algebras are traces. C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.,– 2014. – 36(2-3). – pp. 67–92 .
2.Kim D.I., Rakhimov A.A. Quasitraces on real $C*-$ and $AW*-$algebras, Comp. Uzb.Math.Journal, 2025, No.3
3. Mihoj.O., Rordam M. Around traces and quasitraces,–2023. – Arxiv, https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.17412.
4.Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. Real $W*-$algebras. Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin,– 2010.– Germany, Bonn.,– 138 p.

Classification of 3-dimensional complex Leibniz dialgebras

Kurbanbaev T.K., Uzakbaev N.E.
Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail: tuuelbay@mail.ru, e-mail: nn.uzakbaev@gmail.com

Definition 1.[4] Leibniz dialgebra $\mathcal{DL}$ is an algebra with binary operations $\vdash: \mathcal{DL}\times\mathcal{DL} \to \mathcal{DL}$, $\dashv: \mathcal{DL} \times \mathcal{DL} \to \mathcal{DL}$ satisfying the following identities:

$$\begin{array}{ll} (1): & (x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \\ (2): & x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \\ (3): & (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) + (x \dashv z) \dashv y, \\ (4): & (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) + (x \vdash z) \vdash y, \\ (5): & (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) + (x \vdash z) \dashv y, \end{array} \tag{1}$$

for all $x, y, z \in \mathcal{DL}$.

In this paper we give lists of three-dimensional complex Leibniz dialgebras. The idea is as follows. We choose the first part $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{DL}, \dashv)$ of the Leibniz dialgebra from the list given in the [1]. Combining algebra from this list (taking into account the Leibniz dialgebra axioms) with the second part $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{DL}, \vdash)$, we obtain constraints for the structural constants. Then we distinguish non-isomorphic algebras. The following theorem is one of the main results of this paper.

Theorem 1. Let $\mathcal{DL}$ – three-dimensional complex Leibniz dialgebra and $\dim \mathcal{DL}^2 = 1$. Then $\mathcal{DL}$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$\mathcal{DL}_1^1:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \vdash e_3 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,

$\mathcal{DL}_1^2:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = -\alpha e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -\frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,

$\mathcal{DL}_1^3:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

$\mathcal{DL}_2^1:$ $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

$\mathcal{DL}_4^1:$ $e_1 \dashv e_3 = -e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = -e_1$, $e_2 \vdash e_3 = b e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -b e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,

$\mathcal{DL}_4^2:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,

$\mathcal{DL}_4^3:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = c e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,

$\mathcal{DL}_4^4:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

$\mathcal{DL}_7^1:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,

$\mathcal{DL}_7^2:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_1 = -e_1$, $e_2 \vdash e_3 = -e_1$, $e_3 \vdash e_1 = -e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,

$\mathcal{DL}_{12}^1:$ $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \vdash e_2 = a e_1$, $e_2 \vdash e_3 = b e_1$, $e_3 \vdash e_2 = d e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

$\mathcal{DL}_{13}^1:$ $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_2 = a e_1$, $e_2 \vdash e_3 = b e_1$, $e_3 \vdash e_2 = d e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

$\mathcal{DL}_{14}^1:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = -e_1$, $e_3 \vdash e_2 = d e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,

$\mathcal{DL}_{14}^2:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = b e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,

$\mathcal{DL}_{14}^3:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = v e_1$,

where $a, b, c, d, v \in \mathbb{C}$ and $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$.

Theorem 2. Let $\mathcal{DL}$ – three-dimensional complex Leibniz dialgebra and $\dim \mathcal{DL}^2 = 2$. Then $\mathcal{DL}$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$\mathcal{DM}_1^1:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,
$\mathcal{DM}_1^2:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \vdash e_3 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_2 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1 - e_2$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,
$\mathcal{DM}_1^3:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \vdash e_3 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,
$\mathcal{DM}_1^4:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = -e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -e_1 - e_2$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,
$\mathcal{DM}_1^5:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = \frac{1}{\alpha-1} e_1 - e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_1^6:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = h e_1 + (1-\alpha) h e_2$, $e_3 \vdash e_1 = -\alpha e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -\frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,
$\mathcal{DM}_1^7:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = -\alpha e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -\frac{\alpha}{\alpha-1} e_1$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,
$\mathcal{DM}_1^8:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,
$\mathcal{DM}_1^9:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = h e_1 + (1-\alpha) h e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_1^{10}:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_2^1:$ $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_2^2:$ $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -e_1 - e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_2^3:$ $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_4^1:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \vdash e_3 = -e_2$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$,
$\mathcal{DM}_4^2:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = -e_2$, $e_3 \vdash e_1 = -\alpha e_1$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1$,
$\mathcal{DM}_4^3:$ $e_1 \dashv e_3 = -e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = h e_1 - e_2$, $e_3 \vdash e_2 = h e_1 + e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_4^4:$ $e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1$, $e_2 \dashv e_3 = -e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = -e_2$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1$,
$\mathcal{DM}_5^1:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1 + (m-1) e_2$,
$\mathcal{DM}_5^2:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = j e_1$, $e_3 \vdash e_2 = j e_1$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1 - m e_2$,
$\mathcal{DM}_5^3:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = m e_1 + n e_2$,
$\mathcal{DM}_6^1:$ $e_1 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_3 = g e_2$, $e_3 \vdash e_3 = e_1 + n e_2$,
$\mathcal{DM}_6^2:$ $e_1 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = k e_2$, $e_3 \vdash e_3 = -e_1 + n e_2$,
$\mathcal{DM}_8^1:$ $e_1 \dashv e_1 = e_2$, $e_2 \dashv e_1 = e_2$, $e_1 \vdash e_1 = e_2$, $e_2 \vdash e_1 = e_2$,
$\mathcal{DM}_8^2:$ $e_1 \dashv e_1 = e_2$, $e_2 \dashv e_1 = e_2$, $e_1 \vdash e_1 = -e_2$, $e_1 \vdash e_2 = -e_2$,
$\mathcal{DM}_{14}^1:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = -e_2$
$\mathcal{DM}_{14}^2:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = l e_1 - e_2$,
$\mathcal{DM}_{14}^3:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_2$, $e_3 \vdash e_2 = l e_1$,
$\mathcal{DM}_{14}^4:$ $e_1 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = h e_1 + e_2$,

$\mathcal{DM}_{15}^1:$ $e_1 \dashv e_1 = e_2$, $e_1 \vdash e_1 = f e_2$, $e_1 \vdash e_3 = g e_2$, $e_3 \vdash e_1 = k e_2$, $e_3 \vdash e_3 = n e_2$,
where $f, g, h, j, k, l, m, n \in \mathbb{C}$ and $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$.

Theorem 3. Let $\mathcal{DL}$ – three-dimensional complex Leibniz dialgebra and $\dim \mathcal{DL}^2 = 3$.

Then $\mathcal{DL}$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$\mathcal{DN}_7^1:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_2 \vdash e_1 = -e_1,$ $e_2 \vdash e_2 = pe_1 + pe_2 - pe_3,\ e_2 \vdash e_3 = (p-1)\,e_1 + pe_2 - pe_3,\ e_3 \vdash e_1 = -e_1,$ $e_3 \vdash e_2 = pe_1 + pe_2 - pe_3,\ e_2 \vdash e_3 = (p-1)\,e_1 + pe_2 - pe_3,$

$\mathcal{DN}_7^2:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_2 \vdash e_1 = -e_1,$ $e_3 \vdash e_1 = -e_1,\ e_2 \vdash e_3 = (q-1)\,e_1 + qe_2 - qe_3,\ e_2 \vdash e_3 = te_1 + qe_2 - qe_3,$

$\mathcal{DN}_7^3:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_2 \vdash e_1 = -e_1,$ $e_2 \vdash e_3 = -e_1,\ e_3 \vdash e_1 = -e_1,\ e_2 \vdash e_3 = te_1 + ue_2 - ue_3,$

$\mathcal{DN}_7^4:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_2 \vdash e_2 = pe_1 + pe_2 - pe_3,$ $e_2 \vdash e_3 = pe_1 + pe_2 - pe_3,\ e_3 \vdash e_2 = pe_1 + pe_2 - pe_3,\ e_2 \vdash e_3 = pe_1 + pe_2 - pe_3,$

$\mathcal{DN}_7^5:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_2 \vdash e_3 = qe_1 + qe_2 - qe_3,$ $e_2 \vdash e_3 = te_1 + qe_2 - qe_3,$

$\mathcal{DN}_7^6:$ $e_1 \dashv e_2 = e_1,\ e_1 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \dashv e_2 = e_1,\ e_3 \dashv e_3 = e_1,\ e_3 \vdash e_1 = se_1,$ $e_2 \vdash e_3 = te_1,$

where $p, q, s, t, u \in \mathbb{C}$.

Remark 1. To verify the Leibniz dialgebra axioms and isomorphisms between the algebras, we used the computer program Wolfram Mathematica.

LITERATURE

1. Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Rakhimov I.S. Leibniz Algebras, Structure and Classification. CRC Press, Taylor and Francis Group,–2019.–324 p.

2. Ayupov Sh.A., Omirov B.A. On Leibniz Algebras. Algebra and operators theory, Kluwer Academic Publisher, Notherlands, 1998.

3. Jacobson N. Lie algebras. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, New York, 1962.

4. Kolesnikov P.S. Varieties of dialgebras and conformal algebras. Siberian Mathematical Journal, -2008. Vol. 49, 2., 322-329 pp.

5. Rikhsiboev I.M., Rakhimov I.S., Basri W. Classification of 3-dimensional complex diassociative algebras. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, -2010, 4: 241-254 pp.

6. Rikhsiboev I.M., Rakhimov I.S., Basri W. Four-dimensional nilpotent diassociative algebras. Journal of Generalized Lie Theory and Applications, -2015, Vol. 9:1.

On the homotopy of the functor n-fold symmetric product

Meyliev Sh. U.[1], Mukhamadiev F. G.[1,2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
shmeyliev@mail.ru, farhodgm@nuu.uz

In this work shown that the functor of n-fold symmetric product $\mathcal{F}_n$ is a covariant homotopy functor.

By a *covariant homotopy functor* we mean a functor $\mathcal{F}$ in the category **Top** of topological spaces and their continuous mappings satisfying

(*) $\mathcal{F}$ preserves homotopy, that is, if a mapping $H(x,t)$ is a homotopy between continuous mappings $f, g : X \to Y$, then $F(H(x,t))$ is also a homotopy between mappings $F(f), F(g) : F(X) \to F(Y)$.

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers. Given a space X, we define its hyperspaces as the following sets:

1) $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty }\};$

2) $2^X = \{A \in CL(X) \mid A$ is compact $\}$;
3) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A$ has at most n points $\}$, $n \in N$ (see [9, 10]).
$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$$\beta = \{\langle U_1, ..., U_k\rangle \mid U_1, ..., U_k \text{ are open subsets of } X,\ k \in N\},$$

where $\langle U_1, ..., U_k\rangle = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j$ and $A \cap U_j \neq \emptyset$ for each $j \in \{1, ..., k\}\}$.

Note that, by definition, 2^X, $\mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}(X)$ are subsets of $CL(X)$. Hence, they are topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. Moreover,
1) $CL(X)$ is called the *hyperspace of nonempty closed subsets of* X;
2) 2^X is called the *hyperspace of nonempty compact subsets of* X;
3) $\mathcal{F}_n(X)$ is called the $n-$*fold symmetric product of* X;
4) $\mathcal{F}(X)$ is called the *hyperspace of finite subsets of* X.
On the other hand, it is obvious that $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X)$ for each $n \in N$ (see [1, 2]).

Theorem. The functor of n-fold symmetric product $\mathcal{F}_n$ is a covariant homotopy functor.

References

1. Tuyen L. Q., Tuyen O. V., Kočinac Lj. D. R., The Vietoris hyperspace F(X) and certain generalized metric properties, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 2024. Vol. 53, No. 2. P. 356–366.
2. Mukhamadiev F. G., Meyliev Sh. U., Some homotopy properties of $n-$fold symmetric product of the space X, ACTA NUUz. 2025. Vol. 2, No. 1.1. P. 87–92.

On the hamiltonian system on cotangent bundle of $\mathbb{SO}(3)$

Narmanov A.Y.[1], **Ergashova Sh.R.** [2]
National Uniersity of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
[1]narmanov@yandex.com, [2]shohida.ergashova@mail.ru

Let M^n be a smooth Riemannian manifold with a Riemannian metric $g_{ij}(x)$ of dimension n.

Consider the natural coordinates x and p on the cotangent bundle T^*M, where $x = (x^1, \dots, x^n)$ are the coordinates of a point on M and $p = (p_1, \dots, p_n)$ are the coordinates of a covector of the cotangent space T_x^*M on the basis $dx^1, \dots, dx^n$. Take the standard symplectic structure $\omega = dx \wedge dp$ on T^*M and consider the following function as a Hamiltonian:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)p_ip_j = \frac{1}{2}|p|^2. \tag{1}$$

It is well known that the following proposition [2].

Proposition. a) Let $\gamma(t) = (x(t); p(t))$ be an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = \mathrm{sgradH}$ on T^*M. The curve $x(t)$ is then a geodesic, and its velocity vector $\dot{x}(t)$ is connected to $p(t)$ by the following relation

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \sum g^{ij}(x)p_j(t).$$

b) Conversely, if a curve $x(t)$ is a geodesic on M, then the curve $(x(t); p(t))$, where $p_i(t) = \sum g_{ij}(x)p_j(t)$, is an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = \mathrm{sgradH}$.

Let us consider the Hamiltonian (1) for the manifold $\mathbb{SO}(3)$. To do this, let us parameterize the group $\mathbb{SO}(3)$ by Euler angles. If we write the following replacement of coordinates from (a, x, y, z) in R^4 to (u, v, w) in Euler angles

$$a = \cos\frac{v}{2}\cos\frac{w+u}{2}, \quad x = \sin\frac{v}{2}\cos\frac{w-u}{2}$$
$$y = \sin\frac{v}{2}\sin\frac{w-u}{2}, \quad z = \cos\frac{v}{2}\sin\frac{w+u}{2}$$

for $A \in \mathbb{SO}(3)$ we get

$$A =$$
$$\begin{pmatrix} \cos u\cos w - \sin u\cos v\sin w & -\sin u\cos w - \cos u\cos v\sin w & \sin v\sin w \\ \cos u\sin w + \sin u\cos v\cos w & -\sin u\sin w + \cos u\cos v\cos w & -\sin v\cos w \\ \sin u\sin v & \cos u\sin v & \cos v \end{pmatrix}.$$

We get the first quadratic form matrix, which is shown below, respectively.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\sin v \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\sin v & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Consider the natural coordinates x and p on the cotangent bundle $T^*\mathbb{SO}(3)$, where $x = (u, v, w)$ are the coordinates of a point on $\mathbb{SO}(3)$ and $p = (p_1, p_2, p_3)$ are the coordinates of a covector of the cotangent space $T_x^*\mathbb{SO}(3)$ on the basis du, dv, dw.

The Hamiltonian (1) in this case has the following form,

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos^2 v}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2\cos^2 v}p_3^2 - \frac{\sin v}{\cos^2 v}p_1p_3\right). \tag{2}$$

Let us recall some definitions.

Definition 1. The Hamiltonian system is called *completely integrable in the sense of Liouville or completely integrable*, if there exists a set of smooth functions $F_1, ..., F_n$ as

1) $F_1, ..., F_n$ are the first integrals of the *sgradH* Hamiltonian vector field,

2) they are functionally independent on M, that is, almost everywhere on M their gradients are linearly independent.

3) $\{F_i, F_j\} = 0$ for any i and j,

4) the vector fields $\mathrm{sgradF_i}$ are complete, that is, the natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole number line.

Definition 2. The decomposition of the manifold M^{2n} into connected components of the common-level surfaces of the integrals $F_1, ..., F_n$ is called the *Liouville foliation* corresponding to the integrated system $v = \mathrm{sgradH}$.

Since $F_1, ..., F_n$ are preserved by flow of $v = \mathrm{sgradH}$, every leaf of the Liouville foliation is an invariant surface.

The Liouville foliation consists of regular leaves (filling M almost in the whole) and singular ones (filling a set of the zero measure) [2].

Theorem. Hamiltonian system defined by (2) is completely integrable in the sense of Liouville. Regular leaves of a Liouville foliation generated by the Hamiltonian system are three-dimensional submanifolds of the six-dimensional manifold $T^*\mathbb{SO}(3)$ with nonzero normal curvature and zero Gaussian torsion.

REFERENCES

1. Aminov Yu., Geometry of Submanifolds, CRC Press, Boca Raton 2001
2. Coxeter H., Quaternions and Reflections, American Math. Mon. 53(3), (1946) 136–146.
3. Bolsinov A. and Fomenko A., Integrable Hamiltonian Systems, Geometry, Topology, Classification., Ijevsk 2004.

Grassman ko'pxilligining silliq strukturasi

Norqo'ziyev N.N.
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
nnnavruznn@gmail.com

Ushbu tezisda grassman ko‘pxilligining silliq sturkturasi va uchta xossasi ko‘rsatilgan. Misollarda esa $Gr(1,3)$ va $Gr(2,3)$ da uchta xossaga ko‘rilib 2 o‘lchamli ko‘pxillik bo‘lishi aytilgan.

Grassmann ko‘pxilligi $Gr(k,n)$ — $\mathbb{R}^n$ ichidagi k-o'lchamli chiziqli qism fazosidir. Biz $Gr(k,n)$ ustida silliq ko'pxillik strukturasini quramiz. $\mathbb{R}^n$ —$\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ ning standart bazisi bo'lsin. $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subset \{1,2,\dots,n\}$ ni k ta indekslar to'plamini kiritib olamiz va uning to'ldiruvchisini $\{1,\dots,n\} \setminus I = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}\}$ deb belgilaymiz. Har bir I uchun quyidagi akslantirish aniqlanadi.

$$\chi_I : \mathbb{R}^{k\times(n-k)} \longrightarrow Gr(k,n),$$

$$chi_I(A) = Span\Big(e_{i_u} + \sum_{v=1}^{n-k} a_{uv} e_{j_v} : \ 1 \leq u \leq k\Big)$$

$$A = (a_{uv}) \ 1 \leq u \leq k, \ 1 \leq v \leq n-k$$

(a) χ_I injektiv; **(b)** $U_I := \chi_I(\mathbb{R}^{k\times(n-k)})$ va $\varphi_I := \chi_I^{-1} : U_I \to \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ orqali $\mathcal{A} = \{(U_I,\varphi_I) : I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}\}$ $Gr(k,n)$ ga silliq $k(n-k)$-o'lchamli atlas beradi; **(c)** $Gr(k,n)$ va $Gr(n-k,n)$ diffeomorfdir.

Izoh. Bu yerda $\chi_I(A)$ matritsa A ga mos keluvchi k-o'lchamli qism fazoni beradi; e_{i_u} va e_{j_v} — standart bazis vektorlari, Span esa ular hosil qiladigan chiziqli fazoni bildiradi. Ushbu kartalar $Gr(k,n)$ uchun lokal koordinatalarni tashkil qiladi, ya'ni Grassmann ko'pxilligini silliq ko'rinishda tasvirlaydi.

Misol 1. $Gr(1,3)$ — bu $\mathbb{R}^3$ ichidagi 1-o'lchamli qism fazolar fazosi, ya'ni chiziqlar. Har bir chiziq koordinatalar boshidan o'tadi. Uni vektor (x,y,z) orqali ifodalash mumkin, lekin (x,y,z) va $\lambda(x,y,z)$ $(\lambda \neq 0)$ bir xil chiziqni beradi. Shuning uchun

$$Gr(1,3) \simeq \mathbb{RP}^2,$$

ya'ni haqiqiy proyektiv tekislik. Bu silliq 2-o'lchamli ko'pxillikdir.

Misol 2. $Gr(2,3)$ — bu $\mathbb{R}^3$ ichidagi 2-o'lchamli qism fazolar fazosi, ya'ni tekisliklar. Har bir tekislik koordinatalar boshidan o'tadi va uni normal vektor (a,b,c) orqali ifodalash mumkin. Lekin (a,b,c) va $\lambda(a,b,c)$ $(\lambda \neq 0)$ bir xil tekislikni beradi. Demak

$$Gr(2,3) \simeq \mathbb{RP}^2.$$

Shunday qilib, c xossaga ko‘ra misolimizdagi $Gr(1,3)$ va $Gr(2,3)$ diffeomorfdir.

Adabiyotlar

1. Ioan Marcu. Manifolds. Lecture Notes - Fall 2017.

Hopf qatlamlanishi

Ochilov D.T.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
ochilovdavid1@gmail.com

XX asr boshlarida matematik Heinz Hopf tomonidan kashf etilgan Hopf qatlamlanishi topologiyada muhim natijalardan biridir. U uch o‘lchamli sfera S^3 ni ikki o‘lchamli sfera S^2 ustidagi qatlamlanishi sifatida ko‘rsatadi va har bir nuqtaning ustiga aylana S^2 tushishini ta’minlaydi.

Hopf qatlamlanishini tushunishda kvaternionlar muhim vosita hisoblanadi. Ularni XIX asrda irland matematigi Uilyam Rouan Hamilton ixtiro qilgan. Hamilton kompleks sonlar yordamida tekislikdagi burishlarni ifodalash mumkinligini bilgan va shu g‘oyani uch o‘lchovli fazoga kengaytirishni izlagan. 1843-yilda u kvaternionlar algebrasini yaratdi: bu algebra to‘rtlik sonlar $(a + bi + cj + dk)$ orqali uch o‘lchovli fazoda burishlarni tasvirlash imkonini berdi.

Рис. 1: *
Heinz Hopf

Kvaternionlar to‘plami H to‘rt o‘lchovli sonlardan iborat:

$$q = a+bi+cj+dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \qquad [6, 15].$$

Bu yerda a-haqiqiy qism, $bi + cj + dk$ esa mavhum qismdir. Kvaternionlarning birliklari i, j, k quyidagi aloqalarga ega:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

lekin ular kommutativ emas:

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Kvaternionlar assotsiativ:

$$p(qr) = (pq)r, \quad \forall p, q, r \in H.$$

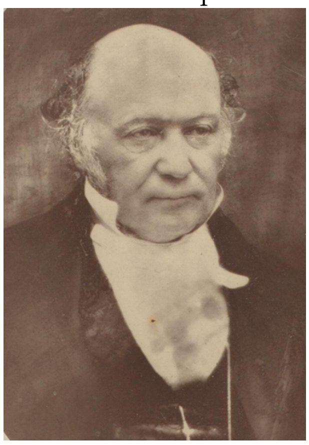

Рис. 2: *
Uilyam Rouan Hamilton

Kvarternionning qo‘shmasi va normasi:

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk, \quad \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \qquad [6, 22]$$

ko‘rinishda topiladi. Agar $\|q\| = 1$ bo‘lsa, q birlik kvaternion bo‘lib, uch o‘lchamli burishlarni ifodalaydi.

Uch o‘lchamli vektor $p = (x, y, z)$ ni sof kvaternion sifatida yozamiz:

$$p = xi + yj + zk.$$

Aylanish kvaternioni r yordamida yangi nuqta:

$$p' = rpr^{-1} \qquad [4], [6].$$

Hopf akslantirishi $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ da birlik kvarternion $r = a + bi + cj + dk$ yordamida quyidagicha beriladi:

$$h(r) = rir^{-1}, \quad i = (0, 1, 0, 0) \in H.$$

Har bir nuqtaning oldingi proobrazi

$$S^2$$

aylanaga teng:

$$h^{-1}(P) \cong S^1. \qquad [2], [5]$$

Stereografik proyeksiya yordamida $S^3\mathbb{R}^3$ ga tushirilganda, tolalar bo‘g‘langan aylanalar ko‘rinishida chiqadi. Har ikkita tola Hopf bog‘lamini hosil qiladi, bu topologik va geometrik jihatdan qiziqarli tuzilish beradi. Hopf qatlamlanishi- S^3 sferani S^2 sfera va S^1 sfera obyektlari orqali tushuntiruvchi konstruktsiya bo‘lib, kvaternionlar bilan chambarchas bog‘liq.Hopf qatlamlanishini kvaternionlar yordamida ko‘rib chiqish bizga uch o‘lchovli fazodagi burishlarning algebraik asosini yanada ravshanlashtirdi. Stereografik proyeksiyalar yordamida esa ushbu qatlamlanishning geometrik tasviri, ya’ni bir-birini kesmaydigan va uzluksiz bog‘langan aylana qatlamlari aniq tasavvur qilinadi. Shunday qilib, Hopf qatlamlanishi algebra va geometriyaning chuqur uyg‘unlashuvini namoyon etuvchi noyob hodisa sifatida qaraladi.

ADABIYOTLAR

1..Lyons, D. *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration.* Math. Magazine, 2003.

2. Heinz Hopf. *Ьber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphдre auf die Kugelflдche.* Math. Ann. 104, 1931.

3. J. Stillwell. *Geometry of Surfaces.* Springer, 1992.

4. J.H. Conway, D.A. Smith. *On Quaternions and Octonions.* A.K. Peters, 2003.

5. Niles Johnson. *Hopf Fibrations.* nilesjohnson.net/hopf.html

6. W.R. Hamilton. *Lectures on Quaternions.* Dublin, 1853

7. Wikipedia maqolalari: *Hopf fibration, Quaternion, Stereographic projection.*

On the geometry of integrable Hamiltonian systems

Parmonov H.F.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
hparmonov93@mail.ru

Let M be a smooth Riemannian manifold of dimension n with the Riemannian metric g, ∇ - the Levi-Civita connection, $< \cdot, \cdot >$ - inner product defined by the Riemannian metric g.

We denote by $V(M)$ the set of all smooth vector fields defined on M, through $[X, Y]$ Lie bracket of vector fields $X, Y \in V(M)$. The set $V(M)$ is a Lie algebra with Lie bracket.

Let’s consider some set $D \subset V(M)$, which contains finite or infinite number of smooth vector fields. For a point $x \in M$ through $t \to X^t(x)$ we will denote the integral curve of a vector field X passing through a point x at $t = 0$. Map $t \to X^t(x)$ is defined in some domain $I(x) \subset R$, which generally depends on field X and point x.

Definition 1. The orbit $L(x)$ of a system D of vector fields through a point x is the set of points y in M such that there exist $t_1, t_2, ..., t_k \epsilon R$ and vector fields $X_1, X_2, ..., X_k \epsilon D$ such that

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_k-1}(...(X_1^{t_1}(x)))),$$

where k is an arbitrary positive integer.

Let us recall a notion of Hamiltonian vector field. In order to define notion of Hamiltonian vector field we need to define Poisson bracket of functions.

Definition 2. A *Poisson bracket* on a smooth manifold M is an operation that assigns a smooth real-valued function $\{F,H\}$ on M to each pair F,H of smooth, real-valued functions, with the basic properties: (a)*Bilineality:*

$$\{\lambda F+\mu P,H\}=\lambda\{F,H\}+\mu\{P,H\},$$

$$\{F,\lambda H+\mu P\}=\lambda\{F,H\}+\mu\{F,P\},\ \lambda,\ \mu\ \in\mathbb{R};$$

(b)*Skew-Symmetry:*

$$\{F,H\}=-\{H,F\};$$

(c)*Jacobi Identity:*

$$\{\{F,H\},P\}+\{\{P,F\},H\}+\{\{H,P\},F\}=0;$$

(c)*Leibniz' Rule:*

$$\{F,H\cdot P\}=\{F,H\}\cdot P+H\cdot\{F,P\}.$$

Let M be the Euclidean space R^m, with coordinates

$$(p,q,z)=(p^1,...,p^n,q^1,...,q^n,z^1,...,z^l),$$

where $m=2n+l$.

Definition 3. Let M be a Poisson manifold and $H:M\to R$ a smooth function. The *Hamiltonian vector field* associated with H is the unique smooth vector field $sgradH$ on M satisfying

$$sgradH(F)=\{F,H\}=-\{H,F\}$$

for every smooth function $F:M\to R$.

The equations governing the flow of $sgradH$ are referred to as *Hamilton's equations* for the *Hamiltonian function H*.

In the case of the canonical Poisson bracket on R^m $(m=2n+l)$, the Hamiltonian vector field to any $H(p,q,z)$, as clearly, corresponds

$$sgradH=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$$

The corresponding flow is obtained by integrating the system of ordinary differential equations

$$\frac{dp^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i},\ \ \frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p^i},\ \ i=1,...,n,$$

$$\frac{dz^l}{dt}=0,\ \ l=1,...,l.$$

There is a fundamental connection between the Poisson bracket of two functions and the Lie bracket of their associated *Hamiltonian vector fields*, which forms the basis of much of the theory of Hamiltonian systems. It is well known following theorem [1]:

Definition 4. *Let M be a Poisson manifold and $\{F,H\}:M\to R$ are smooth functions with corresponding Hamiltonian vector fields $sgradF$, $sgradH$. The Hamiltonian vector field associated with the Poisson bracket of F and H is, up to sign, the Lie bracket of the two Hamiltonian vector fields:*

$$sgrad\{F,H\}=[sgradH,sgardF].$$

Let us consider functions $H_1, H_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ on the Euclidean four dimensional space $\mathbb{R}^4$ with cartezian coordinates p_1, p_2, q_1, q_2 which are given by the formulas

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 + q_2^2).$$

The Hamiltonian vector fields corresponding to H_1 and H_2 have following forms:

$$sgradH_1 = -q_1\frac{\partial}{\partial p^1} - q_2\frac{\partial}{\partial p^2} + p_1\frac{\partial}{\partial q^1} + p_2\frac{\partial}{\partial q^2},$$

$$sgradH_2 = q_1\frac{\partial}{\partial p^1} - q_2\frac{\partial}{\partial p^2} + p_1\frac{\partial}{\partial q^1} + p_2\frac{\partial}{\partial q^2}. \tag{1}$$

Theorem 1. The orbits of vector fields (1) generate singular foliation regular leaf of which is three dimensional surface with zero Gauss curvature.

LITERATURE

1. P. Olver. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer. (1993).
2. V. Fomenko. Some properties of two-dimensional surfaces with zero normal torsion in E^4, Sb. Math., 35,(2), 251–265 (1979).
3. Yu. A. Aminov, M. G. Szajewska. Gaussian torsion of a 2-dimensional surface defined implicitly in 4-dimensional Euclidean space, Sb. Math., 195:11, 1545–1556, (2004).

The Connection between Center-Valued Quasitraces on Real and Complex $AW*-$Algebras

Rakhmonova N. V.
Kokand University, Kokand, Uzbekistan; Andijan State University, Andijan, Uzbekistan;
rahmonovanilufar406@gmail.com

A *W*-algebra* is a weakly closed *-subalgebra of the algebra of all bounded linear operators *B(H)* on a complex Hilbert space H, containing the identity operator. A *real W*-algebra* is a weakly closed *-subalgebra R with the identity operator, satisfying the condition $R \cap iR = \{0\}$. A *C*-algebra* is a Banach *-algebra over the complex numbers, in which the norm satisfies the equality $\|aa^*\| = \|a\|^2$ for all elements a. A *real C*-algebra* is a Banach *-algebra over the reals, where $\|xx^*\| = \|x\|^2$, and the element formed by adding the identity operator to the square of any element x is invertible. *Baer *-rings* are *-rings in which the right annihilator of any subset can be expressed as a principal right ideal generated by a projection. (Real) C*-algebras with a Baer *-ring are called *(real) AW*-algebras* (for more details see [1]). Every W*-algebra is an AW*-algebra, but not all AW*-algebras can be represented as W*-algebras. *Factors* are W*- or AW*-algebras with a trivial center and are classified into types I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, and III (see [2]). Any W*- or AW*-algebra can be uniquely decomposed along its center into these factors. For every element in an AW*-algebra, the right and left support projections exist, and they describe annihilation properties. Spectral projections for self-adjoint elements correspond to intervals such as (λ, ∞) and play a fundamental role in describing spectral properties within the algebra (see [Remark 1.5] in [2]).

Definition 1.[1] Let A be a unital C*-algebra. A *quasitrace* τ on A is a function $\tau : A \to \mathbb{C}$ that satisfies:

(i) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$, for $x \in A$;

(ii) $\tau(a+ib) = \tau(a) + i\tau(b)$, for $a, b \in A_h$, where $A_h = \{a = a^*, a \in A\}$;

(iii) τ is linear on any abelian C*-subalgebra B_c of A.

Furthermore, τ is called a n-quasitrace ($n \geq 2$) if there exists a 1-quasitrace τ_n on $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ such that

(iv) $\tau(x) = \tau_n(x \otimes e_{11}), \quad x \in A,$

We present the definition of quasitrace in the complex case given above in Real case. This is one of the main definitions of our article.

Definition 2. Let R be a unital real C*-algebra. A quasitrace τ on R is a function $\tau : R \to \mathbb{R}$ that satisfies:

(i′) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$, for $x \in R$;

(ii′) $\tau(a+b) = \tau(a)$, for $a \in R_h$, $b \in R_k$, where $R_k = \{b = -b^*, b \in R\}$;

(iii′) τ is linear on any abelian C*-subalgebra B of R.

The center $\mathcal{Z}(R)$ of a real AW* algebra R is the set of elements in R that commute with all other elements of R. Formally, it is defined as:

$$\mathcal{Z}(R) = \{a \in R \mid ab = ba \text{ for all } b \in R\}.$$

In other words, $a \in \mathcal{Z}(R)$ if a commutes with every element B in R.

Definition 3 Let N be a unital complex (or real) C^*-algebra and $\mathcal{Z}(R)$ is the center of R. A center-valued quasitrace is the map $T : R \to \mathcal{Z}(R)$ that satisfies:

(a) $T(x^*x) = T(xx^*) \geq 0$;

(b) $T(a+b) = T(a)$, for $a \in R_h$ and $b \in R_k$;

(c) T is linear on commutative real C*-subalgebras of R;

Theorem 1. Let R be a unital real $AW*-$algebra, and let $A = R + iR$ be its enveloping $AW*-$algebra. If $\overline{T}$ is a center-valued quasitrace on A, then the map $T : R \to \mathcal{Z}(R)$ defined by

$$T(a+b) = \overline{T}(a), \quad \text{where } a \in R_h,\, b \in R_k$$

is a center-valued quasitrace on R.

Theorem 2. If T is a center-valued quasitrace on R, then the map $\overline{T} : A \to \mathcal{Z}(A)$ defined by

$$\overline{T}(x+iy) = T(x) + iT(y), \quad \text{where } x, y \in R,$$

is a center-valued quasitrace on A.

LITERATURE

1. B. Blackadar and Handelman D. Dimension functions and traces on C*-algebra. J. Funct. Anal. 45, 297–340 (1982)

2. Fehlker F. Quasitrace abd AW*-bundles. Monster, 20–25 (2018)

3. Ayupov Sh. A. Real AW*-algebras of type I. Funct. Anal. Appl. 38(3), 302–304 (2004)

4. Kim D.I., Rakhimov A.A. Quasitraces on real C*- and AW*-algebras. Uzbek Mathematical Journal. 69(3), 121–125 (2025). DOI: 10.29229/uzmj.2025-3-12

5. Rakhimov A.A. Rakhmonova N. V. The center-valued quasitraces on AW*-algebras. AIP Conf. Proc. 3244, 020036 (2024) https://doi.org/10.1063/5.0241470

KILLING VECTOR FIELDS ON SPHERE AND THEIR ORBITS

Saitova S.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
sayorass1985@gmail.com

In this paper we investigate Killing vector fields on spheres in Euc-lidian spaces. And, our vector fields on the sphere are the rotations with the center coincident with the origin (center of the sphere). All objects, manifolds, mappings and vector fields are supposed to be smooth.

Definition 1. A vector field X on the Riemannian manifold (M, g) is called a Killing vector field, if the infinitesimal transformations $\rightarrow X^t(x)$, generated by the vector field $X$are isometries.

Here $X^t(x)$ denotes the point on the integral curve of the given vector field corresponding to the parameter t.

Or, equivalently $L_X g = 0$, where L_X - Lie derivative on (M, g).

The set of all Killing vector fields on a manifold (M, g) is known to be closed under the Lie bracket of two Killing fields, and a linear combination of Killing vector fields over the field of real numbers is also a Killing vector field. Therefore, the set of all Killing vector fields on the manifold (M, g) denoted as $K(M)$, forms a Lie algebra over the field of real numbers. Furthermore, it is known that the Lie algebra of Killing vector fields on a connected Riemannian manifold (M, g) has a dimension no greater than $\frac{1}{2}n(n+1)$, where n-is the dimension of (M, g).

For a Killing vector field X, and λ -real number, the vector field $Y = \lambda X$ is also a Killing vector field, as the integral curves of the vector fields coincide as sets, only differing in their traversal speed. In this case, it is easy to verify $[X, Y] = 0$ for Lie brackets of those pair of Killing vector fields.

Frequently, in mathematical physics models, the problem of finding Killing vectors for a given metric on a manifold are investigated. Each Killing vector field is associated with a one-parameter group of transfor-mations, which in this case preserves the metric.

Let us consider three dimensional sphere in the 4-dimensional Euc-lidian space $S^3 \subset R^4$ given as $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$; where x, y, z, w ?Cartesian coordinates in R^4. On the sphere S^3, Killing vector fields X, Y are given:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w},\ Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

Lie bracket $[X, Y]$ of vector fields X, Y is:

$$[X, Y] = -w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}$$

Hence such Killing vector fields are not commuting, and more than fields X, Y, $[X, Y]$ are belongs to the minimal subalgebra $A(D)$, contains given vector fields.

In the point $p(1,\ 0,\ 0,\ 0) \in S^3$ vectors $X(p)\,,\ Y(p)\,,\ [X,\ Y](p)$ are linearly independent, i.e. the subspace $A_p(D) = \{\, X(p) : \ X \in A(D)\}$ has dimension three. And the orbit $L(p)$ has dimension three too. According to Theorem 1 ([3]) the orbit $L(p)$ is a closed subset. On the other hand, due to the theorems from ([4]) as the orbit has maximal dimension, $L(p)$ is an open subset of S^3. Though, orbit coincides with S^3.

The properties of the rotations on the sphere and the method of calculations are useful for investigation the controllability via two Killing vector fields on the Sphere . So we may constructs the following vector fields a their orbit coincides the given Sphere:

Theorem. The orbit of the family $D = \{X, Y\}$, where $X = \{-x_2, x_1, -x_4, x_3, ...\}$ and $Y = \{0, -x_3, x_2, -x_5, x_4, ...\}$ are the Killing vector fields on the Sphere is whole Sphere.

LITERATURE

1. Lobry, Controllability of nonlinear control dynamical systems, Control Theory Topol. Funct. Anal., 1, 361–383 (1976).
2. Ya. Narmanov and O. Kosimov, On the geometry of Riemannian foliations of low-dimensional spheres, Rep. Uzbek. Acad. Sci., No. 2, 96–105 (2013).
3. Ya. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of orbits of Killing vector fields, Differ. Equ., 50, No. 12, 1582–1589 (2014).
4. Ya. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of the reachable set of vector fields, Differ. Equ., 53, No. 3, 321–326 (2017).
5. A. Narmanov, S. Sayyora, On Geometry of Vector Fields Journal of Mathematical Sciences vol 245, DO - 10.1007/s10958-020-04699, 2020/03/01

The minimal solvable extension of naturally graded filiform 3-lie algebras

Toxtabayeva A.U.
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
oyjamoltoxtaboyeva@gmail.com

Definition 1. A vector space A over a field $\mathbb{F}$ is called a 3-Lie algebra if there exists a ternary multilinear operation $[-,-,-]$ satisfying the following identities:

$$[x_1, x_2, x_3] = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}],$$

$$[[x_1, x_2, x_3], y_2, y_3] = [[x_1, y_2, y_3], x_2, x_3] + [x_1, [x_2, y_2, y_3], x_3]$$
$$+[x_1, x_2, [x_3, y_2, y_3]],$$

where $\sigma \in S_3$, and $\mathrm{sign}(\sigma)$ denotes the parity of the permutation σ.

Definition 2. A subspace B of a 3-Lie algebra A is called a *subalgebra* if $[B, B, B] \subseteq B$. A subspace I of a 3-Lie algebra A is called an *ideal* if $[I, A, A] \subseteq I$. For any ideal I of a 3-Lie algebra A, we define the lower central and derived series as follows:

$$I^1 = I,\ I^{k+1} = [I^k, I, A],\ k \geq 1,\ I^{(1)} = I,\ I^{(s+1)} = [I^{(s)}, I^{(s)}, A],\ s \geq 1,$$

respectively.

Definition 3. A 3-Lie algebra A is called *solvable* (respectively, *nilpotent*) if $A^{(r)} = 0$ (respectively, $A^r = 0$) for some $r \in \mathbb{N}$.

Definition 4. A linear map $D : A \to A$ is called a *derivation* of the 3-Lie algebra A if for all $x_1, x_2, x_3 \in A$ the condition holds:

$$D([x_1, x_2, x_3]) = [D(x_1), x_2, x_3] + [x_1, D(x_2), x_3] + [x_1, x_2, D(x_3)].$$

The set of all derivations of A is denoted by $Der(A)$ and forms a subalgebra of the Lie algebra $gl(A)$, called the *derivation algebra* of A.

Definition 5. The mapping $ad(x_1, x_2) : A \to A$ defined by

$$ad(x_1, x_2)(y) = [y, x_1, x_2], \quad \forall y \in A,$$

is called the *right multiplication.* It is easy to check that $ad(x_1, x_2)$ is a derivation of the 3-Lie algebra. The set of all finite linear combinations of right multiplications forms an ideal of $Der(A)$ and is denoted by $ad(A)$. Elements of $ad(A)$ are called *inner derivations.* Moreover, for all $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$, the following identity holds:

$$[ad(x_1, x_2), ad(y_1, y_2)] = ad([x_1, x_2, y_1], y_2) + ad(y_1, [x_1, x_2, y_2]).$$

Definition 6. A 3-Lie algebra A of dimension m is called *filiform* if

$$\dim A^i = m - (2 + i), \quad i \geq 1.$$

Consider the m-dimensional 3-Lie algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ with the following multiplication table:

$$\mathcal{NGF}_{m,3} : [e_1, e_2, e_j] = e_{j+1}, \quad 3 \leq j \leq m - 1,$$

where $\{e_1, \dots, e_m\}$ is a basis of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ [1].

Proposition 1. An arbitrary derivation of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ has the following form:

$$D(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} e_k, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

$$D(e_j) = ((j - 3)(a_{1,1} + a_{2,2}) + a_{3,3})e_j + \sum_{t=j+1}^{m} a_{3,t-j+3} e_t, \quad 3 \leq j \leq m.$$

Definition 7. [2] Let I be an ideal of a 3-Lie algebra A. If I is a nilpotent subalgebra but not a nilpotent ideal, then I is called a *hypo-nilpotent ideal* of A. If I is not a proper subset of any other hypo-nilpotent ideal, then I is called a *maximal hypo-nilpotent ideal* of A.

Next, we consider a solvable 3-Lie algebra whose maximal hypo-nilpotent ideal is the filiform 3-Lie algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$. Let R be a solvable 3-Lie algebra with maximal hypo-nilpotent ideal $\mathcal{NGF}_{m,3}$. Then the vector space R can be represented as the direct sum of the subspace $\mathcal{NGF}_{m,3}$ and a complementary subspace Q.

Consider the basis $\{x, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ in R, where $Span\{x\} = Q$. For any element $z \in Q$, the operator

$$ad(z, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_3), \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$$

is a derivation of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$.

Theorem 1. Let R be an $(m + 1)$-dimensional solvable 3-Lie algebra with a maximal hypo-nilpotent ideal $\mathcal{NGF}_{m,3}$ Then there is a basis $\{x, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ of R such that R has the products

$$\begin{cases} [e_1, e_2, e_j] = e_{j+1}, & 3 \leq j \leq m - 1, \\ [x, e_1, e_2] = a_{2,1}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{2,3}e_3, & \\ [x, e_1, e_i] = \big((i - 3)a_{2,2} + a_{3,3}\big)e_i + \sum\limits_{t=i+2}^{m} a_{3,t-i+3} e_t, & 3 \leq i \leq m, \\ [x, e_2, e_i] = \big((3 - i)a_{2,1} + b_{3,3}\big)e_i + \sum\limits_{t=i+2}^{m} b_{3,t-i+3} e_t, & 3 \leq i \leq m, \end{cases}$$

(where, $a_{k,i} \in \mathbb{C}$ and $b_{k,i} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq 3$, $3 \leq i \leq m$ are the parameters)

and the remaining products of the basis elements are zero.

LITERATURE

1. Abdurassulov K.K., Gaibullaev R.K., Omirov B.A., Khudayberdiev A.Kh. The maximal solvable extension of naturally graded n-Lie filiform algebras, Siberian Mathematical Journal, 2022, Vol. 63, No. 1, pp. 3–22.
2. Bai R., Shen C., Zhang Y. Solvable 3-Lie algebras with a maximal hypo-nilpotent ideal N, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 21, 2010, pp. 43–62.

On topological measures on classes of subspaces of inner product space

Sukharev V.I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Tatarstan, Russia;
v.sukharev8@gmail.com

We study topological measures on classes of subspaces in inner product (pre-Hilbert) spaces. A criterion for existence of topological sum of countable family of pairwise orthogonal splitting subspaces in splitting subspaces class of inner product space is presented.

The topological measure concept arises from that orthomodular measures on classes of subspaces may be defined only in trivial way in non-complete pre-Hilbert spaces (see [1, 2, 3, 4, 5] for subspaces classes of pre-Hilbert space, orthomodular measures and completeness criteria). So additive mappings on these classes of subspaces may be interesting. Such mappings (called topological measures) were introduced by A. Sherstnev and E. Turilova. A way to obtain topological measures using measures on orthoprojections is presented in [8]. Some properties of topological measures are studied in [6]. In the process of topological measures construction a new type of addivity in classes of subspaces occurs. This is the matter of the research. The results obtained are partially published in [7].

Let S be a pre-Hilbert space. For a subspace A we shall denote by $A^{\perp}$ its orthogonal complement in S so that

$$A^{\perp} = \{s \in S \mid \langle s, a\rangle = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

A subspace A is *splitting* if $S = A \oplus A^{\perp}$ and we write $E(S)$ to denote the class of all splitting subspaces of S. Class $C(S)$ consists of all subspaces such that they or their orthogonal complement is complete inner product space. Let us have a family of pairwise orthogonal subspaces $\{A_i\} \subseteq E(S)$. All of these subspaces are splitting, so each of them gives the unique *decomposition* of arbitrary element $s \in S$ into the sum $s_i + \tilde{s_i}$, where $s_i \in A_i, \tilde{s_i} \in A_i^{\perp}$. We need to define *topological sums* in order to introduce the topological measures.

Definition: *For given subspaces* $\{A_i\}_{i\in I}$ *we call subspace* $cl\left(span\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right)$ *a* ***topological sum*** *of these subspaces and write* $\boxplus_{i\in I} A_i$ *for it.*

Definition: *Let* $K(S)$ *be a class of subspaces of* S *(possibly different from* $E(S)$*).* ***Topological measure*** *is a mapping* $\mu : K(S) \to \mathbb{R}$ *such that for any family of pairwise orthogonal subspaces* $\{A_i\}_{i\in I}$

$$\mu\left(\boxplus_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i),$$

if the topological sum $\boxplus_{i\in I} A_i$ *exists in* $K(S)$*.*

Therefore, it is important to study conditions under which topological sum of splitting subspaces appears in classes of subspaces.

Theorem. *Topological sum of pairwise orthogonal splitting subspaces* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq E(S)$ *lies in* $E(S)$ *if and only if* $\forall s \in S$ *series* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i$ *with* s_i *as the elements of the decompositions* $s = s_i + \tilde{s}_i$ *by subspaces* A_i*, respectively, converges in* S.

Corollary. *If topological sum of pairwise orthogonal splitting subspaces* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C(S)$ *lies in* $C(S)$*, then* $\forall s \in S$ *series* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i$ *with* s_i *as the elements of the decompositions* $s = s_i + \tilde{s}_i$ *by subspaces* A_i*, respectively, converges in* S.

This may be helpful in constructing topological measures on classes $E(S)$ and $C(S)$. For example, it shows that for $K \in \{C, E\}$ mapping

$$\mu : K(S) \to \mathbb{R},\ \mu(A) = \langle pr_A f, pr_A f\rangle = \|pr_A f\|^2$$

is a properly defined σ-additive topological measure on $K(S)$.

This work was performed under the development programme of the Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2025-1725/1).

LITERATURE

1. Dvurecenskij, A. Regular measures and inner product spaces, Int. J. Theor. Phys. 1992. Vol. 31, No. 5. P. 889–905.
2. Engesser K., Gabbay D.M., Lehmann D. Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, Elsevier B. V., 2007.
3. Hamhalter, J., Ptak P. A completeness criterion for inner product spaces, Bull. London Math. Soc. 1987. Vol. 19. P. 259–263.
4. Hamhalter J., Quantum Measure Theory, Springer Netherlands, 2003.
5. Sherstnev A.N., Turilova E.A. Classes of Subspaces Affiliated with a von Neumann Algebra, Russian J. of Math. Physics. 1999. Vol. 6, No. 4. P. 426–434.
6. Sukharev V.I., Turilova E.A., Properties of Topological Measures on Classes of Subspaces of an Inner Product Space, Proc. Steklov Inst. Math. 2021. Vol. 313. P. 228–235.
7. A Criterion for Topological Sum Existence in Class of Splitting Subspaces of Inner Product Spaces, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, No. 7. P. 2942–2947.
8. Turilova E. Measures on classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra, Int. J. Theor. Phys. 2009. Vol. 48, No. 11. P. 3083–3091.

The minimal solvable extension of naturally graded filiform 3-lie algebras

Toxtabayeva A.U.

National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
oyjamoltoxtaboyeva@gmail.com

Definition 1. A vector space A over a field $\mathbb{F}$ is called a 3-Lie algebra if there exists a ternary multilinear operation $[-,-,-]$ satisfying the following identities:

$$[x_1, x_2, x_3] = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}],$$

$$[[x_1, x_2, x_3], y_2, y_3] = [[x_1, y_2, y_3], x_2, x_3] + [x_1, [x_2, y_2, y_3], x_3]$$
$$+[x_1, x_2, [x_3, y_2, y_3]],$$

where $\sigma \in S_3$, and $\mathrm{sign}(\sigma)$ denotes the parity of the permutation σ.

Definition 2. A subspace B of a 3-Lie algebra A is called a *subalgebra* if $[B,B,B] \subseteq B$. A subspace I of a 3-Lie algebra A is called an *ideal* if $[I,A,A] \subseteq I$. For any ideal I of a 3-Lie algebra A, we define the lower central and derived series as follows:

$$I^1 = I,\ I^{k+1} = [I^k, I, A],\ k \geq 1,\ I^{(1)} = I,\ I^{(s+1)} = [I^{(s)}, I^{(s)}, A],\ s \geq 1,$$

respectively.

Definition 3. A 3-Lie algebra A is called *solvable* (respectively, *nilpotent*) if $A^{(r)} = 0$ (respectively, $A^r = 0$) for some $r \in \mathbb{N}$.

Definition 4. A linear map $D : A \to A$ is called a *derivation* of the 3-Lie algebra A if for all $x_1, x_2, x_3 \in A$ the condition holds:

$$D([x_1,x_2,x_3]) = [D(x_1),x_2,x_3] + [x_1,D(x_2),x_3] + [x_1,x_2,D(x_3)].$$

The set of all derivations of A is denoted by $Der(A)$ and forms a subalgebra of the Lie algebra $gl(A)$, called the *derivation algebra* of A.

Definition 5. The mapping $ad(x_1,x_2) : A \to A$ defined by

$$ad(x_1,x_2)(y) = [y,x_1,x_2], \quad \forall y \in A,$$

is called the *right multiplication*. It is easy to check that $ad(x_1,x_2)$ is a derivation of the 3-Lie algebra. The set of all finite linear combinations of right multiplications forms an ideal of $Der(A)$ and is denoted by $ad(A)$. Elements of $ad(A)$ are called *inner derivations*. Moreover, for all $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$, the following identity holds:

$$[ad(x_1,x_2), ad(y_1,y_2)] = ad([x_1,x_2,y_1],y_2) + ad(y_1,[x_1,x_2,y_2]).$$

Definition 6. A 3-Lie algebra A of dimension m is called *filiform* if

$$\dim A^i = m - (2+i), \quad i \geq 1.$$

Consider the m-dimensional 3-Lie algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ with the following multiplication table:

$$\mathcal{NGF}_{m,3} : [e_1,e_2,e_j] = e_{j+1}, \quad 3 \leq j \leq m-1,$$

where $\{e_1,\ldots,e_m\}$ is a basis of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ [1].

Proposition 1. An arbitrary derivation of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$ has the following form:

$$D(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}e_k, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

$$D(e_j) = ((j-3)(a_{1,1}+a_{2,2}) + a_{3,3})e_j + \sum_{t=j+1}^{m} a_{3,t-j+3}e_t, \quad 3 \leq j \leq m.$$

Definition 7. [2] Let I be an ideal of a 3-Lie algebra A. If I is a nilpotent subalgebra but not a nilpotent ideal, then I is called a *hypo-nilpotent ideal* of A. If I is not a proper subset of any other hypo-nilpotent ideal, then I is called a *maximal hypo-nilpotent ideal* of A.

Next, we consider a solvable 3-Lie algebra whose maximal hypo-nilpotent ideal is the filiform 3-Lie algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$. Let R be a solvable 3-Lie algebra with maximal hypo-nilpotent ideal $\mathcal{NGF}_{m,3}$. Then the vector space R can be represented as the direct sum of the subspace $\mathcal{NGF}_{m,3}$ and a complementary subspace Q.

Consider the basis $\{x, e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ in R, where $Span\{x\} = Q$. For any element $z \in Q$, the operator

$$ad(z, e_1, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, \widehat{e}_j, \ldots, e_3), \quad 1 \le i \ne j \le 3$$

is a derivation of the algebra $\mathcal{NGF}_{m,3}$.

Theorem 1. Let R be an $(m+1)$-dimensional solvable 3-Lie algebra with a maximal hypo-nilpotent ideal $\mathcal{NGF}_{m,3}$ Then there is a basis $\{x, e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ of R such that R has the products

$$\begin{cases} [e_1, e_2, e_j] = e_{j+1}, & 3 \le j \le m-1, \\ [x, e_1, e_2] = a_{2,1}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{2,3}e_3, & \\ [x, e_1, e_i] = \big((i-3)a_{2,2} + a_{3,3}\big)e_i + \sum\limits_{t=i+2}^{m} a_{3,t-i+3}e_t, & 3 \le i \le m, \\ [x, e_2, e_i] = \big((3-i)a_{2,1} + b_{3,3}\big)e_i + \sum\limits_{t=i+2}^{m} b_{3,t-i+3}e_t, & 3 \le i \le m, \end{cases}$$

(where, $a_{k,i} \in \mathbb{C}$ and $b_{k,i} \in \mathbb{C}$, $1 \le k \le 3$, $3 \le i \le m$ are the parameters)

and the remaining products of the basis elements are zero.

LITERATURE

1. Abdurassulov K.K., Gaibullaev R.K., Omirov B.A., Khudayberdiev A.Kh. The maximal solvable extension of naturally graded n-Lie filiform algebras, Siberian Mathematical Journal, 2022, Vol. 63, No. 1, pp. 3–22.
2. Bai R., Shen C., Zhang Y. Solvable 3-Lie algebras with a maximal hypo-nilpotent ideal N, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 21, 2010, pp. 43–62.

Qism ko‘pxillik egriligi haqida

Tursunov B.A.[1], **Buronova S.A.**[2], **Xoliqova T.T**[3]

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, Qarshi, O‘zbekiston;
t.bayramali@yandex.ru, saxidaboronova@gmail.com, tansiqxoliqova@gmail.com

Tekislikdagi yoki fazodagi chiziqlarning invariantlari ya’ni normali, binormali, egriligi, buralishi, Frene formulalari bular chiziqning fazoda joylashishiga va uning formasiga bog‘liq, ya’ni bular tashqi geometriya tushunchalaridir. Chiziqda hech qanday ichki metrik invariantlar mavjud emas.

Sirtda esa bunday emas, masalan, sirtda yoki uning bo‘lagida berilgan chiziq yoyi uzunligi formulasi evklid tekisligidagi dekart koordinatalar sistemasida berilgan chiziq yoyi uzinligi formulasi bilan bir xil emas. Shunday ekan sirt nima va u qanday usullarda beriladi?

Uch o‘lchamli fazodagi sirt – bu ichki geometriyasi haqida gapirish mumkin bo‘lgan sodda geometrik abyektdir. Sirt uch usulda beriladi:

1) Soddaroq: $z = f(x, y)$ funksiya grafigi yordamida;

2) Umumiyroq: $F(x, y, z) = const$ tenglama yordamida;

3) Parametrik holatda: $r = r(u, v)$ yoki $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ bunda u, v parametrlar (u, v) tekislikdagi biror sohadan olingan.

Endi sirtning ichki geometriyasiga o‘tsak.

Bizga biror sirt va uning maxsus nuqtasi bo‘lmagan $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Sirtning P nuqtasidagi gauss egriligi sirtning ichki geometriyasi bo‘ladi, ya’ni sirtning gauss egriligi faqatgina bu sirtning ichki metrik xossasigagina bog‘liq. Biz bu egrilik tushunchasini maxsus koordinatalar sistemasida aniqlaymiz. Quyidagicha ortonormallangan koordinatalar sistemasini tanlaymiz:

Sirtning berilgan nuqtasidan normal o‘tkazib uni z o‘qi bilan belgilaylik. x va y o‘qlarni urinma bo‘ylab yo‘naltiraylik. Shunda sirt P nuqta atrofida $z = f(x, y)$ funksiya yordamida berilib $\frac{df}{dx}\big|_P = \frac{df}{dy}\Big|_P = 0$ bo‘ladi, ya’ni gradiyent vektor $\{0, 0, 1\}$ vektorga kollinear. $z = f(x, y)$ funksiya uchun ikkinchi differensialni yoki

$$2d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

ni qaraylik. Bundan $(a_{ij}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ matritsani tuzamiz va uni P nuqtada kvadratik formaning matritsasi sifatida qaraymiz, bunda $x^1 = x$, $x^2 = y$, $i, j = 1, 2$.

(a_{ij}) matritsaning xos sonlari k_1, k_2 ga sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklari, (a_{ij}) matritsa determinanti $K = k_1 \cdot k_2 = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ga sirtning gauss egriligi, (a_{ij}) matritsa izi $H = a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$ ga esa sirtning o‘rtacha egriligi deyiladi.

Masala. Parametrik tenglamasi $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ bo‘lgan sirtning $P(u = 1, v = 1)$ nuqtasidagi bosh egriliklari, gauss egriligi va o‘rtacha egriligi topilsin.

Yechim. Bu sirtning $X^2 - Y^2 - 4Z^2 = 0$ tenglama bilan berilishini, hamda $P(u = 1, v = 1) = (2, 0, 1)$ ekanini topish qiyin emas. z o‘qi yo‘nalishi P nuqtada $\vec{n} = \{1, 0, -2\}$ bo‘lishini tushunish oson. U holda $\vec{u} = \{0, 1, 0\}$ va $\vec{v} = \{2, 0, 1\}$ vektorlar sirtning P nuqtasidagi urinma tekislikka parallel bo‘lganligidan, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ ortogonal sistemani hosil qiladi. Bizga esa ortonormal sistema kerak. U holda $\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\vec{e}_3 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ dan ortonormal sistemani hosil qilamiz:

$$\vec{e}_1 = \{0, 1, 0\}, \quad \vec{e}_2 = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \quad \vec{e}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Fazoda dekart koordinatalari sistemasini burish formulasidan foydalanib, yangi $\vec{e}_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}\}$ bazisga o‘tamiz. U holda

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

almashtirish yordamida sirt tenglamasi

$$x^2 + 3z^2 - 4yz - 4\sqrt{5}z = 0$$

ko‘rinishga ega bo‘lishini topamiz. Endi (a_{ij}) matritsa elementlarini topish qoldi xolos:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2x}{6z - 4y - 4\sqrt{5}}\bigg|_{P(0,0,0)} = 0;$$

$$\frac{df}{dy} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{-4z}{6z - 4y - 4\sqrt{5}}\bigg|_{P(0,0,0)} = 0;$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{2 \cdot (6z - 4y - 4\sqrt{5}) - 2x \cdot 6\frac{df}{dx}}{(6z - 4y - 4\sqrt{5})^2}\Bigg|_{P(0,0,0)} = \frac{1}{2\sqrt{5}};$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{4 \cdot \frac{df}{dy} \cdot (6z - 4y - 4\sqrt{5}) - 4z \cdot (6\frac{df}{dy} - 4)}{(6z - 4y - 4\sqrt{5})^2}\Bigg|_{P(0,0,0)} = 0;$$

$$\frac{d^2 f}{dxdy} = -\frac{0 \cdot (6z - 4y - 4\sqrt{5}) - 2x \cdot (6\frac{df}{dy} - 4)}{(6z - 4y - 4\sqrt{5})^2}\Bigg|_{P(0,0,0)} = 0.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, sodda hisoblashlardan so'ng berilgan sirtning P nuqtasidagi bosh egriliklari $k_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ va $k_2 = 0$, gauss egriligi $K = k_1 k_2 = 0$, o'rtacha egriligi $H = k_1 + k_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ekanligini topish qiyin emas.

On the Spaces of Idempotent Probability Measures on Superparacompact Spaces

Zaitov A.A.[1], Eshtemirova Sh. Kh.[2]

[1]Tashkent University of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan;
adilbek_zaitov@mail.ru

[2]V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
shaxnoza.eshtemirova@mail.ru

In this work, we focus on the space $I_f(X)$ of finitely supported idempotent probability measures on a Tychonoff space X. We provide a description of its compactifications and establish a precise connection between the superparacompactness of X and that of $I_f(X)$.

A collection ω of subsets of a set X is said to be *star countable* (respectively, *star-finite*) if each element of ω intersects at most a countable set(respectively, finite) of elements of ω. A collection ω of subsets of a set X *refines* a collection Ω of subsets of X if for each element $A \in \omega$ there is an element $B \in \Omega$ such that $A \subset B$. They also say that ω is a *refinement* of Ω. For a point $x \in X$ and a natural number n the inequality $Kp(x, \omega) \leq n$ means that no more than n elements of ω contain x, and $Kp\,\omega \leq n$ means that $Kp(x, \omega) \leq n$ for every $x \in X$.

A finite sequence of subsets $M_0, \ldots, M_s$ of a set X is a *chain* connecting sets M_0 and M_s, if $M_{i-1} \cap M_i \neq \varnothing$ for all $i = 1, \ldots, s$. A collection ω of subsets of a set X is said to be *connected* if for any pair of sets M, $M' \subset X$ there exists a chain ω connecting the sets M and M'. The maximal connected sub-collections of ω are called *components* of ω. A star-finite open cover of a space X is said to be *a finite-component cover* if the number of elements of each component is finite.

Definition 1. A space X is said to be superparacompact if every open cover of X has a finite-component cover that refines it.

On a compact Hausdorff space X an idempotent probability measure is defined as a functional $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ that meets the following conditions:

1) $\mu(c_X) = c$ for every constant function $c_X\colon X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Here $c_X(x) = c$;

2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$. Here $c \odot \varphi = c + \varphi$;

3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$, φ, $\psi \in C(X)$. Here $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$.

A set of all idempotent probability measures in X is denoted by $I(X)$. It is endowed with the topology τ_p of pointwise convergence. For $\mu \in I(X)$ sets

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \theta \rangle = \{\nu \in I(X)\colon |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta, \, i = 1, \ldots, n\}$$

forms a base of $I(X)$ at μ. Here $\varphi, \ldots, \varphi_n \in C(X)$, $\theta > 0$.

Note that a function $f\colon X \to [-\infty, +\infty)$ is said to be an *upper semi-continuous* if for each $x \in X$ and for every real number r that satisfies $f(x) < r$, there exists an open neighborhood $U \subset X$ of x such that $f(x') < r$ for all $x' \in U$.

Now we consider a compact Hausdorff space X, and put

$$USC_0(X) = \Big\{ f\colon X \to [-\infty, 0] \Big| \, f \text{ is an upper semi-continuous function}$$

$$\text{such that there exists } x \in X \text{ with } f(x) = 0\Big\}.$$

For a point $x \in X$ the Dirac measure $\delta_x\colon C(X) \to \mathbb{R}$ is defined by the equality $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ at $\varphi \in C(X)$. It is easy to see that $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$. For each idempotent probability measure $\nu \in I(X)$ there exists [1] a unique upper semi-continuous function $\chi_\nu \in USC_0(X)$ such that $\nu = \bigoplus\limits_{x\in X} \chi_\nu(x) \odot \delta_x$. Consequently,

$$I(X) = \left\{ \bigoplus_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x\colon\ \lambda \in USC_0(X) \right\}.$$

For an idempotent measure $\mu = \bigoplus\limits_{x\in X} \chi_\mu(x) \odot \delta_x$ a set

$$\operatorname{supp}\mu = \{x \in X\colon\ \chi_\mu(x) > -\infty\}$$

we will call [2] the support of an idempotent probability measure μ.

For a positive integer n let $I_n(X)$ denote a set of all idempotent probability measures that support consists of no more than n points. Put $I_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n(X)$. An idempotent probability measure $\mu \in I_\omega(X)$ is said to be an idempotent probability measure with finite support.

For a compact Hausdorff space X we put

$$I_f(X) = \Big\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X)\colon\ \text{ there exists a point}$$
$$x_{i_0} \in \operatorname{supp}\mu = \{x_1,\,\ldots,\,x_n\} \text{such that } \chi_\mu(x_{i_0}) = 0 \text{ and } \chi_\mu(x_i) \le -\tfrac{n}{n+1}$$
$$\text{at } i \ne i_0 \Big\}.$$

Theorem 1. For every Tychonoff space X, the compact space $I_f(\beta X)$ is a perfect compactification of $I_f(X)$.

Theorem 2. For a Tychonoff space X, the space $I_f(X)$ is superparacompact if and only if X is superparacompact.

These theorems show that the construction $X \mapsto I_f(X)$ preserves and reflects the covering-type completeness property of superparacompactness.

LITERATURE

1. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations. Trans. Amer. Math. Soc., 351 (1999), 4515–4543.
2. Zaitov A.A. On a metric on the space of idempotent probability measures. Appl. Gen. Top., 21(1) (2020), 35–51.

Теорема жордана и топологическая характеризация двухмерных поверхностей

Авазбекова М.Д

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
avazbekovamarjonabonu@gmail.com

В данной работе мы рассмотрим теорему Жордана и еҷ обобщения, а также их роль в топологической классификации двумерных поверхностей.

Одной из фундаментальных идей в топологии является свойства пространств, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях. при этом важную роль играет теорема Жордана, устанавливающая простой замкнутой кривой на плоскости и разбиением еҷ на внутренюю и внешнюю области. ([1-4])

Возникает вопрос насколько актуальна теорема Жордана для различных пространств, например, для поверхностей. Как оказалось, при этом важную роль сыграют топологические свойства поверхности.

Определение. [4] Подмножество топологического пространства являющиеся и связным, и компактным одновременно называется континуумом. Непрерывный образ континуума есть снова континуум.

Теорема Уайлдера. [4] Локально связный континуум, содержащий простую замкнутую кривую, разбивающийся каждой своей простой замкнутой кривой и не разбивающийся никакой своей парой точек , гомеоморфен сфере.

Напомним, что континуум локально связен, если каждая точка имеет в каждой своей окрестности связную окрестность. В классе таких континуумов двумерные многообразия, т.е. поверхности выделяется тем, что они не разбиваются парами точек и теорема Жордана справедлива для них локально, т.е каждая достаточно малая простая замкнутая кривая их разбивает на части.

Рассмотрим двухмерный тор. Возьмем некую замкнутую кривую, опоясывающую тор. При этом, эта кривая не сможет разбить тор на две части, так как у тора имется "дырка". Следовательно, условие локальной связности и свойства разбиения определяют фундаментальные характеристики топологических многообразий. И, конечно же, тор не гомеоморфен сфере.

LITERATURE

1. Филлипов А.Ф. Элементарное доказательство теоремы Жордана, УМН: 1950, С.173-176.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, М:Наука, 1977, С.127
3. Camille Jordan Cours d'Analyse, 1887, 1893.
4. А.В.Чернавский. Математическое просвещение. 1999, 3, 142-157.

Проективно факторные функторы и некоторые кардинальные числа

Аюпов Ш.А.[1], Жувонов К.Р.[2] , Жураев Т.Ф.[3]

[1] Академик, директор Института математики имени Романовского и президент Академии наук Узбекистана. Ташкент, Узбекистан;

[2]Ассистент кафедры высшей математики, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Национальный исследовательский университет, Ташкент, Узбекистан;

[3] Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики Национального педагогического университета Узбекистана имени Низами, Ташкент, Узбекистан;
sh_ayupov@mail.ru, qamariddin.j@mail.ru, tursunzhuraev@mail.ru

В данной части рассматривается и изучается некоторые значения размерности и кардинальные числы пространств при воздействии на них проективно факторных функторов в категории тихоновских пространств и непрерывных отображений в себя.

Кардинальными числами $c(X)$, $\chi(X)$, $e(X)$, $d(X)$, $hc(X)$, $\omega(X)$, $t(X)$ можно подробно ознакомится в работах [1-3].
Для топологического пространства X говорят, что $ot(X) \le \tau$[3], если любого семейства ν открытых множеств X и для каждой точки $x \in X$, что $x \in c\ell(\bigcup \nu)$, существует такое подсемейство $\mu \le \nu$, что $|\mu| \le \tau$ и $x \in c\ell(\bigcup \mu)$. Очевидно, что $ot(X) \le t(X)$ и $ot(X) \le c(X)$ для любого топологического пространства X.

Для отображения $f : X \to Y$ обозначим через $f^{\#}A$ малый образ множества $A \subseteq X$ т.е. $f^{\#}A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq A\} = Y \backslash f(X \backslash A)$.

Отображение $f : X \to Y$ замкнуто $\Rightarrow \forall$ открытого $U \subset X$ множество $f^{\#}U-$ открыто.

Отображение $f : X \to Y$ называется вполне замкнутым в точке $y \in Y$, если всякого конечного покрытия ее прообраза $f^{-1}y$ открытыми в X множествами $U_1, U_2, ..., U_s$ множество $\{y\} \bigcup (\bigcup_{i=1}^{s} f^{\#}U_i)$ является окрестностью точку y.

Будем говорить, что отображение f вполне замкнуто в точки $x \in X$, если f вполне замкнуто в точке f_x. Если $f : X \to Y$ вполне замкнуто в каждой точке $y \in Y$, то отображение f называется вполне замкнутым. [2]

Напомним, что замкнутое отображение $f : X \to Y$ называется неприводимым, если для всякого собственного замкнутого подмножества $F \ne X$ имеет $f\ F \ne Y$.

Имеется предложение

Предложение 1. Если $f : X \to Y$ неприводимое отображение, то $dX = dY$. Что где $dX-$плотность пространства X.
$P(X)$– множество всех подмножеств множества X. Из определения топологии T на множестве X как семейства его (открытых) подмножеств вытекает, что $\tau \subseteq P(P(X))$.

Пусть теперь $X-$топологическое пространство X_0-его всюду плотное подмножество каждой точке $x \in X$ пространства X поставим в соответствие множество $o(x) = \{O_x \bigcap X_0 : O_x-$окрестность точки $x\}$. Ясно, что $O(x) \in P(P(X))$. Таким образом, получаем отображение $O : X \to P(P(X))$. Легко видеть, что для хаусдорфова пространства отображение o инъективно.

Отсюда:
а) Мощность хаусдорфова пространства X плотности $dX = \tau$ не перевосходит $|P(P(\tau))|$.
б) Семейство всех хаусдорфовых пространств данной плотности τ является множеством мощности $\le |P(P(P(\tau)))|$.

Предложение 2. Ограничение неприводимого отображения на прообраз всюду плотного множества неприводимо.

Пространство X назовем $d-$сепарабельным, если в нем существует счетное семейство дискретных (в себе) подпространств, объединение которых всюду плотно в X [3]. Каждое метризуемое (даже сильно симметризуемое) пространство $d-$сепарабельно.

Пример 1. $R-$прямая r^*-топология Хаусдорфа: τ^* получается из обычной топологии τ на R посредством объявления всех счетных подмножеств множества R замкнутыми в R
1. Каждое дискретное подпространство пространства $(R, \tau^*)-$счетно;
2. $(R, \tau^*)-$не сепарабельно;

3. $(R, \tau^*) - d-$сепарабельно, в нем существует счетно семейство дискретных подмножеств, объединение которых плотно ;
4. $(R, \tau^*)-$Хаусдорфо, но не регулярно

Кардинальным инвариантном называется любая функция φ, определенная на классе всех топологических пространств, значениями которой служат бесконечные кардинальные числа, U принимающая одинаковые значения на гомеоморфных пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф. Топологические значение сигма проективно индуктивно замкнутых функторов в категории тихоновских пространств и непрерывных отображений в себя. Монография. Ташкент, 2024, Методист, -192 с.

2. Fedorchuk V.V., Todorčevič S. Cellularity of covariant functors, Top.Appl. 76, 1997, c. 125-150.

3. Tkačenko M.G. The notion of $o-$tightness and $C-$embedded subspaces of products Topol.Appl. 15, 1983, p. 93-98.

Эквивалентность гиперпространств

Заитов А.А.[1], Бешимова Д.Р.[2]

[1] Ташкентский архитектурно-строительный университет
[2] Бухарский государственный университет
drbeshimova@gmail.com

Необходимые понятия и факты при чтении данной заметки можно найти из работ [1],[2],[3].

Для тихоновского пространства X положим

$$exp(Homeo\,(X)) \;=\; exp(g): \;\; g \in \; Homeo\,(X)$$

Предложение 1. Для произвольного тихоновского пространства X имеем

$$exp(Homeo\,(X)) \;\subset\; Homeo\,(\exp\,(X))\,.$$

Доказательство вытекает из нормальности функтора $\exp X$. Отметим, что включение обратить нельзя.

Например, для $X = \{a,\ b\}$ с дискретной топологией, определенный по правилу $g\,(a) = b,\ g\,(b) = a$ гомеоморфизму $g: \ X \rightarrow \ X$ соответствует гомеоморфизм $\exp\,(g) \in Homeo\,(\exp\,(X))$

$$\exp\,(g)\,(\{a\}) = g\,(\{a\}) = \{g\,(a)\} = \{b\}$$

$$\exp\,(g)\,(\{b\}) = g\,(\{b\}) = \{g\,(b)\} = \{a\}$$

$$\exp\,(g)\,(\{a,b\}) = \; g\,(\{a,b\}) = \{h\,(a)\,, h\,(b)\} = \{a,b\}\,.$$

Определим гомеоморфизм $H : \exp X \rightarrow \exp X$ равенствами

$$H\,(\{a\}) = \{b\}\,, H\,(\{b\}) = \{a,b\}\,, H\,(\{a,b\}) = \{a\}\,.$$

Очевидно, что не существует ни одного гомеоморфизма $f \in \; Homeo\,(X)$, такого, что $\exp\,(f) = H$. Следовательно, $H \notin \exp\,(Homeo\,(X))$, хотя

$$H \in Homeo\;(\exp X).$$

Для топологической группы G топологического преобразования (G, X, α) положим

$$\exp(G) = \{\exp(\alpha_g) : \quad g \in G\}.$$

Здесь $\alpha_g : X \to X$ Ц отображение, индуцированное действием $\alpha : G \times X \to X$, и определенное равенством

$$\alpha_g(x) = \alpha(g,\ x) \quad \text{при} \quad (g,\ x) \in G \times X$$

Теорема 1. Множество $\exp G$ является группой относительно операции $\exp(\alpha_{g_1}) \circ \exp(\alpha_{g_2}) = \exp(\alpha_{g_1 \circ g_2})$. При этом, если e Ц единица группы G, то $\exp(\alpha_e)$ Ц единица группы $\exp G$.

Таким образом, для заданной группы топологических преобразований $(G,\ X,\ \alpha)$ образуется группа топологических преобразований $(\exp(G), \exp X, \exp\alpha)$, где действие $\exp\alpha : \exp(G) \times \exp X \to \exp X$ группы $\exp G$ определено естественным образом:

$$\exp\alpha(\exp\alpha_g,\ F) = \exp\alpha_g(F) = \alpha_g(F).$$

Пусть $(G,\ X,\ \alpha)$ и $(G,\ Y,\ \alpha)$ Ц группы топологических преобразований. Говорят [1], что топологические пространства X и Y эквивариантны, если существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $\alpha_g^Y \circ f = f \circ \alpha_g^X$ для всякого элемента $g \in G$. Здесь $\alpha^X : G \times X \to X$, $\alpha^Y : G \times Y \to Y$ действия одной и той же группы G соответственно на пространствах X и Y. Иными словами, $\alpha^Y(g,\ f(x)) = f\left(\alpha^X(g,\ x)\right)$, $(g,\ x) \in\ G \times X$. При этом отображение f называется эквивариантностью. Эквивариантное отображение $f : X \to Y$ называется эквивалентностью, если оно Ц гомеоморфизм.

Теорема 2. Пусть $(G,\ X,\ \alpha)$ и $(G,\ Y,\ \alpha)$ Ц группы топологических преобразований. Пространства $\exp X$ и $\exp Y$ эквивалентны относительно группы $\exp G$ тогда и только тогда, когда пространства X и Y эквивалентны относительно группы G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. Москва, Наука, 1980.

2. Zaitov A.A., Jumaev D.I. Hyperspace of the П-complete spaces and maps. Eurasian Math. J., 12(2), 2021, 104–110.

3. Мадиримов М. Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований. Ташкент, Фан, 1987.

Об одном оценке числа точек решчтки в единичном квадрате и их приложения

Рузимурадов Х.Х.

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан
rxx05@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается оценка числа точек решчтки в единичном квадрате. Полученная оценка позволяет использовать точки решчтки в качестве узлов интегрирования для приближчнного вычисления n-кратных интегралов.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ Ч компактное тело. Обозначим через $V(M)$ его объчм. Пусть $M + X$ Ч сдвиг M на вектор $X \in \mathbb{R}^n$, а TM Ч тело, получающееся умножением каждой точки M на матрицу $T \in GL_n(\mathbb{R})$. Тогда $V(TM) = |\det T| \cdot V(M)$.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ Ч решчтка с определителем $d(L)$. Ец фундаментальное множество $F(L) = \mathbb{R}^n/L$ имеет объцм $V(F(L)) = d(L)$. Для $X \in \mathbb{R}^n$ положим $L + X$ Ч сдвиг решчтки, а TL Ч решчтка, полученная действием матрицы T. Тогда $d(TL) = |\det T| \cdot d(L)$ [3,4].

Для любого дискретного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$N(M, D) = \#(M \cap D).$$

В частности, $N(M, L)$ Ч число точек решчтки L, лежащих в M. По определению

$$N(M, L) = \frac{V(M)}{d(L)} + R(M, L),$$

где $R(M, L)$ Ч остаточный член. При этом $R(M + X, L)$ является периодической функцией по X с решчткой периодов L. Введцм величину

$$r(M, L) = \sup_{X \in F(L)} \big| R(M + X, L) \big|.$$

Мы интересуемся оценкой $r(M, L)$. В работах [1,2] доказана следующая теорема.

Теорема 1 Пусть K^2 Ч единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат и рчбрами, параллельными осям. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ Ч унимодулярная решчтка с однородным минимумом $\mu > 0$. Тогда существует бесконечная последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots$ с условием

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\mu^2},$$

для которых для прямоугольника TK^2, где $T = (u, v_r)$, $u > \mu$, имеет место оценка

$$r(TK^2, L) \leq \frac{10\sqrt{2}}{\mu^2} \ln V(TK^2).$$

Теперь рассмотрим приложение этих результатов к равномерному распределению и интегрированию. Пусть f Ч 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^2$, интегрируемая по Лебегу. Определим

$$\sigma(f) = \int_{K^2} f(x)\, dx.$$

Теорема 2 Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ Ч унимодулярная решчтка с минимумом $\mu > 0$. Тогда для любой 1-периодической функции $f \in L^1(K^2)$ имеет место оценка

$$\sup_{X \in F(L)} \left| \frac{1}{N} \sum_{x \in (K^2 + X) \cap L} f(x) - \sigma(f) \right| \leq \frac{C}{\mu},$$

где C Ч абсолютная константа.

Следствие 1 Для $f \in L^1(K^2)$ и для любых N и L найдчтся множество узлов $X_N \subset K^2$ мощности N, такое что

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in X_N} f(x) - \sigma(f) \right| \leq \frac{C}{\mu}.$$

Следствие 2 Если f непрерывна и 1-периодична, то при $N \to \infty$ выборка по узлам X_N равномерно распределена в K^2.

Таким образом, использование узлов решҷтки при вычислении интегралов обеспечивает равномерное распределение точек и контроль ошибки интегрирования, зависящий от параметров решҷтки.

Литература

1. Ruzimuradov Kh. Kh., Ismatova L., Poyanova N. On an estimate related to the homogeneous minimum of the admissible lattice. *AIP Conf. Proc.* **2850**, 020003 (2024). https://doi.org/10.1063/5.0214049.

2. Ruzimuradov Kh.Kh. Fundamental rectangles of admissible lattices. *J Math Sci* **79**, 1320–1324 (1996). https://doi.org/10.1007/BF02366461.

3. Ruzimuradov Kh.Kh. On the problem of counting the number of points of algebraic lattices in rectangles. *Uzbek Mathematical Journal*, 2008, No. 4, pp. 116–124.

4. Skriganov M. M. Uniform distributions and geometry of numbers [in Russian]. *Preprint LOMI P-6-91*, Leningrad (1991).

СЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

SECTION 2. MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS

Spectral Properties of Partial Integral Operators on Kaplansky-Hilbert Modules in Mixed-Norm Spaces

Arziev A.Dj.[1], **Orinbaev P.R.**[2]

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

allabayarziev@inbox.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

Let (Ω, Σ, μ) be a measurable space with a complete finite measure μ, and let $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ be the ring of equivalence classes of complex measurable functions on (Ω, Σ, μ), identified almost everywhere.

Consider a linear space H over the field of complex numbers $\mathcal{C}$. A mapping $\|\cdot\| : H \to L_0$ is called a L_0-valued norm on H, if for every $x,\ y \in H,\ \lambda \in \mathcal{C}$ the following relations hold:

1. $\|x\| \geq 0,\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

The pair $(H,\ \|\cdot\|)$ is called a lattice-normed space over L_0.

A lattice-normed space H is called d-decomposable, if for any $x \in H$ with $\|x\| = \lambda_1 + \lambda_2,\ 0 \leq \lambda_1,\ \lambda_2 \in L_0,\ \lambda_1\lambda_2 = 0$ there exist $x_1, x_2 \in X$ such that $x = x_1 + x_2$ and $\|x_1\| = \lambda_1, \|x_2\| = \lambda_2$. A net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ (bo)-converges to an element $x \in X$, if the net $\{\|x_\alpha - x\|\}_{\alpha\in A}$ (o)-converges to zero in L_0 (note that the (o)-convergence in L_0 coincides with convergence almost everywhere). A (bo)-complete d-decomposable lattice-normed space over L_0 is called a Banach–Kantorovich space over L_0. It is known that every Banach–Kantorovich space X over L_0 is a module over L_0 and $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ for all $\lambda \in L_0,\ u \in X$ (see [1]).

A mapping $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to L_0$ is called an L_0-valued inner product if, for all $x, y, z \in H$ and $\lambda \in L_0$, the following conditions hold:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$; , 4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (see [2], p. 32).

The formula $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ defines an L_0-valued norm on H (see [2]).

If $(H, \|\cdot\|)$ is a Banach-Kantorovich space, then $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is called a Kaplansky-Hilbert module over L_0. Hence forth, H will denote a Kaplansky-Hilbert module over L_0.

Let's consider the mixed-norm spaces $L_{p,q}(\Omega \times S)$, $1 \leq p, q < \infty$, consisting of equivalence classes of measurable functions f on $\Omega \times S$ such that

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f(\omega, s)|^p \, d\nu(s) \right)^{1/p} \in L_q(\Omega).$$

where mixed norm defined by

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_\Omega \left(\int_S |f(x, y)|^q \, d\nu(s) \right)^{p/q} d\mu(\omega) \right)^{1/p}.$$

If $p = q = 2$, and $\Omega = S = [a, b]$, then $(L_2([a, b]^2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is a Kaplansky-Hilbert module over $L_2[a, b]$, where

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\int_a^b x^2(\omega, s)dv(s)\right)^{\frac{1}{2}}, x(\omega, s), \in L_2\left([a, b]^2\right)$$

Let the partial integral operator $T : L_2([a, b]^2) \to L_2([a, b]^2)$

$$Tx(\omega, t) = \int_a^b K(\omega, t, s)x(\omega, s)\, d\nu(s). \tag{1}$$

be defined by a kernel $K(\omega, t, s) = K_1(\omega)K_2(t, s)$, where:

1. $K_1(\omega) \in L_2[a, b]$;
2. $K_2(t, s)$ is a symmetric and positive definite function;
3. $\int_a^b \int_a^b |K(\omega, t, s)|^2\, d\nu(t)d\nu(s) < \infty$ for almost all $\omega \in [a, b]$.

Define the operator $T_2 : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$:

$$T_2x(t) = \int_a^b K_2(t, s)x(s)\, d\nu(s), \tag{2}$$

with eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ existing by the spectral theorem for compact self-adjoint operators [3], and normalized eigenfunctions $\varphi_n(t)$. Set:

$$\tilde{\lambda}_0(\omega) = 0, \quad \tilde{\lambda}_n(\omega) = \frac{K_1(\omega)}{\lambda_n}, \quad n \geq 1.$$

For each $\omega \in [a, b]$, define the operator $T_\omega : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$:

$$T_\omega x(t) = \int_a^b K(\omega, t, s)x(s)\, d\nu(s) = K_1(\omega)\int_a^b K_2(t, s)x(s)\, d\nu(s). \tag{3}$$

Ttheorem. Let the kernel $K(\omega, t, s)$ satisfy conditions 1-3. Then the cyclic modular spectrum of the operator T is given by:

$$\mathrm{spm}(T) = \mathrm{mix}\{\tilde{\lambda}_n : n \geq 0\},$$

where $\tilde{\lambda}_n \in L_0[a, b]$.

References

1. Kusraev, A. G. Dominated Operators. Moscow: Nauka, 2003.
2. Kusraev, A. G. Vector duality and its applications. Novosibirsk: Nauka, 1985.(Russian)
3. Reed, M., Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis. San Diego: Academic Press, 1980.

On dynamics of a separable cubic stochastic operator

Baratov B. S.
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
e-mail: baratov.bahodir@bk.ru

In the present thesis, we consider discrete-time dynamical systems generated by cubic operators which we are called separable cubic stochastic operators. This operator defined on two-dimensional simplex and depend on the parameters $a,\ b$ and c.

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m: \ x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

the $(m-1)$-dimensional simplex.
A cubic stochastic operator (CSO) is a mapping $W\colon S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the form

$$W : x'_\ell = \sum_{i,j,k \in E} P_{ijk,\ell} x_i x_j x_k, \quad \ell \in E, \tag{1}$$

where $P_{ijk,\ell}$ are the coefficients of heredity such that

$$P_{ijk,\ell} \geq 0, \quad \forall i,j,k,\ell \in E, \quad \sum_{\ell \in E} P_{ijk,\ell} = 1, \quad \forall i,j,k \in E, \tag{2}$$

that is, the coefficients $P_{ijk,\ell}$ do not change for any permutation of i, j and k if the types are not related to sex.
Let

$$A = (a_{i\ell})_{i,\ell=1}^m, \quad B = (b_{j\ell})_{i,\ell=1}^m, \quad C = (c_{k\ell})_{i,\ell=1}^m$$

be the matrices with the real entries.

Consider a CSO (1), (2) with additional condition

$$P_{ijk,\ell} = a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell}, \quad \text{for all} \quad i,j,k,\ell \in E, \tag{3}$$

where $a_{i\ell}, b_{j\ell}, c_{k\ell} \in \mathbb{R}$ entries of matrices A, B and C such that the conditions (2) are satisfied for the coefficients (3). Then the CSO W corresponding to the coefficients (3) has the form

$$x'_\ell = (W(\mathbf{x}))_\ell = (A(\mathbf{x}))_\ell \cdot (B(\mathbf{x}))_\ell \cdot (C(\mathbf{x}))_\ell, \quad \ell \in E, \tag{4}$$

where $(A(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i\ell} x_i$, $(B(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{j\ell} x_j$ and $(C(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{k\ell} x_k$.

Definition. The CSO (4) is called separable cubic stochastic operator (SCSO).
Let us consider the following matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1-b \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-c \\ 1+b & 1+c & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

where $ab + bc = ac$ and $a, b, c \in [-1, 1]$.

Then corresponding SCSO $W : S^2 \to S^2$ is:

$$W : \begin{cases} x_1' = x_1\left(x_1 + (1+a)x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_2 + (1+b)\,x_3\right), \\ x_2' = x_2\left((1-a)x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_2 + (1+c)x_3\right), \\ x_3' = x_3\left((1-b)\,x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1 + (1-c)x_2 + x_3\right). \end{cases} \tag{6}$$

Using the equation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ we rewrite the operator (6) as follows

$$W : \begin{cases} x_1' = x_1\left(1 + ax_2\right)\left(1 + bx_3\right), \\ x_2' = x_2\left(1 - ax_1\right)\left(1 + cx_3\right), \\ x_3' = x_3\left(1 - bx_1\right)\left(1 - cx_2\right). \end{cases} \tag{7}$$

Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0,\ i \notin \alpha \subset \{1,2,3\}\}$. Let the set $\operatorname{int} S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \operatorname{int} S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2, respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.

Theorem 1. *For the SCSO W* (7), *the following assertions true*:

(i) *The faces* $\Gamma_{\{1,2\}}$, $\Gamma_{\{1,3\}}$, $\Gamma_{\{2,3\}}$ *of the simplex* S^2 *are invariant sets;*

(ii) $\operatorname{Fix}(W) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$*;*

Acknowledgements: The author acknowl- edges support from the Applied Research Grant "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956.

References

1. R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, reprint of the second (1989) edition.
2. U. A. Rozikov, S. Nazir, Separable quadratic stochastic operators. Lobachevskii J. Math. **31** (2010) 215–221.
3. U. A. Rozikov, A. Zada, On a class of separable quadratic stochastic operators, Lobaschevskii J. Math. **32** (2011) 385–394.

Global dynamics of a two-dimensional biological operator in invariant sets

Boxonov Z.S.[1,2], Yuldoshaliyeva Z.R.[2]
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
z.b.x.k@mail.ru, yu.afrodita@gmail.com

Consider the operator $W : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, which is defined by the system

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{\beta y^2}{\gamma + y} - \dfrac{\alpha x}{1 + x}, \\ y' = y + \dfrac{\alpha x}{1 + x} - \mu y, \end{cases} \tag{1}$$

where the parameters satisfy $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \mu > 0$. Here x' and y' denote the next states corresponding to the present values x and y.

It can be directly verified that, whenever

$$\beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \mu \leq 1, \tag{2}$$

the operator (1) maps the positive cone $\mathbb{R}^2_+$ into itself.

We say that the partition into types is hereditary if, for any current generation described by $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, the subsequent generation $\mathbf{z}' = (x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ is uniquely determined. In this situation, the correspondence

$$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}' = W(\mathbf{z})$$

is referred to as the evolution operator.

The main problem for a given operator W and an arbitrary initial point $\mathbf{z}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2_+$ is to characterize the set of limit points of the trajectory

$$\left\{\mathbf{z}^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}, \qquad \text{where } \mathbf{z}^{(m)} = W^m\big(\mathbf{z}^{(0)}\big).$$

The dynamical behavior of operator (1) in the special case $\gamma = 0$ has been extensively investigated in [1-4].

Proposition 1. If $\beta > \mu\Big(1 + \dfrac{\gamma\mu}{\alpha}\Big)$, then the operator (1) admits two fixed points z_0 and z_1, where

$$z_0 = (0, 0), \qquad z_1 = (x_1, y_1),$$

with

$$x_1 = \frac{\gamma\mu^2}{\alpha(\beta - \mu) - \gamma\mu^2}, \qquad y_1 = \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu}. \tag{2}$$

We define

$$\mathbb{A}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; 0 \leq x \leq x_1,\ 0 \leq y \leq y_1\right\} \setminus \{z_1\},$$

$$\mathbb{A}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; x \geq x_1,\ y \geq y_1\right\} \setminus \{z_1\},$$

where $z_1 = (x_1, y_1)$ is the fixed point given in (2).

Proposition 2. The sets $\mathbb{A}_1$ and $\mathbb{A}_2$ are invariant with respect to W.

The next result characterizes the asymptotic behavior of trajectories starting from any point in the invariant sets.

Theorem. Let W be the operator given by (1) and assume that

$$\beta > \mu\Big(1 + \frac{\gamma\mu}{\alpha}\Big).$$

Then, for any initial point $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2_+$, the trajectory

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) = W^n(x^{(0)}, y^{(0)})$$

behaves as follows:

(i) if $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{A}_1$, then the sequence $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}$ tends to the origin $(0, 0)$;

(ii) if $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{A}_2$, then $x^{(n)}$ diverges to infinity while $y^{(n)}$ approaches the equilibrium value $\frac{\alpha}{\mu}$.

References

1. Boxonov Z.S., Rozikov U.A., A discrete-time dynamical system of stage-structured wild and sterile mosquito population, Nonlinear studies 2021. Vol. 28, №. 2, pp. 413–425.
2. Boxonov Z.S., Rozikov U.A., Dynamical system of a mosquito population with distinct birth-death rates, JAND. 2021. Vol. 10, №. 4, pp. 807–816.
3. Boxonov Z.S.,A discrete-time dynamical system of mosquito population, JDEA. 2023. Vol. 29, No. 1, pp. 67–83.
4. Boxonov Z.S. Description of trajectories of an evolution operator generated by mosquito population, RJND. 2024. DOI: 10.20537/nd240401

The Weyl function corresponding to a second-order operator matrix and its properties

Dilmurodov E. B.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
Bukhara Branch Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
e.b.dilmurodov@buxdu.uz

Denote by $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ the d$-$ dimensional torus. Let $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ and $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ be the Hilbert space of square integrable symmetric (complex) functions defined on $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$.

Let us consider a 2×2 operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ acting in the Hilbert space $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ as:

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

with the entries $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 1, 2$ defined by

$$(A_{11} f_1)(p) = u(p) f_1(p), \quad (A_{12} f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(p,t) dt,$$
$$(A_{22} f_2)(p,q) = w(p,q) f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

Here A_{12}^* denotes the adjoint operator to A_{12}, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ are real-valued continuous functions on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ and $w(\cdot,\cdot)$ is a real-valued symmetric continuous function on $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Under these assumptions the operator $\mathcal{A}_\mu$ is bounded and self-adjoint.

Let

$$m(p) := \min_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(p,q) \quad \text{and} \quad M(p) := \max_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(p,q).$$

For any $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ we define an analytic function $\Delta_\mu(p\,;\cdot)$ in $\mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)]$ by

$$\Delta_\mu(p\,; z) := u(p) - z - \frac{\mu^2}{2} \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t) dt}{w(p,t) - z}.$$

We consider the following operator function:

$$M_\mu(z) := z I_1 - A_{11} + \mu^2 A_{12} (A_{22} - z)^{-1} A_{12}^*.$$

For the convinience we rewrite the operator $M_\mu(z)$ in the following form

$$(M_\mu(z) f_1)(p) = -\Delta_\mu(p\,; z) f_1(p) + \frac{\mu^2 v(p)}{2} \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{f_1(t) dt}{w(p,t) - z}, \quad f_1 \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

The operator function $M_\mu(\cdot)$ is called the corresponding Weyl function for the operator $\mathcal{A}_\mu$ [1].

Since for any fixed $z_0 \in \rho(A_{22})$ the function

$$\frac{1}{w(p,q)-z_0}$$

is a continuous as function of (p,q) on the compact set $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ we have

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(M_\mu(z_0)) = \mathrm{Ran}(-\Delta_\mu(\cdot\,; z_0)).$$

By the definition for any fixed $z \in \mathbb{R} \cap \rho(A_{22})$ the function $\Delta_\mu(\cdot\,; z)$ is a continuous on the compact set $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Therefore, if for $z \in \mathbb{R} \cap \rho(A_{22})$ we set

$$E_{\min}(z) := \min_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}(-\Delta_\mu(p\,; z)), \quad E_{\max}(z) := \max_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}(-\Delta_\mu(p\,; z)),$$

then $\sigma_{\mathrm{ess}}(M_\mu(z)) = [E_{\min}(z), E_{\max}(z)]$.

Lemma. Let $z \in \rho(A_{22})$. Then $z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(M_\mu(z))$.

Theorem. The number $z \in \rho(A_{22})$ is an eigenvalue of the operator $\mathcal{A}_\mu$ if and only if the number 0 is an eigenvalue of the operator $M_\mu(z)$. Moreover the eigenvalues z and 0 have same multiplicities.

REFERENCES

1. J. Behrndt, S. Hassi and H. de Snoo, Boundary Value Problems, Weyl Functions, and Differential Operators (Birkhauser, Basel, 2020)

Applications of the Lobachevsky metric in the H - upper half-plane

Eshboltaev S.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
eshboltayevsarvar@gmail.com

In this thesis, we provide examples of the Lobachevsky metric, defined in the H-upper half-plane, and the calculation of distances between points using this metric.

Let H denote the upper half-plane of the complex space $\mathbb{C}$:

$$H = \{z \in C | Im(z) > 0\}$$

Definition. For the upper half-plane, the Lobachevsky metric is expressed by the equality $ds = \frac{|dz|}{Imz}$. In this case, $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ is the differential expression of the ordinary Euclidean distance, and $Im(z) = y$ is the imaginary part of Z .

Property 1. If $f : D \to D$ is a holomorphic mapping, then it is invariant in the Lobachevsky metric and $ds(f(z)) = ds(z)$ is equal.

If $z_1 = x_1 + iy_1 \in H$ and $z_2 = x_2 + iy_2 \in H$ are two points, the distance between them is calculated as follows:

$$d(z_1, z_2) = ln|\frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_! - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_! - z_2|}|. \tag{1}$$

Now let's look at some examples using these formulas:

Example 1. Find the distance between points $z_1 = i$ and $z_2 = 2i$. Solution. According to formula (1)

$$d(z_1, z_2) = ln|\frac{|i - \overline{2i}| + |i - 2i|}{|i - \overline{2i}| - |i - 2i|}| = ln2.$$

So, it is $d(i,2i) = ln2 \approx 0,693$. For information, we can say that $d_{Evklid}(z_!, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ according to the expression. $d_{Evklid}(i,2i) = 1$.

The Euclidean distance between parallel lines remained constant.

Property 2. In the H-upper half-plane, the distance between two parallel lines increases as it approaches the boundary.

Example 2. Let us have parallel lines $l_1 = \{z \in \mathbb{C}|Re(z) = 0\} \cap H$ and $l_2 = \{z \in \mathbb{C}|Re(z) = 1\} \cap H$. Compare the distance between these parallel lines for the case of $Im(z) = 1$ and $Im(z) = 10$.

Solution. We are asked to compare the distances between points $z_1 = i \in l_1$, $z_2 = 1+i \in l_2$ of parallel lines l_1 and l_1 and between the points $z_1^* = 10i \in l_1$, $z_2^* = 1+10i \in l_2$ according to formula(1)

$$d(i, 1+i) = ln|\frac{|i - \overline{1+i}| + |i-(1+i)|}{|i - \overline{1+i}| - |i-(1+i)|}| = ln|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}| \approx 0,962$$

and

$$d(10i, 1+10i) = ln|\frac{|10i - \overline{1+10i}| + |10i-(1+10i)|}{|10i - \overline{1+10i}| - |10i-(1+10i)|}|$$

$$= ln|\frac{1+\sqrt{401}}{1-\sqrt{401}}| \approx 0,099.$$

So it's $d(i, 1+i) > d(10i, 1+10i)$.

The following properties are our main result.

LITERATURE

1. James W. Anderson, Hyperbolic Geometry, BA, PhD School of Mathematics, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK, 1964.

2. G.Xudoyberganov, B.A.Shoimqulov, J.Sh.Abdullayev. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, Toshkent: -, 2023.

On a max-min variant of the Riesz representation theorem

Eshimbetov M. R.[1,2], Qulahmadov F. G'.[1], Eshimbetov J. R.[3]

[1]Tashkent International University of Financial Management and Technologies,Tashkent, Uzbekistan

[2]Chirchik State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan;

[3]Tashkent University of Human Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

mr.eshimbetov@gmail.com, eshimbetovjurabek@gmail.com

Let X be a compact Hausdorff space and $\mathfrak{B}(X)$ the family of Borel subsets of X. We denote $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. The symbol $\mathfrak{A}$ denotes a directed set.

Definition 1. [3] A set function $\mu\colon \mathfrak{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ is said to be an idempotent measure on X if the following conditions hold

1) $\mu(\varnothing) = 0$;

2) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ for any $A, B \in \mathfrak{B}(X)$;

3) $\mu\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha\right) = \sup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}\{\mu(A_\alpha)\}$ for every increasing net $\{A_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{B}(X)$ such that $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha \in \mathfrak{B}(X)$.

The set of all idempotent measure on X we denote by $IM(X)$.

Let $\mathcal{B}$ be a base in X. For an idempotent measure $\mu \in IM(X)$ a system of sets

$$\langle \mu;\, U_1,\, \ldots,\, U_n;\, \varepsilon \rangle = \{\nu \in IM(X)\colon\ |\nu(U_i) - \mu(U_i)| < \varepsilon,\, i = 1,\, \ldots,\, n\}$$

forms [2] a base of μ. Here $U_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$, and $\varepsilon > 0$.

If $\mu(X) = 1$, the idempotent measure μ is called an idempotent probability measure on X. We denote $I(X) = I_{\mathfrak{B}}(X) = \{\mu \in IM(X)\colon \mu(X) = 1\}$.

Let (X, μ) be an idempotent measure space such that $\mu(X) < \infty$. We adopt the convention that $\infty \cdot 0 = 0$.

Definition 2. [3] For a function $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ we define the idempotent integral of f with respect to μ by

$$\int\limits_X^{\oplus} f d\mu = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} \{t \cdot \mu\{x \in X\colon f(x) \geq t\}\}.$$

Let X be a Tychonoff space, βX the Stone-Čech compactification of X we determine the following set

$$I_{\mathfrak{B}\tau}(X) = \{\mu \in I(\beta X)\colon \mu(F) = 0 \text{ for every } F \in \mathfrak{B}(\beta X), F \subset \beta X \setminus X\}.$$

Elements of $I_{\mathfrak{B}\tau}(X)$ is said to be τ-smooth idempotent probability measures.

Now, for each $\mu \in I_{\mathfrak{B}\tau}(X)$ we define a set function $\tilde{\mu}\colon \mathfrak{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ on the family $\mathfrak{B}(X)$ of all Borel subsets of X by the formula

$$\tilde{\mu}(A) = \inf\{\mu(B)\colon B \in \mathfrak{B}(\beta X), B \supset A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(X).$$

Lemma 1. [2] $\tilde{\mu}$ is an idempotent probability measure on X.

Given a topological space X, by $C(X)$ we denote the Banach space of all continuous functions $\varphi\colon\ X \to \mathbb{R}$ with the usual algebraical operations and the sup-norm: $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|\colon\ x \in X\}$. For each $c \in \mathbb{R}$ we denote by c_X the constant function on $C(X)$ defined by the formula $c_X(x) = c$ for each $x \in X$. Define on $C(X)$ operations $\oplus$ and $\wedge$ by $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi,\, \psi\}$ and $\varphi \wedge \psi = \min\{\varphi,\, \psi\}$, where $\varphi,\, \psi \in C(X)$.

Definition 3. [1] Let X be a compact Hausdorff space. A functional $\nu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ is said to be a *max-min measure*, if it has the following properties

1) $\nu(c_X) = c$ for each $c \in \mathbb{R}$;
2) $\nu(\varphi \oplus \psi) = \nu(\varphi) \oplus \nu(\psi)\}$ for any $\varphi,\, \psi \in C(X)$;
3) $\nu(c \wedge \varphi) = c \wedge \nu(\varphi)$ for every $c \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in C(X)$.

We denote by $J(X)$ the set of all max-min measures on X. We endow the set $J(X)$ with the weak* topology. A base of this topology consists of the set [1] of the form

$$\langle \nu;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \varepsilon \rangle = \{\nu' \in J(X)\colon\ |\nu(\varphi_i) - \nu'(\varphi_i)| < \varepsilon,\, i = 1,\, \ldots,\, n\},$$

where $\nu \in J(X)$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$, and $\varepsilon > 0$.

Theorem 1. Let X be a Tychonoff space. If $\tilde{\mu}(X) \neq 0$ is τ-smooth idempotent measure on $\mathfrak{B}(X)$, the integration

$$\tilde{\varphi} \mapsto \ln\left(\frac{1}{\tilde{\mu}(X)} \int\limits_X^{\oplus} e^{\tilde{\varphi}(x)} d\tilde{\mu}\right)$$

is a max-min linear functional on $C_b(X)$. Conversely, for any max-min linear functional $\tilde{\nu}\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ there exists a unique τ-smooth idempotent probability measure $\tilde{\mu}(X) \neq 0$ on $\mathfrak{B}(X)$ such that

$$\tilde{\nu}(\tilde{\varphi}) = \ln\left(\tfrac{1}{\tilde{\mu}(X)} \int\limits_X^{\oplus} e^{\tilde{\varphi}(x)} d\tilde{\mu}\right), \tilde{\varphi} \in C_b(X),$$

where $C_b(X)$ denote the set of real-valued bounded continuous functions on X.

REFERENCES

1. Brydun V. and Zarichnyi M. Spaces of max-min measures on compact Hausdorff spaces. arXiv:1904.08669v1 [math.GN] 18 Apr. 2019.
2. Köcinac L. D. R., Zaitov A. A., Eshimbetov M. R. On the Čech-completeness of the space of τ-smooth idempotent measures. Axioms, 2024, 13(8), pp. 569–582.
3. Zaitov A. A., Eshimbetov M. R. On a max-plus Variant of the Riesz Representation Theorem. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, Vol. 6, no. 5, pp. 73–79.

CONTINUATION OF $A(z)$–ANALYTIC FUNCTIONS ACCORDING TO PENVEL

Husenov B. E.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
b.e.husenov@buxdu.uz

We investigate this thesis of the continuation of the $A(z)$–analytic function according to Penvel. Here, we will use the principle of continuity.

Let $A(z)$ be an antianalytic function in the domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \leq c$ for all $z \in D$, where $c < 1$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$*–analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D (see [1]).

According to, the function $\psi(a,z) = z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ is an $A(z)$–analytic function. The following set $L(a,r) = \{|\psi(a,z)| < r\}$ is an open subset of arbitrary convex domain D. For sufficiently small $r > 0$, this set compactly lies in D and contains the point a. This set $L(a,r)$ is called the $A(z)$*–lemniscate* centered at the point a. The lemniscate $L(a,r)$ is a simply - connected set (see [1]).

If $f(z) \in O_A(L(a,r)) \bigcap C\left(\bar{L}(a,r)\right)$, where $L(a,r) \subset D$ is a fixed $A(z)$-lemniscate, then in $L(a,r)$ the function $f(z)$ is expanded in a Taylor series:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(a,z), \tag{2}$$

where $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\psi(a,\xi))^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right), 0 < \rho < r, k = 0, 1, 2, \ldots$ (see [1]).

Suppose that two lemniscates $L(a, r_1)$ and $L(b, r_2)$, whose intersection is the empty set, $L(a, r_1) \bigcap L(b, r_2) = \varnothing$, have a common boundary section consisting of a smooth curve l, and consider the domain $D = L(a, r_1) \bigcup L(b, r_2) \bigcup l$.

The principle of continuity for $A(z)$–analytic functions. *If functions $f_1(\zeta)$ and $f_2(\zeta)$ are $A(z)$–analytic in lemniscates $L(a, r_1)$ and $L(b, r_2)$ respectively, continuous up to l and, in addition,*

$$f_1(\zeta) = f_2(\zeta), \zeta \in l,$$

then function $f_2(\zeta)$ is an $A(z)$–analytic continuation of function $f_1(\zeta)$ from lemniscate $L(a, r_1)$ to lemniscate $L(b, r_2)$ through curve l.

One important consequence follows from the principle of continuity. Let l, the boundary of the lemniscate $L(c, r_3)$, contain a smooth curve l_0, and let the function $f(\zeta)$ be $A(z)$–analytic in $L(c, r_3)$ and continuous up to l_0. Let's also assume that $f(\zeta) = 0, \zeta \in l_0$, then $f(\zeta) \equiv 0$ everywhere up to $L(c, r_3)$ (see [2]).

In fact, let us attach to lemniscate $L(c, r_3)$ along subset l_0 of its border l lemniscate $L(d, r_4), L(c, r_3) \bigcap L(d, r_4)$, and consider function

$$F(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta), & \zeta \in L(c, r_3), \\ 0, & \zeta \in l_0, \\ 0, & \zeta \in L(d, r_4). \end{cases}$$

By virtue of the principle of continuity we conclude that function $F(\zeta)$ $A(z)$–analytic in the domain of $D = L(c, r_3) \bigcup L(d, r_4) \bigcup l_0$. On the other hand, since $F(\zeta) = 0$ is in the lemniscate $L(d, r_4)$, which lies inside D, then by the property of uniqueness of $A(z)$–analytic functions $F(\zeta) = 0$ is everywhere in D, and therefore also in $L(c, r_3)$, and consequently $f(\zeta) \equiv 0$ is in $L(c, r_3)$ (see [2]).

REFERENCES

1. Sadullaev, A. and Zhabborov, N.M. On a class of A–analytic functions, Journal Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2016. Volume 9, No. 3. pp. 374–383.
2. Tishabaev, Zh.K. and Tirkasheva, G.D. The uniqueness teorem for $A(z)$–analytic functions, Scientific Republican Conference "New Results of Mathematics and their Applications II". Samarkand. 2018 May 14-15. pp. 14-15.

THE EXISTENCE OF EIGENVALUES OF A SECOND-ORDER OPERATOR MATRIX

Ismoilova D. E

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
dilierkinovna9@gmail.com

By $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ we denote an one dimensional torus. Let $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ be the one-dimensional complex space, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable (complex-valued) functions defined on $\mathbb{T}$.

We introduce the Hilbert space

$$\mathcal{F}_{\text{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T})) := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1.$$

An element of the space $\mathcal{F}_{\text{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}))$ is a vector function of the form $f = \{f_0, f_1\}$, where $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha, \alpha = 0, 1$.

The elements of the space $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\rm as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T})$ are defined as $f = \{f_0^{(\rm s)}, f_1^{(\rm s)}; s = \pm\}$ and for any two elements of this space

$$f = \{f_0^{(\rm s)}, f_1^{(\rm s)}; {\rm s} = \pm\} \quad \text{and} \quad g = \{g_0^{(\rm s)}, g_1^{(\rm s)}; {\rm s} = \pm\}$$

the scalar product and the corresponding norm are determined as follows:

$$\langle f, g\rangle := \sum_{s=\pm}\left(f_0^{(\rm s)}\overline{g_0^{(\rm s)}} + \int_{\mathbb{T}} f_1^{(\rm s)}(k_1)\overline{g_1^{(\rm s)}(k_1)}dk_1\right),$$

$$\|f\|^2 = \sum_{\rm s=\pm}\Big(|f_0^{(\rm s)}|^2 + \int_{\mathbb{T}} |f_1^{(\rm s)}(k_1)|^2 dk_1\Big).$$

In the Hilbert space $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\rm as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T})$ we consider the operator matrix

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}.$$

The entries A_{ij} of the operator matrix $\mathcal{A}$ are defined as

$$A_{00} f_0^{(\rm s)} = {\rm s}\varepsilon f_0^{(\rm s)}, \quad A_{01} f_1^{(\rm s)} = \alpha \int_{\mathbb{T}} f_1^{(-\rm s)}(t)dt$$

$$(A_{11} f_1^{(\rm s)})(k_1) = ({\rm s}\varepsilon + 1 - \cos(k_1)) f_1^{(\rm s)}(k_1)$$

$$\{f = (f_0^{(\rm s)}, f_1^{(\rm s)}), {\rm s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\rm as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}),$$

where ε is a fixed positive real number and $\alpha > 0$ is the interaction parameter.

In order to study the spectral properties of the block operator matrix $\mathcal{A}$ we consider in the space $\mathcal{F}_{\rm as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T})$ the following linear, bounded, self-adjoint operator matrix of second order with discrete parameter

$$\mathcal{A}^{(\rm s)} := \begin{pmatrix} \widehat{A}_{00}^{(\rm s)} & \widehat{A}_{01} \\ \widehat{A}_{01}^* & \widehat{A}_{11}^{(\rm s)} \end{pmatrix},$$

whose entries are defined by

$$\widehat{A}_{00}^{(\rm s)} f_0 = {\rm s}\varepsilon f_0, \quad \widehat{A}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}} f_1(t)dt,$$

$$(\widehat{A}_{11}^{(\rm s)} f_1)(k_1) = (-{\rm s}\varepsilon + 1 - \cos(k_1)) f_1(k_1), \quad (f_0, f_1) \in \mathcal{F}_{as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}).$$

From the definitions well known from functional analysis, it is straightforward to verify that

$$\widehat{A}_{01}^* f_0 = \alpha f_0.$$

Further, the well-known Weyl theorem on the conservation of the essential spectrum under perturbations of finite rank implies that for the essential spectrum of the operator $\mathcal{A}^{(\rm s)}$ the equality holds:

$$\sigma_{\rm ess}\left(\mathcal{A}^{(\rm s)}\right) = [-{\rm s}\varepsilon; -{\rm s}\varepsilon + 2].$$

Let us introduce a regular function in $\mathbb{C}\backslash[-{\rm s}\varepsilon; -{\rm s}\varepsilon+2]$, the so-called Fredholm determinant associated with the operator matrix $\mathcal{A}^{(\rm s)}$:

$$\Delta^{(\rm s)}(z) := {\rm s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{-{\rm s}\varepsilon + 1 - \cos(t) - z}$$

It should be noted that [1,2] the operator matrix $\mathcal{A}$ is unitarily equivalent to the diagonal operator matrix $\operatorname{diag}\{\mathcal{A}^{(+)}, \mathcal{A}^{(-)}\}$. Therefore, the equality

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \bigcup_{\text{s}=\pm} \sigma_{\text{ess}}\left(\mathcal{A}^{(\text{s})}\right) = [-\varepsilon; -\varepsilon+2] \cup [\varepsilon; \varepsilon+2].$$

Now, we state the main result of this note.

Theorem. For every positive interaction parameter α, the operator matrix $\mathcal{A}$ has exactly two eigenvalues located to the left of the lower bound $-\varepsilon$.

REFERENCES

1. M.Muminov, H.Neidhardt and T.Rasulov, On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling:1D case, J.Math.Phys 56(5),(2015).
2. T.Kh.Rasulov, Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at two photons, Theor.Math.Phys. 186, 251-267 (2016).

The sufficient conditions for the preservation of the finite-dimensional simplex by a cubic operator.

Jumayev J. N.
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
jahongirjumayev@mail.ru

In the present thesis, we establish a sufficient conditions on the non-stochastic m^4-dimensional matrix that ensure the corresponding cubic operator also preserves the simplex.

Let us give basic definition. In general, a cubic operator $V : x \in \mathbb{R}^m \to x' = V(x) \in \mathbb{R}^m$ corresponding to a matrix $\mathbb{P} = \{P_{ijk,l}\}_{i,j,k,l=1}^{m}$ is defined by:

$$V : x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Without loss of generality we assume

$$\begin{aligned}
&P_{iij,l} = P_{iji,l} = P_{jii,l}, \quad i,j,l = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \\
&P_{ijk,l} = P_{ikj,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} = P_{kij,l} = P_{kji,l}, \\
&i,j,k,l = 1, \dots, m, \quad i \neq j \neq k.
\end{aligned}$$

Indeed, if this equality is not satisfied then we can introduce

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_{iij,l} = \tfrac{1}{3}\left(P_{iij,l} + P_{iji,l} + P_{jii,l}\right), \quad i,j,l = 1, ..., m, \quad i \neq j, \\
&\bar{P}_{ijk,l} = \tfrac{1}{6}\left(P_{ijk,l} + P_{ikj,l} + P_{jik,l} + P_{jki,l} + P_{kij,l} + P_{kji,l}\right), \\
&i,j,k,l = 1, \dots, m, \quad i \neq j \neq k.
\end{aligned}$$

As a result, the operator (1), takes the form:

$$V : x'_l = \sum_{i=1}^{m} P_{iii,l} x_i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \left(P_{iij,l} x_i^2 x_j + P_{ijj,l} x_i x_j^2\right)$$

$$+6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, l = 1, ..., m.$$

Let m be a natural number and let $E_m = \{1, 2, \ . \ . \ . \ , m\}$ be a finite set. Then the set of all probability distributions on the E_m is

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \ x_i \geq 0, \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

which is called $m-1$ -dimensional simplex.

Lemma. Operator (1) can be written in the following form:

$$V : x'_l = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{m} \left[\tfrac{2}{(m-1)(m-2)} \left(P_{iii,l} x_i^3 + P_{jjj,l} x_j^3 + P_{kkk,l} x_k^3 \right) + \right.$$

$$+ \tfrac{3}{m-2} \left(x_i^2 \left(P_{iij,l} x_j + P_{iik,l} x_k \right) + x_j^2 \left(P_{ijj,l} x_i + P_{jjk,l} x_k \right) + \right.$$

$$\left. + \ x_k^2 \left(P_{ikk,l} x_i + P_{jkk,l} x_j \right) \right) + 6 P_{ijk,l} x_i x_j x_k \big] \ .$$

The following theorem gives conditions for coefficients of V to preserve the simplex S^{m-1}.

Theorem. For a cubic operator V (given by (1), to preserve the simplex S^{m-1} it is sufficient that:

i)$\sum\limits_{l=1}^{m} P_{ijk,l} = 1, \quad i, j, k = 1, 2, \ . \ . \ . \ , m;$

ii) $0 \leq P_{iii,l} \leq 1, \quad i, l = 1, 2, \ . \ . \ . \ , m;$

ii) $-\frac{2}{3(m-1)} \sqrt[3]{P_{iii,l}^2 P_{jjj,l}} \leq P_{iij,l}, \quad i \neq j, \quad i, j, l = 1, 2, \ . \ . \ . \ , m;$

iv) $\frac{2}{(m-1)(m-2)} \sqrt[3]{P_{iii,l} P_{jjj,l} P_{kkk,l}} \leq P_{ijk,l}, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k, l = 1, 2, \ . \ . \ . \ , m.$

Acknowledgements. The author acknowl- edges support from the Applied Research Grant "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956.

References

1. Rozikov U.A., Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, World Sci. Publ, (2020), (Singapore).
2. Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic non-stochastic operators: Examples of splitted chaos, Annals of Functional Analysis, 13, (2022), no. 1, 17.
3. A.T. Sarymsakov, Behaviour of trajevtories and ergodic properties of the quadratic stochastic operators, PhD thesis, (1982), (Tashkent).
4. Jumayev J.N., Criterion for the preservation of the one-dimensional simplex by a cubic operator, Uzbek Mathematical Journal, 2024, Volume 68, Issue 4, pp.85-95, DOI: 10.29229/uzmj.2024-4-9.

Positive solutions of systems of two nonlinear algebraic equations

Khaliov A.Z.
Karshi state university, Karshi, Uzbekistan;
akbarx1991@gmail.com

Let f and g be polynomials in two variables x and y over a field K.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{0}$$

system (0) is called a system of two algebraic equations in two variables. A solution of this system is an ordered pair $(\alpha,\ \beta)$ of elements of K that satisfies each equation. Solving the system means finding the set of all its solutions.

In many applied problems, nonlinear systems of algebraic equations arise. For example, consider the following quadratic system in n variables:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1^2 + a_{22}^{(2)}x_2^2 + \ldots + a_{nn}^{(n)}x_n^2 + 2\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{n} a_{ij}^{(1)}x_ix_j = \lambda x_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1^2 + a_{n2}^{(2)}x_2^2 + \ldots + a_{nn}^{(n)}x_n^2 + 2\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{n} a_{ij}^{(1)}x_ix_j = \lambda x_n \end{cases}. \tag{1}$$

where $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}, \quad \lambda > 0.$

Our main goals are:

(a) the existence of positive solutions of nonlinear algebraic systems,

(b) the uniqueness of positive solutions of nonlinear algebraic systems,

(c) if positive solutions exist, determining their number.

Now let us study the existence of positive solutions of the following system of nonlinear algebraic equations:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^{n-i}y^i = x \\ \sum\limits_{i=0}^{n} b_ix^{n-i}y^i = y, \end{cases}. \tag{2}$$

where $a_i > 0,\ b_i > 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

To solve the problems stated above, we need the following lemmas.

Lemma 1. If the point (x_0, y_0) is a positive solution of system (2), then the number $\xi_0 = \frac{y_0}{x_0}$ is a root of the following equation:

$$a_n\xi^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(a_{n-1-i} - b_{n-i}\right)\xi^{n-i} - b_0 = 0 \tag{3}$$

Lemma 2. If $\xi_0 > 0$ is a root of equation (3), then the point $(x_0,\ \xi_0x_0)$ is a positive solution of system (2), where

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\xi^i}}.$$

Theorem.

(a) System (2) of nonlinear algebraic equations has a positive solution.

(b) If there exists an index $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ such that

$$a_{i-1} - b_i \leq 0 \quad (1 \leq i \leq i_0), \quad \text{and} \quad a_{i-1} - b_i \geq 0 \quad (i_0 < i \leq n),$$

then system (2) has a unique positive solution.

(c) The number of positive solutions of system (2) is at most $n+1$.

LITERATURE

1. Prasolov, V.V. Polynomials Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2004.
2. Eshkabilov Yu. Kh. , Nodirov Sh. D. , Haydarov F. H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. Positivity, 20(4), 2016, 929-943.
3 Nickalls R. W. D. The quartic equation: invariants and Euler's solution revealed. The Mathematical Gazette, 93, 2009, 66-75.

Invariant subspaces of integral operators

Khalkhuzhaev A.M.[1,2], Toshturdiev A.M.[1]

[1]Samarkand State University, University boulevard, 15, Samarkand, 140104 Uzbekistan
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 100174 Uzbekistan ahmad_x@mail.ruб atoshturdiyev@mail.ru

Solving problems in quantum mechanics, solid-state theory, and statistical physics often reduces to studying the properties of solutions to differential or integral equations. In turn, solving a differential equation can be reduced to solving an integral equation. We will focus on invariant subspaces of integral operators and their applications. The theory of integral operators and methods for solving integral equations were developed by Neumann, Volterra, Liouville, Fredholm, Hilbert and Schmidt (see [1] - [4]).

Suppose that $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ is a three-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T}^3)$ is the Hilbert space of square-integrable functions defined in $\mathbb{T}^3$. We consider the following integral operator

$$(Af)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

in the space $L^2(\mathbb{T}^3)$.

Let the kernel K of the integral operator A satisfy the conditions:

(A) $K \in L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3)$ is a square integrable;

(B) The kernel K is pseudosymmetric,

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \overline{K(\mathbf{q}, \mathbf{p})}.$$

If condition (A) is satisfied, then the operator A is called a Hilbert-Schmidt type operator, in this case A is a compact operator. If condition (B) is satisfied, then $A = A^*$ is a self-adjoint operator.

We define the subspaces of the space $L^2(\mathbb{T}^3)$ consisting of even and odd functions by

$$L^{2,e}(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) : \quad f(-\mathbf{s}) = f(\mathbf{s})\}$$

and

$$L^{2,o}(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) : \quad f(-\mathbf{s}) = -f(\mathbf{s})\},$$

respectively. The direct sum of these spaces covers the space $L^2(\mathbb{T}^3)$, that is,

$$L^2(\mathbb{T}^3) = L^{2,e}(\mathbb{T}^3) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T}^3). \tag{1}$$

From now, we assume that conditions (A) and (B) are always satisfied for the kernel K of the integral operator A.

Let the kernel K of the operator A is even that is

$$K(-\mathbf{s}, -\mathbf{t}) = K(\mathbf{s}, \mathbf{t}). \tag{E}$$

We write the space $L^2(\mathbb{T}^3)$ in the direct sum:

$$L^2(\mathbb{T}^3) = [L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T})] \otimes [L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T})] \otimes L^2(\mathbb{T}).$$

It follows from here the space $L^2(\mathbb{T}^3)$ can be represented as a direct sum of four subspaces:

$$L^2(\mathbb{T}^3) = [L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})] \oplus [L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})] \oplus$$

$$\oplus [L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})] \oplus [L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})].$$

Lemma. *If the conditions (E_1) and (E_2) are fulfilled, then subspaces*

$$L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}), \qquad L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$$

and

$$L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}), \qquad L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$$

are invariant under the operator A.

Now we write the space $L^2(\mathbb{T}^3)$ as the direct sum:

$$L^2(\mathbb{T}^3) = [L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T})] \otimes [L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T})] \otimes [L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T})] =$$

$$= \mathcal{H}_1^e \oplus \mathcal{H}_2^e \oplus \mathcal{H}_3^e \oplus \mathcal{H}_{123}^e \oplus \mathcal{H}_1^o \oplus \mathcal{H}_2^o \oplus \mathcal{H}_3^o \oplus \mathcal{H}_{123}^o, \tag{2}$$

where, $\mathcal{H}_\alpha^e$ is the subspace consisting of even functions with respect to the coordinate α and odd in the remaining coordinates. $\mathcal{H}_\alpha^o$ is the subspace consisting of odd functions with respect to the coordinate α and even in the remaining coordinates. For instance,

$$\mathcal{H}_1^e = L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}), \qquad \mathcal{H}_3^o = L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}),$$

$$\mathcal{H}_{123}^e = L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}), \qquad \mathcal{H}_{123}^o = L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}).$$

Note that in the equation (2), the first four direct sum is equal to the space $L^{2,e}(\mathbb{T}^3)$, and the direct sum of the next four is equal to the space $L^{2,o}(\mathbb{T}^3)$. Thus, we have

$$L^{2,e}(\mathbb{T}^3) = \mathcal{H}_1^e \oplus \mathcal{H}_2^e \oplus \mathcal{H}_3^e \oplus \mathcal{H}_{123}^e, \tag{3}$$

$$L^{2,o}(\mathbb{T}^3) = \mathcal{H}_1^o \oplus \mathcal{H}_2^o \oplus \mathcal{H}_3^o \oplus \mathcal{H}_{123}^o \tag{4}$$

Theorem. *If the conditions (E_1), (E_2), (E_3) are fulfilled, then the subspaces $\mathcal{H}_\alpha^e$, $\mathcal{H}_\alpha^o$, $\alpha \in \{1,2,3\}$ and $\mathcal{H}_{123}^e$, $\mathcal{H}_{123}^o$ are invariant under the operator A.*

LITERATURE

1. L.A. Lusternik, V.J. Sobolev. Elements Of Functional Analysis. (Hindustan Pub. Corp. 1974).
2. P.R. Halmos, V.S. Sunder. Bounded Integral Operators on L_2 Spaces. (Springer-Verlag Berlin Heidlberg. New York. 1978).
3. Reed M., and Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Analysis of Operators. (Akad. Press. New-York, V 4, 1979).
4. S.N. Lakaev and J.I. Abdullaev, Asymptotics of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Difference Operator on a Lattice. Theor Math Phys. 136. 2, 1096 – 1109. (2003).

On the dynamics of a non-Volterra non-hyperbolic cubic stochastic operator.

Khamrayev A.Yu., Doniyorov A. R.

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
khamrayev-ay@yandex.ru, abrordo1998@gmail.com

In the present thesis, we consider discrete-time dynamical systems generated by cubic operators which we are called a non-Volterra non-hyperbolic cubic stochastic operator.

Let $E=\{1,\dots,m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1}=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m:\ x_i\geq 0,\ \text{for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i=1\},$$

the $(m-1)$-dimensional simplex.

A cubic stochastic operator (CSO) is a mapping $W\colon S^{m-1}\to S^{m-1}$ of the form

$$W: x'_\ell=\sum_{i,j,k\in E}P_{ijk,\ell}x_ix_jx_k,\quad \ell\in E, \tag{1}$$

where $P_{ijk,\ell}$ are the coefficients of heredity such that

$$P_{ijk,\ell}\geq 0,\qquad \forall i,j,k,\ell\in E,\quad \sum_{\ell\in E}P_{ijk,\ell}=1,\qquad \forall i,j,k\in E,$$

that is, the coefficients $P_{ijk,\ell}$ do not change for any permutation of i,j and k if the types are not related to sex.

Denote by $\operatorname{Fix}(W)$ the set of all fixed points of the operator W, i.e.

$$\operatorname{Fix}(W)=\left\{\mathbf{x}\in S^2:\ W(\mathbf{x})=\mathbf{x}\right\}.$$

Let $DW(\mathbf{x}^*)=(\partial W_i/\partial x_j)(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 1. A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle in $\mathbb{C}$.

Definition 2. A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are in the unit disk;

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are outside the closed unit disk;

iii) a saddle otherwise.

Then corresponding CSO $W:S^2\to S^2$ is:

$$W:\begin{cases} x'_1=\frac{1}{3}\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+2x_1x_2x_3,\\[2mm] x'_2=\frac{1}{3}\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+3x_1^2x_3+3x_1x_3^2+2x_1x_2x_3,\\[2mm] x'_3=\frac{1}{3}\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+3x_2^2x_1+3x_2x_1^2+2x_1x_2x_3.\end{cases}$$

Theorem 1. *For the CSO W (1), the following assertions true:*

(i) *The faces $M=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2: x_1=x_2\}$, $M=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2: x_1=x_3\}$, $M=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2: x_3=x_2\}$ of the simplex S^2 are invariant sets;*

(ii) $\operatorname{Fix}(W)=\{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$ and this fixed point is a non-hyperbolic;

Acknowledgements. The work is supported by the applied Project "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956 of The Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

References

1. R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, reprint of the second (1989) edition.
2. U. A. Rozikov, S. Nazir, Separable quadratic stochastic operators. Lobachevskii J. Math. 31, (2010) 215–221.
3. U. A. Rozikov, A. Zada, On a class of separable quadratic stochastic operators, Lobaschevskii J. Math. 32, (2011) 385–394.

ON THE NON-EXTREMALITY OF TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES FOR THE BLUME-CAPEL MODEL ON THE CAYLEY TREE

Khatamov N.M.[1], Kodirova M.A.[2]
Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
Andijan state university, Andijan, Uzbekistan;
nxatamov@mail.ru, malika.kodirova24@gmail.com

Let $\Gamma^k = (V, L)$ is the Cayley tree. For a fixed $x^0 \in V$ we set

$$W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}, V_n = \{x \in V | d(x^0, x) \leq n\},$$

where $d(x, y)$ is the distance between vertices x and y on the Cayley tree.

We consider a model in which spin variables take values from the set $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. We then define a configuration σ on V as a function $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with $\Omega = \Phi^V$. Let $A \subset V$. We denote the space of configurations defined on a set A by Ω_A.

The Hamiltonian of the Blume-Capel model is given by the formula

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y>} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

where $J > 0$.

The set of the direct successors of x is denoted by $S(x)$, i.e.,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} | d(x, y) = 1\}, x \in W_n.$$

Let $h : x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x})$ be a vector-valued function on $x \in V \setminus \{x^0\}$. We consider the probability measure $\mu^{(n)}$ on Ω_A,

$$\mu^n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}. \tag{2}$$

Here $\sigma \in \Omega_{V_n}$, and Z_n is a normalization factor, $Z_n = \sum\limits_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp\left\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum\limits_{x \in W_n} h_{\bar{\sigma}(x),x}\right\}$, where $h_{\bar{\sigma},x} \in R$. The probability measure $\mu^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and any $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)} \left(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}\right) = \mu^{(n-1)} \left(\sigma_{n-1}\right). \tag{3}$$

In this case, there is a unique measure μ on Ω_V such that

$$\mu(\{\sigma|V_n = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

for all $n \geq 1$ and any $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

A condition for $h_{i,x}$ ensuring the consistency of the measures $\mu^{(n)}$ is formulated in the next theorem.

Teorema 1. *Let $k \geq 2$. The sequence of probabilistic measures $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, ...$, defined* (3) *is consisted if and only if the equalities*

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\theta^4 z_{-1,y}+\theta+z_{1,y}}{\theta z_{-1,y}+1+\theta z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{z_{-1,y}+\theta+\theta^4 z_{1,y}}{\theta z_{-1,y}+1+\theta z_{1,y}}, \end{cases} \tag{4}$$

where $\theta = \exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $z_{i,x} = \exp(h_{i,x} - h_{0,x})$, $i = -1, 1$ hold for any $x \in V$.

Translation-invariant Gibbs measures (TIGM) correspond to solutions (4) with $z_{i,x} = z_i > 0$ for all $x \in V$ and $i = -1, 1$. We introduce the notation $z_1 = z_1, z_{-1} = z_2$. Then (4) has the form

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta^4 z_2+\theta+z_1}{\theta z_1+\theta z_2+1}\right)^k, \\ z_2 = \left(\frac{\theta^4 z_1+\theta+z_2}{\theta z_1+\theta z_2+1}\right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

From the solution $z_1 = z_2 = z$ of system (5), we obtain the following Theorem 1 and Theorem 2. The case $z_1 \neq z_2$ will not be considered here.

Theorem 2. *Let $k = 2$. Then for the Blume-Capel model there is critical value $\theta_{cr} \approx 0.1351717506$, such that:*
a) for $0 < \theta < \theta_{cr}$ there are 3 translation-invariant Gibbs measures: μ_1, μ_2, μ_3;
b) for $\theta = \theta_{cr}$ there are 2 translation-invariant Gibbs measures: μ_1, μ_2;
c) for $\theta_{cr} < \theta$ there exists only one translation-invariant Gibbs measure: μ_1.

Using the Kesten-Stigum condition, we prove the non-extremality of the measures μ_1, μ_2 and μ_3. Consequently, the following theorem holds.

Theorem 3. *Let $k = 2$. For the Blume-Capel model, the following statements hold:*
a) the measure μ_1 is non-extremal if $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, +\infty)$;
b) the measure μ_2 is non-extremal if $\theta \in (0, \theta_3) \cup (\theta_4, \theta_{cr})$;
c) the measure μ_3 is non-extremal if $\theta \in (0, \theta_5) \cup (\theta_6, \theta_{cr})$,
where $\theta_{cr} \approx 0.1351717506$, $\theta_1 \approx 0.144632$, $\theta_2 \approx 1.59963$, $\theta_3 \approx 0.09442$, $\theta_4 \approx 0.1126974$, $\theta_5 \approx 0.0771265$, and $\theta_6 \approx 0.085221$.

REFERENCES

1. Preston C. J. Gibbs States on Countable Sets. Cambridge Tracts Math., 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
2. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore. World Scientific, 2013.
3. Khatamov N.M. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree, Ukrainian Mathematical Journal, 2020, Vol. 72, No. 4, P.540–556.
4. Khatamov N.M. Periodic Gibbs Measures and Their Extremes for the HC-Blume-Capel Model in the Case of a "Wand" on the Cayley Tree, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 9, P. 2515–2524.

ABOUT DYNAMIC SYSTEMS OF A QnSO

Khudayarov S.S.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
Bukhara Branch Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan;
s.s.xudayarov@buxdu.uz

We know that there is a one-to-one correspondence between quadratic operators and cubic matrices [2-5]. It is known that any quadratic operator corresponding to a stochastic cubic matrix maps the simplex onto itself. Until now, no quadratic stochastic operator has been found that is chaotic in the simplex, but now we show that there are one-dimensional and two-dimensional non-stochastic quadratic operators that form a chaotic dynamic system for some values of their parameters. We will demonstrate this with examples.

Let X be topological space and $f : X \to X$.

- Denote $f^n(x)$, meaning f is applied to $x \in X$ iteratively n times.
- Let A be a subset of X. Then $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.
- If $f(A) \subset A$, then A is an invariant set under function f.
- A continuous map $f : X \to X$ is said to be topologically transitive if, for every pair of non-empty open sets $A, B \subset X$, there exists an integer n such that $f^n(A) \cap B \neq \varnothing$.

Devaney's definition [1] of chaos is stated as follows:

A continuous map f is chaotic if f has an invariant set $A \subset X$ such that

1) f satisfies sensitive dependence on its initial conditions on A,

2) The set of points initiating periodic orbits are dense in A, i.e., every point in the space is approached arbitrarily closely by periodic orbits.

3) f is topologically transitive on A.

Let $I = \{1, 2, \dots, m\}$. A distribution of the set I is a probability measure $x = (x_1, \dots, x_m)$, i.e. an element of the simplex:

$$S^{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}. \tag{1}$$

The quadratic stochastic operator (QSO) is a mapping of the simplex S^{m-1} into itself, of the form

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \ \ k = 1, \dots, m. \tag{2}$$

where $P_{ij,k}$ are coefficients of heredity and

$$P_{ij,k} \geq 0, \ \ P_{ij,k} = P_{ji,k}, \ \ \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \ \ i, j, k = 1, \dots, m. \tag{3}$$

For a given $x^{(0)} \in S^{m-1}$ the trajectory (orbit) $\{x^{(n)}\}$ of $x^{(0)}$ under the action of QSO [2] is defined by

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), \ \ n = 0, 1, 2...$$

Definition. A quadratic operator preserving a simplex, is called non-stochastic (QnSO) if at least one of its coefficients $P_{ij,k}, \ i \neq j$ is negative.

The following theorem gives conditions for coefficient of V to preserve the simplex

Theorem[6]. For a quadratic operator V (given by [2], to preserve a simplex S^{m-1} it is **sufficient** that

i) $\sum\limits_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \quad i,j = 1,\ldots,m;$

ii) $0 \leq P_{ii,k} \leq 1, \quad i,k = 1,\ldots,m;$

iii) $-\frac{1}{m-1}\sqrt{P_{ii,k}P_{jj,k}} \leq P_{ij,k} \leq 1 + \sqrt{(1-P_{ii,k})(1-P_{jj,k})}$

and **necessary** that the conditions (i), (ii) and

iii′) $-\sqrt{P_{ii,k}P_{jj,k}} \leq P_{ij,k} \leq 1 + \sqrt{(1-P_{ii,k})(1-P_{jj,k})}$

are satisfied.

Consider the following QnSO on S^2:

$$W_0 := (ax^2 + 2bxy + cy^2,\ (1-a)x^2 + 2(1-b)xy + (1-c)y^2,\ z(2-z))$$

where

$$a, c \in [0,1], \quad b \in [-\sqrt{ac}, \quad 1 + \sqrt{(1-a)(1-c)}].$$

Theorem. If $a = 1$, $c \neq 1, c > 0$ then the function $f(y) = 2(1-b)(1-y)y + (1-c)y^2$ is topological conjugate to the logistic map $g(y)$ with $\mu = 2b$.

References

1. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. Boulder.: Stud. Nonlinearity, Westview Press., 2003.

2. Ganikhodzhaev R.N. Thesis Doctor of Sciences, Tashkent. 1995,(Russian).

3. U.A. Rozikov, Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci. Publ.* Singapore. 2020.

4. Sarymsakov A.T. Behaviour of trajevtories and ergodic properties of the quadratic stochastic operators. PhD thesis, 1982. Tashkent.

5. Roikov, U.A., Population Dynamics: Algebraic and Probabilistic Approach. World Sci. Publ, Singapore (2020)

6. Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos. Ann. Funct. Anal. 13:1 (2022), Paper No.17, P. 1-17.

THE SPECTRAL PROPERTIES OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL WITH THE RANK TWO PERTURBATION

Kurbanov Sh. Kh.

Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan;
kurbanov-shaxzod@mail.ru

Let $\mathbb{Z}$ be the *one*-dimensional lattice and $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = (-\pi, \pi]$ be the *one*-dimensional torus. Let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions defined on $\mathbb{T}$.

We consider the family of generalized Friedrichs model $H_{\mu_1\mu_2}(p), p \in \mathbb{T}$ acting in $L^2(\mathbb{T})$ defined as

$$H_{\mu_1\mu_2}(p) = H_0(p) + V_{\mu_1\mu_2},\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},$$

where $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^2$ is a multiplication operator by a real-analytic function $w_p(\cdot) := w(p,\cdot)$ defined on $(\mathbb{T}^2)^2$, i.e.,

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

and $V_{\mu_1\mu_2} : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ is the perturbation operator of the form

$$(V_{\mu_1\mu_2} f)(q) = \mu_1\varphi_1(q)(f,\varphi_1) + \mu_2\varphi_2(q)(f,\varphi_2),$$

where $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{T})$ and $(\cdot,\cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T})$.

The perturbation $V_{\mu_1\mu_2}$ of the non-perturbed operator $H_0(p), p \in \mathbb{T}$ is an operator of rank two. Consequently, by the well-known Weyl theorem [1] on the compact perturbations

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu_1\mu_2}(p)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p)) = [m(p),\, M(p)],$$

where

$$m(p) = \min_{q\in\mathbb{T}} w_p(q),\ M(p) = \max_{q\in\mathbb{T}} w_p(q).$$

The following hypothesis will be needed throughout the paper.

Hypothesis. The functions $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ and $w(\cdot,\cdot)$ used in the definition of the operator $H_{\mu_1\mu_2}(p)$ satisfy the following conditions:

(i) $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ are non-trivial, real-analytic on $\mathbb{T}$ and $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$;

(ii) $w(\cdot,\cdot)$ is a real-analytic function on $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, and it has a unique non-degenerate maximum at $(p_{\max}, q_{\max}) \in \mathbb{T}^2$.

The item (ii) of Hypothesis implies the existence of a δ-neighborhood $U_\delta(p_{\max}) \subset \mathbb{T}$ of the point $p_{\max} \in \mathbb{T}$ and an analytic function $q_{\max} : U_\delta(p_{\max}) \to \mathbb{T}$ that for any $p \in U_\delta(p_{\max})$ the point $q_{\max}(p) \in \mathbb{T}$ is a unique non-degenerate maximum of the function $w_p(\cdot)$.

Assume that $\varphi_i(q_{\max}(p)) \neq 0, \varphi_j(q_{\max}(p)) = 0,\ i \neq j, i, j = 1, 2$. In this case, we consider a polynomial $E_{ij}(\mu_1, \mu_2, p)$ by

$$E_{ij}(\mu_1, \mu_2, p) = \mu_i + \mu_1\mu_2 b_{jj}(p).$$

where $b_{jj}(p) < 0$. It is easy to see that the polynomials $E_{ij}(\mu_1, \mu_2, p)$ has two zeros $\mu_i = 0$, $\mu_j = -\frac{1}{b_{jj}(p)}$. These zeros divide the $(\mu_1, \mu_2)-$plane into four connected components C^0_{ij}, C^{1+}_{ij}, C^{1-}_{ij} and C^2_{ij} :

$$C^0_{ij} = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_i < 0, \mu_j < -\frac{1}{b_{jj}(p)}\},$$
$$C^{1+}_{ij} = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_i > 0, \mu_j < -\frac{1}{b_{jj}(p)}\},$$
$$C^{1-}_{ij} = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_i < 0, \mu_j > -\frac{1}{b_{jj}(p)}\},$$
$$C^2_{ij} = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_i > 0, \mu_j > -\frac{1}{b_{jj}(p)}\}.$$

Theorem. Let Hypothesis and $\varphi_i(q_{\max}(p)) \neq 0, \varphi_j(q_{\max}(p)) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2$ hold. Then for any $(\mu_1, \mu_2) \in C^\alpha_{ij}$, $\alpha = 0, 1, 2$ the operator $H_{\mu_1\mu_2}(p)$, $p \in U_\delta(p_{\max})$ has α eigenvalue(s) in the interval $(M(p), +\infty)$, where $C^1_{ij} = C^{1+}_{ij} \cup C^{1-}_{ij}$.

The generalized Friedrichs model is considered aslo in [2].

REFERENCES

1. M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators, Academic Press, N.Y., (1978)

2. S. Lakaev, M. Darus and Sh. Kurbanov, Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one, J. Phys. A: Math. Theor. 46, (2013) 205304.

A simple method of second order differentiation of an implicit function in separable Banach spaces

Lomonosov T. A.
HSE University, Moscow, Russia;
tlomonosov@hse.ru

An important problem of finding the capital allocation line in economics can be reduced to finding a tangent line to a curve given implicitly by the equation $F(\sigma, r) = 0$, where σ is the standard deviation of the asset and r is the expected return. The problem is studied in [1,2]. Therefore, an easier way of obtaining the differential characteristics of the curve is to be found. This applied problem also poses a question on finding differential characteristics of implicit functions in separable Banach space.

The main result of this work establishes a simple formula that connects a second differential of implicit mapping $f(x, y) = 0$ and the second differential of the explicit function $f(x, y)$ itself restricted to the kernel of its differential in separable Banach spaces.

The reference [3] contains an implicit function theorem in Banach spaces. The new theorem presented here allows us a simple formula which can be used to find the second differential of an implicit function.

Theorem 1. Let E and F be separable Banach spaces, and equip $E \oplus F$ with the max norm. Let f be a map of an open subset O in $E \otimes F$ into f, and suppose f is twice continuously differentiable at a point $x = (x_1, x_2) \in O$. Assume further that the linear transformation $T : F \to F$, defined by $T(w) = df(x_1, x_2; 0, w)$, is $1 - 1$ and onto F. Then there exists a neighborhood U_1 of x_1 in E, a neighborhood U_2 of x_2 in F, and a unique continuous function $g : U_1 \to U_2$ such that:

1. The level set $f^{-1}(f(x)) \cap U$ coincides with the graph of g, where $U = U_1 \times U_2$;
2. g is twice differentiable at x_1, $dg(x_1; h_1) = -T^{-1}(df(x_1, x_2; h_1, h_2))$, and

$$d^2g(x_1; h_1) = -T^{-1}(d^2f(x_1, x_2; h_1, h_2))\Big|_{\operatorname{Ker} df(x_1,x_2;h_1,h_2)}.$$

Corollary 1. Let $E = \mathbb{R}^n$ and $F = \mathbb{R}$. Let f be as in Theorem 1. Let further $\{v_1, \ldots, \times v_n\}$ be a basis of $\operatorname{Ker} df(x_1, x_2; h_1, h_2)$. Then there exists a neighborhood U_1 of x_1 in E, a neighborhood U_2 of x_2 in F, and a unique continuous function $g : U_1 \to U_2$ such that

$$H_g(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)_{ij} = \langle H_f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, x_2)v_i, v_j\rangle,$$

where H denotes a Hessian matrix, and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes an inner product.

This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at HSE University.

REFERENCES

1. Li X. Analyzing optimal portfolios of eleven assets under different constraints, SHS Web of Conferences, 2024

2. Roll R. The Efficient Frontier: A Note on the Curious Difference Between Variance and Standard Deviation. - Social Science Working Paper 1456, California Institute of Technology, 2021.

3. Bagget L. Functional analysis, a primer. Marcel Dekker, INC. New York 1992

APPLICATIONS OF $A(z)$–ANALYTIC FUNCTIONS TO SERIES

Muhammadova M. F.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
masturamuhammadova@mail.ru

In this thesis we study the expansion of $A(z)$–analytic functions into convergent Taylor series. We will also consider the application of $A(z)$–analytic functions to this series.

Let $A(z)$ be an antianalytic function in the domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \leq c$ for all $z \in D$, where $c < 1$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$*–analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1}$$

We denote by $\mathcal{O}_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D.

According to, the function $\psi(a,z) = z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ is an $A(z)$–analytic function. The following set $L(a,r) = \{|\psi(a,z)| < r\}$ is an open subset of arbitrary convex domain D. For sufficiently small $r > 0$, this set compactly lies in D and contains the point a. This set $L(a,r)$ is called the $A(z)$*–lemniscate* centered at the point a. The lemniscate $L(a,r)$ is a simply - connected set (see [2]).

Let $L(a,r) \subset\subset D$. If $f(z) \in \mathcal{O}_A(L(a,r)) \bigcap C\left(\bar{L}(a,r)\right)$, then in $L(a,r)$ the function $f(z)$ is expanded in a Taylor series:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(a,z), \tag{2}$$

where $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\psi(a,\xi))^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right), 0 < \rho < r, k = 0,1,2,\ldots$ (see [2]).

Now we will look at some examples:

1. $f(z) = e^{\psi(a,z)}$ functions are given. Let's calculate the value of the function in the n–th order derivative of $f^{(n)}(a)$.

First, we show that this function is an $A(z)$–analytic function. To do this, we put this function into equation (1):

$$\frac{\partial e^{\psi(a,z)}}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial e^{\psi(a,z)}}{\partial z} = e^{\psi(a,z)}\left(\frac{\partial \psi(a,z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial \psi(a,z)}{\partial z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(z) \in \mathcal{O}_A(L(a,r)).$$

We also expand this function $e^{\psi(a,z)} \in \mathcal{O}_A(L(a,r)) \bigcap C\left(\bar{L}(a,r)\right)$ into a Taylor series using relation (2):

$$f(z) = e^{\psi(a,z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n(a,z)}{n!}.$$

Now we calculate the derivative function:

$$\left(e^{\psi(a,z)}\right)' |_{z=a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n(a,z)}{n!}\right)' |_{z=a} = 1, \ldots$$

$$\left(e^{\psi(a,z)}\right)^{(n)} |_{z=a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n(a,z)}{n!}\right)^{(n)} |_{z=a} = 1.$$

2. We expand these $A(z)$–analytic functions $f(z) = \frac{1}{(\psi(a,z)+1)(\psi(a,z)-2)}$ into a Taylor series at $z = a$ points as follows:

First, we split the function expression into two parts:

$$\frac{1}{(\psi(a,z)+1)(\psi(a,z)-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\psi(a,z)-2} - \frac{1}{\psi(a,z)+1}\right). \tag{3}$$

Let's expand each fraction into a separate Taylor series:

$$\frac{1}{\psi(a,z)-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\psi(a,z)}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi(a,z)}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^n(a,z)}{2^{n+1}}.$$

This will be the convergence of our Taylor series in $L(a,2) = \{|\psi(a,z)| < 2\}$ sets.

Now we expand the second fraction in line (3) into a Taylor series:

$$\frac{1}{\psi(a,z)+1} = \frac{1}{1-(-\psi(a,z))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\psi^n(a,z).$$

This series converges in $L(a,1) = \{|\psi(a,z)| < 1\}$ sets.

Finally, we expand the given $f(z)$ functions into a Taylor series in general as follows:

$$\frac{1}{(\psi(a,z)+1)(\psi(a,z)-2)} = \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^n(a,z)}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\psi^n(a,z)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\psi^n(a,z).$$

Our last series will be convergent in set $L(a,1) = \{|\psi(a,z)| < 1\}$. It will also be $f(z) \in \mathcal{O}_A(L(a,1)) \bigcap C\left(\bar{L}(a,1)\right)$.

REFERENCES

1. Polya, G. and Szego, P. Problems and theorems from analysis. Moscow: Nauka, 1978.
2. Sadullayev, A. and Zhabborov, N.M. On a class of A–analytic functions, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. Vol. 9, No. 3. P. 374–383.

The Spectrum of Discrete Schrödinger Operator on a one Dimensional Kagome Lattice

Muminov M.I.[1,2], Usmonov A.A.[2]

[1]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
[2]Samarkand Branch of the Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Samarkand, Uzbekistan;
mmuminov@mail.ru, aktamusmonov77@gmail.com

We first give a descriptions of the one-dimensional Kagome lattice and a discrete Schrödinger operator on this lattice [1].

Discrete Laplacian on a one-dimensional Kagome lattice. Let $\mathbb{Z}^2$ be a two-dimensional integer lattice. One-dimensional Kagome lattice is defined as

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3,$$

where

$$\mathcal{V}_j = p_j + \mathcal{L},\ \mathcal{L} := \{\mathrm{v}(n): \quad \mathrm{v}(n) = \sum_{j=1}^{2} n_j \mathrm{v}_j,\ n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\},$$

$$\mathrm{v}_1 := (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \mathrm{v}_2 := \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), p_1 := (0,0), p_2 := (\frac{1}{2}, 0), p_3 := (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

We put $N_a := \{y \in \mathcal{V} : |a_j - y| = \frac{1}{2}, y \notin \nu_j\}$. This set is called the set of points adjacent to $a \in \mathcal{V}$ and equals to
$N_{a_1} = \{a_1 \pm \frac{\mathrm{v}_1}{2}, a_1 \pm \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2}{2}\}$, $N_{a_2} = \{a_2 \pm \frac{\mathrm{v}_2}{2}, a_2 \pm \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2}{2}\}$, $N_{a_3} = \{a_3 \pm \frac{\mathrm{v}_1}{2}, a_3 \pm \frac{\mathrm{v}_2}{2}\}$.

We define a bijection $\mathcal{V} \ni a \to n \in \mathbb{Z}^2$ such that $a = v(n(a))$,

$$n : v = \sum_{j=1}^{2} n_j \mathrm{v}_j \leftrightarrow n = (n_1, n_2).$$

Passing to the Fourier series, $-\hat{\Delta}_\Gamma$ becomes

$$H_0(x) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix_1} e^{-ix_2} & 1 + e^{ix_1} \\ 1 + e^{-ix_1} e^{ix_2} & 0 & 1 + e^{ix_2} \\ 1 + e^{-ix_1} & 1 + e^{-ix_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2) = L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2)$ where $\mathbb{T} = [-\pi; \pi]$. The discrete Schrödinger operator H on the Kagome lattice V acts in $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$ in the form [1]

$$H = H_0 + V,$$

where H_0 is a multiplication operator by matrix $H_0(x)$ and

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix},$$

V_i is an integral operator with kernel $v_i(x, s)$, i.e.

$$(V_i f_i)(x) = \int_{\mathbb{T}^2} v_i(x, s) f_i(t) dt,$$

here $v_i(x, s)$ is continuous function on $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$.

We denote by $\sigma_p(H_0(x))$ the set of all eigenvalues of the matrix $H_0(x)$, then $\sigma(H_0) = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{T}^d} \sigma_p(H_0(x))$. A direct computation gives

$$\sigma_p(H_0(x)) = \{\lambda : (\frac{1}{2} - \lambda)(\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\beta(x)}{8}) = 0\},$$

where

$$\beta(x) = 1 + cos x_1 + cos x_2 + cos(x_1 - x_2).$$

The following lemma is given in [1]

Lemma 1. *1. The spectrum of H_0 is $\sigma(H_0) = [-1; \frac{1}{2}]$.*
2. $H_0(x)$ has an eigenvalue $\frac{1}{2}$ with eigenvector $s(x)\mathbf{v}(x)$, where $s(x)$ is an arbitrarily scalar

function on $\mathbb{T}^2$ *and* $\mathbf{v}(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, *where* $\varphi_1 = 2cosx_2 - 2$, $\varphi_2 = 1 - e^{-ix_1} - e^{ix_2} + e^{-ix_1+ix_2}$, $\varphi_3 = 1 - e^{-ix_1+ix_2} - e^{-ix_2} + e^{-ix_1}$.

The perturbation V of the operator H_0 is a self-adjoint compact operator. Therefore in accordance with the Weyl theorem about the invariance of the essential spectrum under the compact perturbations, the essential spectrum of the operator H coincides with the spectrum of H_0.
Thus

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = [-1; \frac{1}{2}].$$

Let $\mathcal{H}_0 \in L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$ be a linear space given as
$\mathcal{H}_0 = \{S(x)\mathbf{v} : S(x) \in L_2(\mathbb{T}^2)\}$, $\mathbf{v} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)\}$.

Lemma 2: $\mathcal{H}_0$ *is a Gilbert subspace of* $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$.

We denote by P_0 a projection operator to $\mathcal{H}_0$.

Theorem. *Let* V *be non-negative operator and* $rank(P_0VP_0) = n$. *Then the operator* H *has at least* n *eigenvalues lying to the right of the essential spectrum* $\sigma_{ess}(H)$.

REFERENCES

1. K. Ando, I. Hiroshi, and M. Hisashi, Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices, Annales Henri Poincaré, Springer International Publishing 17, (2016).

2. M. I. Muminov, Positivity of the two-particle Hamiltonian on a lattice, Theoret. and Math. Phys. 153(3), 1671–1676 (2007).

COUPLED ISING-POTTS MODEL WITH EXTERNAL FIELD ON CAYLEY TREES

Mustafoyeva Z.E.

V.I.Romanovskii Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
mustafoyeva53@gmail.com

In this talk we derive the Kolmogorov's compatible functional equations for non-zero external field and establish existence of Gibbs measures.

A Cayley tree denoted by Γ^k and defined as an infinite tree of order $k \geq 1$. This tree is a graph without cycles, in which exactly $k+1$ edges emanate from each vertex. Formally, $\Gamma^k = (V, L)$, where V represents the set of vertices and L denotes the set of edges.

Two vertices x and y are said to be *nearest-neighbors* if there exists an edge $l \in L$ that directly connects them and denoted by $\langle x, y\rangle$. A sequence of nearest-neighbor pairs

$$\langle x, x_1\rangle,\ \langle x_1, x_2\rangle,\ \ldots,\ \langle x_{d-1}, y\rangle,$$

is defined as a *path* connecting x to y. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is determined as the number of edges comprising the path between the vertices x and y. For a fixed vertex $x^0 \in V$, the *root*, we define the sets

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m,$$

where W_n represents the collection of vertices that are exactly n edges away from the root. For any vertex $x \in W_n$, we denote by

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} \mid d(x, y) = 1\},$$

the set of its direct successors [1].

We consider models in which each vertex of the tree is assigned a *spin* taking values in a given set Φ. For any subset $A \subset V$, a *configuration* on A is defined as an arbitrary function $\sigma_A : A \to \Phi$. The set of all such configurations on A is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$. A configuration σ on V is defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$, and the set of all configurations on V is denoted by $\Omega := \Phi^V$. The restriction of a configuration σ to a subset $\Lambda \subseteq V$ is written as $\sigma_\Lambda \in \Phi^\Lambda$.

Now we analyze two types of spin models defined on the vertices of the Cayley tree [3]. The first is the Ising model, where the spins $s(x)$ take values in the set $I = \{-1, 1\}$. The second is the Potts model, for which the spins $\sigma(x)$ assume values in $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$. A *coupled configuration* (s, σ) on V is consequently defined as a function

$$x \in V \mapsto (s(x), \sigma(x)) \in I \times \Phi,$$

and the corresponding set of all configurations is given by $I^V \times \Phi^V$.

The Hamiltonian corresponding to the coupled Ising-Potts model with the external field is given by

$$H(s, \sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} s(x)s(y)\, \delta_{\sigma(x),\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} s(x)\, \delta_{1,\sigma(x)}, \tag{1}$$

where $J \in \mathbb{R}$ is a coupling constant and $\alpha \in \mathbb{R}$ is an external field. Here, δ_{ij} is the Kronecker function.

We define the finite-dimensional distribution of a probability measure μ in the volume V_n as

$$\mu_n(s_n, \sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{ -\beta H_n(s_n, \sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{s(x),\sigma(x),x} \right\}, \tag{2}$$

where $\beta = 1/T$ represents the inverse temperature with $T > 0$, and Z_n is the normalizing factor. The term

$$\{h_x = (h_{-1,1,x}, \ldots, h_{-1,q,x}; h_{1,1,x}, \ldots, h_{1,q,x}) \in \mathbb{R}^{2q}, x \in V\} \tag{3}$$

denotes a collection of vectors associated with the vertices of the Cayley tree.

The probability distributions μ_n are said to be *compatible* if, for all $n \geq 1$ and for every configuration $s_{n-1} \in I^{V_{n-1}}$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$, the following consistency condition holds:

$$\sum_{(w_n,\omega_n) \in I^{W_n} \times \Phi^{W_n}} \mu_n(s_{n-1} \vee w_n, \sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(s_{n-1}, \sigma_{n-1}),$$

where the symbol $\vee$ denotes the concatenation of configurations. This compatibility condition ensures the existence of a unique probability measure μ on the infinite-volume space Ω, which serves as an extension of the sequence of finite-volume distributions $\{\mu_n\}$.

In this case, by Kolmogorov's extension theorem on complete and separable metric space (Ω, ρ) (see [2]), there exists a unique measure μ on $I^V \times \Phi^V$ such that, for all n and $s_n \in I^{V_n}$, $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$,

$$\mu(\{(s, \sigma)|_{V_n} = (s_n, \sigma_n)\}) = \mu_n(s_n, \sigma_n).$$

Such a measure is called a splitting Gibbs measure (SGM) corresponding to the Hamiltonian (1) and vector-valued functions (3). The following theorem describes conditions on h_x guaranteeing compatibility of $\mu_n(s_n, \sigma_n)$.

Theorem 1. The probability distributions $\mu_n(s_n, \sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, defined in (2) are said to be compatible iff for every vertex $x \in V$, the following system of equations is satisfied:

$$z_{\epsilon,i,x} =$$

$$\prod_{y\in S(x)} \frac{(1-\theta^{-\epsilon})(\theta^{\epsilon}e^{\alpha\beta\delta_{1i}}z_{1,i,y}-e^{-\alpha\beta\delta_{1i}}z_{-1,i,y})+\sum_{j=1}^{q-1}(z_{-1,j,y}+z_{1,j,y})+z_{1,q,y}+1}{\theta+\theta^{-1}z_{1,q,y}+\sum_{j=1}^{q-1}(z_{-1,j,y}+z_{1,j,y})},$$

$$z_{1,q,x}=\prod_{y\in S(x)} \frac{(1-\theta^{-1})(\theta z_{1,q,y}-1)+\sum_{j=1}^{q-1}(z_{-1,j,y}+z_{1,j,y})+z_{1,q,y}+1}{\theta+\theta^{-1}z_{1,q,y}+\sum_{j=1}^{q-1}(z_{-1,j,y}+z_{1,j,y})},$$

where $\epsilon=-1,1$, the quantities $z_{\epsilon,i,x}=\exp\big(h_{\epsilon,i,x}-h_{-1,q,x}\big), \quad i=1,\dots,q-1$, and $\theta=\exp(\beta J)$.

REFERENCES

1. U.A.Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci. Publ., 2013.
2. F.H.Haydarov. Kolmogorov extention theorem for non-probability measures on Cayley trees. Reviews in Math. Phys., 2024, Vol.36, No.6, pp. 2450010-1–2450010-12.
3. F.H.Haydarov, B.A.Omirov, U. A.Rozikov. Coupled Ising-Potts model: Rich sets of critical temperatures and translation-invariant Gibbs measures, arXiv:2502.12014v1.

ON POSITIVE FIXED POINTS OF HAMMERSTEIN-TYPE INTEGRAL EQUATIONS

Nodirov Sh.D., Eshkabilov Yu.X.

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
shoh0809@mail.ru, yusup62@mail.ru

In this paper, we study a class of Hammerstein-type integral equations that naturally arise in the analysis of Gibbs measures for models with spin values taken from a continuum set on the Cayley tree. We establish the existence and uniqueness of nontrivial positive fixed points of such equations.

Integral equations play an important role in modern analysis. Research in this area often focuses on the existence, uniqueness, multiplicity and structure of solutions (see [4]). In the present work we consider a family of Hammerstein-type integral equations which appear naturally in the study of translation-invariant Gibbs measures for models with uncountable spin values on a Cayley tree (see [1]).

We work on the interval $[0,1]$ and denote by $C[0,1]$ the Banach space of real continuous functions on $[0,1]$ endowed with the sup-norm. We write

$$C_+[0,1]=\{f\in C[0,1]: f(t)\geq 0 \text{ for all } t\in[0,1]\},$$

$$C_>[0,1]=\{f\in C[0,1]: f(t)> 0 \text{ for all } t\in[0,1]\}.$$

We consider the Hammerstein-type integral equation

$$f(t)=\int_0^1 K(t,u)F(u,f(u))\,du+v(t),$$

where $K\in C([0,1]\times[0,1])$ is the kernel, $F:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a nonlinear mapping, and $v\in C[0,1]$ is a given function.

In this paper we concentrate on the particular case $v\equiv 0$ and $F(u,x)=x^k$ for an integer $k\geq 2$. Thus we study

$$f(t)=\int_0^1 K(t,u)f^k(u)\,du, \qquad k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{1}$$

When the kernel K is continuous and strictly positive on $[0,1]\times[0,1]$, the number of positive solutions of (2) is closely related to the analysis of Gibbs measures for models on the Cayley tree (see [1-3]).

A special case we shall often use is a kernel of the symmetric form

$$K(t,u) = \varphi(u)\phi(t) + \varphi(t)\phi(u), \tag{2}$$

with continuous functions $\varphi, \phi \in C_{>}[0,1]$ (strictly positive continuous functions). For this degenerate-type kernel the integral operator becomes tractable and one can deduce sharper statements.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Suppose $\varphi, \phi \in C_{>}[0,1]$ and let K be given by (2). Then the integral equation*

$$f(t) = \int_0^1 \big(\varphi(u)\phi(t) + \varphi(t)\phi(u)\big) f^k(u)\, du$$

has a unique nontrivial solution $f \in C_{>}[0,1]$ (i.e., a unique strictly positive continuous fixed point).

Acknowledgements. The authors acknowledge support from the Applied Research Grant “Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators”, Grant No. AL-9224093956.

REFERENCES

1. Rozikov U.A. and Eshkabilov Yu.Kh.: On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. Math. Phys. Anal. Geom. 13, (2010), 275-286.
2. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. Positivity, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 929–943.
3. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive Fixed Points of Hammerstein Integral Operators with Degenerate Kernel. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2024; 166(3): 437-449. (In Russ.)
4. Horvat-Marc A. Positive solutions for nonlinear integral equations of Hammerstein type. Carpathian J. Math., 2008, vol. 24, no. 2, pp. 54–62.

On the dynamics of a Lotka-Volterra type system with equal dominance.

Norov A.Z., Khamrayev A.Yu., Jumayev J.N.
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
norov.asliddin@mail.ru, khamrayev-ay@yandex.ru, jahongirjumayev@mail.ru

In this thesis, we consider the dynamics of a Lotka-Volterra type system with equal dominance.

From the analysis of experimental data, Hoffmann [1] proposed that for the phage-bacteria interaction the equations be modified such that a power law applies to the LV equations. The modified LV equations are therefore:

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(\alpha - \beta y^p\right), \\ \dot{y} = y^p\left(-\gamma + \delta x\right). \end{cases} \tag{1}$$

We will assume the inequality $p > 1$.

A discrete analogy of the generalized LV equations (1) model for $p = 2$ can be considered as follows

$$\begin{cases} x' = (1+\alpha)\, x - \beta x y^2, \\ y' = y - \gamma y^2 + \delta x y^2. \end{cases} \tag{2}$$

One of the simplest cases of the discrete generalized LV model (2) is the following evolution operator $V : S^1 \to S^1$ of the population on the one dimensional simplex $S^1 = \{(x,y) \in R^2 : \ x, y \geq 0, \ x+y=1\}$

$$V_a : \begin{cases} x' = x - axy^2 \\ y' = y + axy^2 \end{cases}$$

where $a \in [-1,1]$.

To ensure that both species will have equal domination we define an evolution operator, $V_{a,b} : z = (x,y) \in S^1 \to z' = (x', y') \in S^1$ by

$$V_{a,b} : \begin{cases} V_a(z), & if \ \ x \leq 1/2 \\ V_b(z), & if \ \ x > 1/2 \end{cases} \tag{3}$$

We note that the probabilities $P_{ijk,l}$ mentioned in are independent on $x \in S^{m-1}$, but for operator (3) we have $P_{111,1} = 1 - P_{111,2} = P_{222,2} = 1 - P_{222,1} = 1, \quad P_{112,1} = 1 - P_{112,2} = 2/3$ and the remaining coefficients depend on the points $z = (x,y)$ of the simplex S^1:

$$P_{122,1} = 1 - P_{122,2} = \begin{cases} \frac{1-a}{3}, & if \ \ x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1+b}{3}, & if \ \ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Using the equality $x+y=1$, this operator can be reduced to the function $f_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ defined by

$$f_{a,b} = \begin{cases} x\left(1 - a(1-x)^2\right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x\left(1 + b(1-x)^2\right), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{4}$$

where $a, b \in [-1,1]$. It is clear that, the function is a piecewise-continuous, that's, it is discontinuous at the point $x = \frac{1}{2}$ when $(a,b) \neq (0,0)$ and, is smooth at each semi interval. Note that in the case $a = b = 0$ the function is trivial, because $f_{a,b} = x$, $x \in [0,1]$. Therefore, below we do not consider this case. In case $a = -b \neq 0$, we have $f(x) = f_{a,-a} = x\left(1 - a(1-x)^2\right), \ x \in [0,1]$. The fixed points of this function are 0 and 1. It is easy to see that 1) The point 0 is attracting for f, if $a \in (0,1]$; repelling if $a \in [-1,0)$. 2) The point 1 is non-hyperbolic.

Moreover, using monotonicity of f one can show that for any initial point $[x^{(0)} \in (0,1)$ the following limits hold

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = \begin{cases} 1, & if \ \ a \in [-1,0), \\ 0, & if \ \ a \in (0,1]. \end{cases}$$

Thus value 0 is a critical point where the character of the dynamical system changes. Therefore, we consider the following possible cases:

(1) $a = 0, \ b \neq 0$; (2) $a \neq 0, \ b = 0$; (3) $a \neq 0, \ b \neq 0$.

In case $a = 0, \ b \neq 0$ the function is

$$f_{0,b} = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x\left(1 + b(1-x)^2\right), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Proposition 1. For the dynamical system generated by (5) the following assertions hold: 1. $Fix(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$; 2. If $0 < b \leq 1$ then $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = 1$, for any $x^{(0)} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$;

3. If $-1 \le b < 0$ then for any $x^{(0)} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, there exist $n \in N$ and $p \in \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{8}, \frac{1}{2}\right)$ such that $f^n(x) = p, \;\; f^{n+1}(x) = f(p) = p$.

In case $a \neq 0, \; b = 0$ the function is

$$f_{a,0} = \begin{cases} x\left(1 - a(1-x)^2\right), & 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

Proposition 2. For the dynamical system generated by (6) the following assertions hold: 1. $Fix(f) = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$; 2. If $0 < a \le 1$ then $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = 0$, for any $x^{(0)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; 3. If $-1 \le a < 0$ then for any $x^{(0)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, there exist $n \in N$ and $p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{a}{8}\right]$ such that $f^n(x) = p, \;\; f^{n+1}(x) = f(p) = p$.

Acknowledgements. The work is supported by the applied Project "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956 of The Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

REFERENCES

1. Rozikov U.A., Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, World Sci. Publ, (2020), (Singapore).
2. Hoffmann K H, Rodriguez-Brito B, Breitbart M, Bangor D, Angly F, Felts B, Nulton J, Rohwer F and Salamon P 2006 The Structure of Marine Phage Populations.
3. Hofbauer J and Sigmund K 1992 The Theory of Evolution and Dynamical Systems (Cambridge: Cambridge University Press).
4. Gavin C., Pokrovskii A., Prentice M., Sobolev V. Jour. of Phys: Conf. Ser, 55 (2006) 80–93.

APPLICATION OF $A(z)$–ANALYTIC FUNCTIONS TO SOME EXAMPLES

Oripova S.Q.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
oripovasadafbonu@mail.ru

In this thesis we will consider the application of $A(z)$–analytic functions using some example. We will use the properties of $A(z)$–analytic functions in an example.

Let $A(z)$ be an antianalytic function in the domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \le c$ for all $z \in D$, where $c < 1$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$*–analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1}$$

We denote by $\mathcal{O}_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D.

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$-analytic functions defined in the domain D. Since an antianalytic function is infitely smooth, then $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ (see [1]).

In this case, the following takes place:

Theorem 1 (see [2], analogue of Cauchy integral theorem). *If* $f \in O_A(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$, *where* $D \subset \mathbb{C}$ *is a domain with smooth* ∂D, *then*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0.$$

Now we assume that the domain $D \subset \mathbb{C}$ is convex, and $\xi \in D$ is a fixed point in it. Since the function $\overline{A}(z)$ is analytic, the integral

$$I(z) = \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$$

is independent of the path of integration; it coincides with the antiderivative $I'(z) = \overline{A}(z)$. Consider the function

$$K(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi+I(z)},$$

where $\gamma(\xi,z)$ is a smooth curve which connects the points $\xi, z \in D$ (see [3]).

Theorem 2 (see [3]). *$K(z,\xi)$ is an $A(z)$-analytic function outside of the point $z=\xi$, i.e. $K(z,\xi) \in O_A(D\backslash\{\xi\})$. Moreover, at $z=\xi$ the function $K(z,\xi)$ has a simple pole.*

Remark 1 (see [3]). *If a simply connected domain $D \subset \mathbb{C}$ is not convex, then the function*

$$\psi(\xi,z) = z - \xi + I(z),$$

although well defined in D, may have other isolated zeros except ξ : $\psi(\xi,z)=0$ for except $z \in P\backslash\{\xi,\xi_1,\xi_2,...\}$. Consequently, $\psi \in O_A(D)$, $\psi(\xi,z) \neq 0$ when $z \notin P$ and $K(z,\xi)$ is an $A(z)$-analytic function only in $D\backslash P$, it has poles at the points of P. Due to this fact we consider the class of $A(z)$-analytic functions only in convex domains.

According to, the function $\psi(\xi,z) = z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ is an $A(z)$–analytic function. The following set $L(a,r) = \{|\psi(a,z)| < r\}$ is an open subset of arbitrary convex domain D. For sufficiently small $r>0$, this set compactly lies in D and contains the point a. This set $L(a,r)$ is called the $A(z)$–*lemniscate* centered at the point a. The lemniscate $L(a,r)$ is a simply - connected set (see [3]).

Now we will look at some examples:

1. If $f(z) \in O_A(L(a,r))$ is bounded, then for two points $z_1, z_2 \in L(a,r)$ prove the following inequality:

$$\exists M>0, \int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} |f(\xi)||d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}| \le M|\psi(z_1,z_2)|.$$

Our function is bounded by the condition: $|f(z)| \le M$.

We also apply the fact that the function is bounded by the integral:

$$\int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} |f(\xi)||d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}| \le \int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} M|d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}| = M\int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} |d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}| =$$

$$= M|\psi(a,z_1) - \psi(a,z_2)| = M|\psi(z_1,z_2)|.$$

2. Show the irrelevant transform function in the lemniscate $L(a,r)$ of the following functions:

1) $f(z) = \frac{1}{\psi(a,z)}, \gamma_\varepsilon = \{z : |\psi(a,z)| = \varepsilon\}$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz + A(z)d\bar{z}}{\psi(a,z)} = \infty.$$

2) $f(z) = \frac{1}{\psi(a,z)} - \frac{1}{\psi(a,z)-r}, z \in \{L(a,r)\setminus a\}$,

$$\gamma_\rho^1 = \{z : |\psi(a,z)| < \rho\}, \quad \gamma_\rho^2 = \{z : |\psi(a,z) - r| < \rho\},$$

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho^1} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = \infty, \quad \lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho^2} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = \infty.$$

3) $f(z) = \frac{1}{\psi(a,z)(1-\psi^2(a,z))}, z \in \{L(a,r) \setminus a\}$,

$$\gamma_\rho^1 = \{z : |\psi(a,z)| < \rho\}, \gamma_\rho^2 = \{z : |\psi(a,z) - r| < \rho\}, \gamma_\rho^3 = \{z : |\psi(a,z) + r| < \rho\},$$

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho^1} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = \infty, \lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho^2} f(z)(dz + A(z)d\bar{z})$$

$$= \infty, \lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho^3} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = \infty.$$

REFERENCES

1. Vekua, I.N. Generalized analytical functions. Moscow: Nauka, 1988.

2. Zhabborov, N.M. and Otaboyev, T.U. Cauchy's theorem for $A(z)$-analytic functions, Uzbek Mathematical Journal. 2014. Vol. 4, P. 15–18.

3. Sadullayev, A. and Zhabborov, N.M. On a class of A–analytic functions, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. Vol. 9, No. 3. P. 374–383.

TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES FOR THE BOLTZMANN MODEL ON THE CAYLEY TREE

Pardayev Sh.A.[1], Xalilov A.Z.[2]

Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan;

Karshi state university, Karshi, Uzbekistan;
shohzodmath@gmail.com, akbarx1991@gmail.com

A Boltzmann Machine is a stochastic, energy-based neural network that operates on principles from statistical mechanics and is primarily used for unsupervised learning tasks. The network consists of binary units (neurons) that can exist in states $s_i \in \{0, 1\}$ or $\{-1, +1\}$, connected through symmetric weights $w_{ij} = w_{ji}$ with no self-connections ($w_{ii} = 0$). Each unit has an associated bias term a_i representing its activation tendency.

The system's behavior is governed by an energy function:

$$E(\mathbf{s}) = -\sum_{i<j} w_{ij}s_i s_j - \sum_i a_i s_i \tag{1}$$

where lower energy states are more probable. In the machine-learning context, this model is called a fully visible Boltzmann machine.

The probability distribution over states follows the Boltzmann distribution:

$$P(\mathbf{s}) = \frac{1}{Z}e^{-E(\mathbf{s})/T} \tag{2}$$

where Z is the partition function, that is $Z = \sum_{\mathbf{s}} e^{-E(\mathbf{s})/T}$ that normalizes probabilities and T represents the temperature parameter controlling the system's stochasticity.

The Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e. graph without cycles, each vertex of which has exactly $k+1$ edges. Fix a vertex $x_0 \in \Gamma^k$. Define the following sets (see [1]):

$$W_n = \{x \in V : d(x, x_0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \quad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n\},$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in V_n.$$

Define a finite-dimensional distribution of a probability measure μ in the volume V_n as

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\}, \tag{3}$$

where $\beta = 1/T$, $T > 0$ is temperature, Z_n^{-1} is the normalizing factor, $\{h_x \in \mathbb{R}, x \in V\}$ is a collection of real numbers, and

$$H_n(\sigma_n) = -\sum_{\langle x_i, x_j\rangle \in L_n} w_{ij}\sigma(x_i)\sigma(x_j) - \sum_i a_i \sigma(x_i) \tag{4}$$

is the Hamiltonian of the Boltzmann model.

Theorem 1. *Probability distributions $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, in (3) are compatible iff for any $x \in V$ the following equation holds:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta). \tag{5}$$

Here, $\theta = e^{\beta w_{ij}}$, $f(h, \theta) = \ln \frac{1+\theta e^h}{1+e^h}$, and $S(x)$ is the set of direct successors of x on Cayley tree of order k.

Since the set of vertices V has the group representation G_k. Without loss of generality we identify V with G_k, i.e., we sometimes replace V with G_k.

We study translation-invariant solutions of (5).

Definition 1. *Let K be a subgroup of $G_k, k \geq 1$. We say that a function $h = (h_x \in R : x \in G_k)$ is K-periodic if $h_{yx} = h_x$ for all $x \in G_k$ and $y \in K$. A G_k-periodic function h is called translation-invariant.*

Definition 2. *A Gibbs measure is called K-periodic if it corresponds to K-periodic function h.*

Observe that a translation-invariant Gibbs measure is G_k-periodic. Firstly, we shall find all translation-invariant solutions h_x to the functional equation (5), ferromagnetic Boltzmann model. Note that such solutions are constant functions, $h_x = h, \forall x \in G_k$. In this case from (5) we get

$$h = kf(h, \theta), \quad \theta > 0. \tag{6}$$

The following properties of the function $f(h, \theta)$ are obvious:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x, \theta) = \ln\theta, \lim_{x\to-\infty} f(x, \theta) = 0$;
2. $\frac{d}{dx}f(x, \theta) < 0$ if $\theta < 1$, $\frac{d}{dx}f(x, \theta) = 0$ if $\theta = 1$, $\frac{d}{dx}f(x, \theta) > 0$ if $\theta > 1$.

From these properties it follows that equation (6) has unique solution h^* that $h^*(h^* < 0)$, if $\theta < 1$, $h^* = 0$, if $\theta = 1$ and $h^*(h^* > 0)$ if $\theta > 1$.

There are as many Gibbs measures as there are solutions to equation (5); consequently, if the solution to (5) is unique, then the Gibbs measure is also unique. Namely,

Theorem 2. *For the ferromagnetic Boltzmann model on the Cayley tree of order $k \geq 2$ the following statement is true. If $T \in R$ then there is unique translation-invariant Gibbs measure μ_0.*

From monotonicity of $f(h, \theta)$ with respect to h, one gets:

Lemma 1. *$f(h, \theta) = f(u, \theta)$ if and only if $h = u$.*

Let $G_k^{(2)}$ be the subgroup in G_k consisting of all words of even length. Clearly, $G_k^{(2)}$ is a subgroup of index 2.

Theorem 3. *Let K be a normal subgroup of finite index in G_k. Then each K-periodic Gibbs measure for the Boltzmann model is either translation-invariant or $G_k^{(2)}$-periodic.*

REFERENCES

1. Rozikov U.A. Gibbs Measure on Cayley trees. World Scientific, Singapore, 2013, 404.
2. Bleher P.M., Ruiz J. and Zagrebnov V.A., On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice. Journ. Statist. Phys. 79, 1995, 473-482.
3. Azencott R. Synchronous Boltzmann Machines and Gibbs Fields: Learning Algorithms. Neurocomputing. NATO ASI Series F, vol 68, Springer, Berlin, Heidelberg, 1990, 51–62.

ON CONSTRUCTIVE DESCRIPTION OF NON-PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE SOS MODEL ON A CAYLEY TREE

Rahmatullaev M.M.[1], Abraev B.U.[2]

Institute of Mathematics after named V.I.Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan;
Chirchik State Pedagogical University, Chirchik, Uzbekistan;
mrahmatullaev@rambler.ru, abrayev89@mail.ru

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be the Cayley tree, where each vertex has $k+1$ neighbors with V being the set of vertices and L the set of edges (see [1]). For an arbitrary vertex $x_0 \in V$, we put $W_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) \leq n\}$, where $d(x, y)$ is the distance between x and y in the Cayley tree, i.e., the number of edges of the path between x and y. Let $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(y, x) = 1\}$ be the set of direct successors of x. Let $\Phi := \{0, 1, 2, ..., m\}, m \geq 1$, and the configuration $\sigma \in \Phi^V$, i.e., $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$.

The SOS model is defined by the formal Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\ \sigma(x) - \sigma(y)\ |, \tag{1}$$

where $J \in \mathbb{R}$ and $\langle x, y\rangle$ stands for nearest neighbor vertices.

Let $h : x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, ..., h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ be a vector function of $x \in V \setminus \{x^0\}$. Consider a probability distribution $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n}:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}), \tag{2}$$

where $\sigma_n \in \Omega_{V_n},\ \beta = \frac{1}{T},\ T > 0$ is temperature and

$$Z_n = \sum_{\tilde\sigma_n \in \Omega_{V_n}} \exp(-\beta H(\tilde\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde\sigma(x),x}).$$

A probability distribution $\mu^{(n)}$ is said to be compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \tag{3}$$

where $\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n}$.

In this case, there is a unique measure μ on Ω such that $\mu(\{\sigma\mid_{V_n}=\sigma_n\})=\mu^{(n)}(\sigma_n)$, for all n and $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$. Such a measure is called a splitting Gibbs measure (SGM) corresponding to the Hamiltonian H and to the function $x\mapsto h_x, x\neq x_0$ [1].

The following statement gives a condition on h_x guaranteeing that the distribution of $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ is compatible.

Theorem 1. [2] *The probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n), n=1,2,\dots$ determined by the formula (2) are compatible iff for any $x\in V\setminus\{x^0\}$ the following equation holds:*

$$h^*_x=\sum_{y\in S(x)}F(h^*_y,m,\theta), \tag{4}$$

where $\theta=e^{J\beta},\beta=\frac{1}{T}$. Here $h^*_x=(h_{0,x}-h_{m,x},h_{1,x}-h_{m,x},\dots,h_{m-1,x}-h_{m,x})$ and $F(\bullet,m,\theta):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ is a vector function, i.e.

$$F(h,m,\theta)=(F_0((h,m,\theta),\dots,F_{m-1}(h,m,\theta))),\quad h=(h_0,h_1,\dots,h_{m-1}),$$

such that

$$F_i(h,m,\theta)=\ln\frac{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{|i-j|}e^{h_j}+\theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{m-j}e^{h_j}+1},\quad i=0,\dots,m-1. \tag{5}$$

Namely, for any boundary condition satisfying the functional equation (4) there exists a unique SGM.

We restrict ourselves to the case $m=2$. The set of vertices of a Cayley tree of order k is denoted by V^k. For $x\in V$ by $S_{k_0}(x)$ we denote arbitrary k_0 vertices of the set $S(x)$.

We define the set of vectors $h=\{h_x,\ x\in V\}$ as follows: If on the vertex x we have $h_x=\bar h$, then to the vertex $S_{a_1}(x)$ we put the value $h_x=\bar h$, to the other vertices $S_{a_2}(x)$ we put the value $h_x=\bar l$, to the other vertices $S_{a_3}(x)$ we put the value $h_x=\bar p$. If on the vertex x we have $h_x=\bar l$, then on the vertex $S_{b_1}(x)$ we put the value $h_x=\bar h$, on the remaining vertices $S_{b_2}(x)$ we put $h_x=\bar p$. If on the vertex x we have $h_x=\bar p$, then on the vertex $S_{c_1}(x)$ we put the value $h_x=\bar h$, on the remaining vertices $S_{c_2}(x)$ we put $h_x=\bar p$. Note that $a_1+a_2+a_3=k$, $b_1+b_2=k,\ c_1+c_2=k$. Using this construction for $\bar h=(0,h_2)$, $\bar l=(0,l_2)$ and $\bar p=(0,p_2)$ due to Theorem 1 we have

$$\begin{cases} h_2=a_1\,f(h_2)+a_2\,f(l_2)+a_3\,f(p_2),\\ l_2=b_1\,f(h_2)+b_2\,f(p_2),\\ p_2=c_1\,f(h_2)+c_2\,f(p_2).\end{cases} \tag{6}$$

where $f(x)=\ln\frac{\exp(x)+2\theta}{\theta^2+\theta\exp(x)+1}$.

Let $c_1\neq 0$, $\varphi(x)=\Big(b_2-\frac{b_1c_2}{c_1}\Big)f(x)+\frac{b_1}{c_1}x$,

$$\omega(x)=\Big(a_3-\frac{a_1c_2}{c_1}\Big)f(x)+a_2\,f\Big(\Big(b_2-\frac{b_1c_2}{c_1}\Big)f(x)+\frac{b_1}{c_1}x\Big)+\frac{a_1}{c_1}x$$

and

$$\psi(x)=c_1\,f\left[\Big(a_3-\frac{a_1c_2}{c_1}\Big)f(x)+a_2\,f\Big(\Big(b_2-\frac{b_1c_2}{c_1}\Big)f(x)+\frac{b_1}{c_1}x\Big)+\frac{a_1}{c_1}x\right]+c_2\,f(x).$$

Note that the function $\psi(x)$ is continuous and bounded. This implies that it has at least a fixed point, say, x^*.

Theorem 2. *Let $c_1 \neq 0$. If the condition*

$$|\psi'(x^*)| > 1$$

is satisfied, then for the SOS model there exist at least three Gibbs measures.

REFERENCES

1. U.A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees, World Scientific, Singapore, (2013).
2. U.A. Rozikov, Y.M. Suhov, Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree. Inf.Dim.An.,Quant.Prob. and Related Topics. Vol 9, No 3, 471–488, (2006).

UHF $AW*-$FACTORS

Rakhimov A.A.[1], Ramazonova L.D.[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
Karadeniz Technical University, Trabzon, Turkey;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
rakhimov@ktu.edu.tr, rlaylo2405@gmail.com

Let A be a real or complex *-algebra, and $S \subseteq A$ an arbitrary subset. The right-annihilator of S is defined as

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0, \forall s \in S\}.$$

and similarly, the left-annihilator of S is

$$L(S) = \{x \in A : xs = 0, \forall s \in S\}.$$

A *-algebra A is referred to as a *Baire* *-algebra when, for every subset $S \subseteq A$, there exists a projection g such that $R(S) = gA$.
For every subset S, we get $L(S) = R(S^*)^* = (hA)^* = Ah$. So there exists a projection g such that $L(S) = Ag$. Here $S^* = \{s^* \mid s \in S\}$.

A complex (respectively, real) C*-algebra A, which is also a Baire *-algebra is called a complex (respectively, real) *AW*-algebra*. A Banach *-algebra A over the field $\mathbb{C}$ is a *C*-algebra* provided that for all $a \in A$ the relation $\|aa^*\| = \|a\|^2$. A *-algebra M is defined to be a *W*-algebra* if there exists a Banach space M_* such that $(M_*)^* = M$. W*-algebras are also called *von Neumann algebras*. It is known that every W*-algebra is an AW*-algebra, although the converse implication fails in general.

A real C*-algebra is a real Banach *-algebra R for which two conditions are satisfied: for all $a \in R$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ and the element $(1 + a^*a)$ is invertible.
Moreover, a real C*-algebra R is called a *real W*-algebra* if the complexification $R + iR$ is a complex W*-algebra. Equivalently, this requires that R is weakly closed, contains the identity 1, and satisfied $R \cap iR = \{0\}$.

For a real or complex W*-algebra A, the center $Z(A)$ is the collection of all elements in A commuting with every other element of A. The algebra A is called a *factor* if its center $Z(A)$ is trivial. (see [1]).

Recall that [1] a factor M is called *hyperfinite* if there exists an increasing sequence $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of finite-dimensional subfactors of M containing the unit 1, such that $\bigcup_n M_n$ is weakly dense in M. It is known that, up to isomorphism, there exists a unique hyperfinite factor of type II_1, which we denote by R. An AW*-factor M is called an *AW*-McDuff factor* if $M \cong M\tilde{\otimes}R$ (see [2]).

Let A be a C*-algebra. A is called *uniformly hyperfinite* (UHF) of type $\{p_i\}$ if there exists a sequence $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of subfactors such that:

1) A_i is of type I_{p_i};

2) $A_{i-1} \subset A_i$;

3) $p_i \to \infty$ as $i \to \infty$;

4) A is the closure of $\cup_i A_i$.

In this case, it is clear that $p_i \mid p_{i+1}$.

The main results of the work are the followings theorems.

Theorem 1. If R is a real UHF AW*-factor of type II_1, then $R + iR$ is a von Neumann algebra, therefore R is a real von Neumann algebra.

Generally speaking, the more general result is true.

Theorem 2. Let A be a complex or real approximately finite dimensional AW*-factor of type II_1. Then A is a complex (respectively, real) factor type II_1.

REFERENCES

1. Ayupov, Sh.A., Rakhimov, A.A. Real $W*-$algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. Mauritius: VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, 2010. P. 138.
2. Fabian Fehlker. Quasitraces and $AW*$- bundles. Munster: Masterarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Master of Science, 2018.

The almost uniform and almost everywhere convergence of m-measurable operators relative to real W*-algebra

Rakhimov A.A.[1], **Tukhtasinov T.T.** [2]
National Univesity of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan;
rakhimov@ktu.edu.tr, toxirjontoxtasinov13@gmail.com

Let R be an algebra and let $P(R)$ be the set of all projections of R. By subadditive measure on R we mean a mapping $m : P(R) \to [0, \infty]$ with the following properties (see [1]):

i) $m(0) = 0$, and $m(p) = 0$ implies $p = 0$ (faithfulness);

ii) $p \leq q$ implies $m(p) \leq m(q)$ (monotonicity);

iii) $p \sim q$ implies $m(p) = m(q)$,

iv) $m(p \vee q) \leq m(p) + m(q)$ (subadditivity);

v) $p_n \uparrow p$ implies $m(p_n) \uparrow m(p)$.

Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ with the identity $\mathbb{1}$ is called a *real W*-algebra*, if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$ (see [2], [3]).

Let R be a real W*-algebra and let m be the subadditive measure on R. We extend the subadditive measure m at $A = R + iR$ as $\overline{m}(e) = m(s(f))$, where $e \in P(A)$ with $e = f + ig$ and $s(f)$ is the support of the element f.

Definition 1. Let R be a real W*-algebra and let m be the subadditive measure on R.
1) An operator a acting in a Hilbert space H $(a : D(a) \to H)$ is called *affiliated with the algebra* R (symbolically, $a\eta R$) if $au' = u'a$, for any unitary operator $u' \in R'$, where R' is commutant of R.
2) A linear subspace $D \subset H$ is called *affiliated with the algebra* R if $u'(D) \subset D$ for any unitary operator $u' \in R'$ and denoted by $D\eta R$.
3) A linear space $D\eta R$ is said to be *m-dense* in H if for any $\varepsilon > 0$ there exists a projection $p \in R$ such that $p(H) \subset D$ and $m(p^{\perp}) \leq \varepsilon$.
4) An operator a is called *m-measurable*, if (i) $a\eta R$; (ii) $D(a)$ is m-dense; (iii) a is closed.

By $L_m = L_m(R)$ we denote the set of all m-measurable (relative to algebra R) operators. Similarly, by $L_{\overline{m}} = L_{\overline{m}(A)}$ we denote the set of all $\overline{m}$-measurable (relative to algebra A) operators. Then it is directly proved that $L_{\overline{m}} = L_m + iL_m$.

Theorem 1. *R is dense in L_m the topology of m-convergence i.e. $\overline{R}^m = L_m$.*

Definition 2. 1) A sequence $\{a_n\}$ of m-measurable operators is said to converge to an m-measurable operator a *almost uniformly-m*, $a_n \xrightarrow{a.u.-m} a$ if, for any $\delta > 0$, there exists some $p \in P(R)$, $m(p^{\perp}) \leq \delta$, and $\|(a - a_n)p\| \to 0$.

2) A sequence $\{a_n\}$ is said to converge *nearly every where* m to a (denote it as $a_n \xrightarrow{n.e.-m} a$) if, for any $\varepsilon > 0$, there exists an increasing sequence $\{p_n\}$ of projections from R, such that $\|(a - a_n)p_n\| \leq \varepsilon$ and $m(p_n^{\perp}) \downarrow 0$.

The main results of the work are the following theorem.

Theorem 2. Let $\{a_n\} \subset L_m$, $a \in L_m$. Then 1) $a_n \xrightarrow{a.u.-m} a$ if and only if $a_n \xrightarrow{a.u.-\overline{m}} a$;
2) $a_n \xrightarrow{n.e.-m} a$ if and only if $a_n \xrightarrow{a.u.-m} a$.

References

1. Leszek J.Ciach. Subadditive measure on projectors of a von Neumann algebra, Mathematical dissertation. Institute of mathematics Polish Academy of Sciences Warszawa, Poland, 1990, 72p.
2. Ayupov Sh.A. , Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras, Kluw.Acad.Pub., MAIA. 418, 1997.
3. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. Real W*-algebras. Actions of groups and Index theory for real factors, VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Germany, Bonn. 138 p. (2010).

WEYL FORMULA AND ITS MODIFICATION FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN A MATRIX POLYHEDRON

Rasulova M.K.
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
maftunakomiljonovnaa@gmail.com

In this paper, we derive the Weyl formula and its modification for holomorphic functions in a matrix polyhedron

Let $z = (z^1, ..., z^n)$ be a vector composed of square matrices z^j of order m, i.e. $z = (z^1, ..., z^n) \in \mathbb{C}^n[m \times m]$ and

$$T_{n,r} = \{z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : r_j^2 I - z^k (z^k)^* > 0, 1 \leq k \leq n\}$$

be a matrix polycircle of radius $r = (r_1, ..., r_n)$ centered at the origin.

Let $f = (f^1(z), ..., f^n(z)) : \mathbb{C}^n[m \times m] \to \mathbb{C}^n[m \times m]$ be a holomorphic map in a domain $G \subset \mathbb{C}^n[m \times m]$ where, $z^k = (z_{ij}^k)$ and $f^k = (f_{ij}^k)$ are square matrices of order m.

Definition. *The inverse image $\Pi_{f,r} = f^{-1}(T_{n,r})$ of the matrix polycircle $T_{n,r}$ by the map $f = (f^1(z), ..., f^n(z)) : \mathbb{C}^n[m \times m] \to \mathbb{C}^n[m \times m]$ is called a matrix polyhedral set, if $\Pi_{f,r} \Subset G$. A matrix polyhedron is a connected components matrix polyhedral set.*

According to Hefer's theorem ([1]), for some neighborhood U of the matrix polyhedron $\Pi_{f,r}$ there are functions $P_{slt}^{ijk} \in Hol(U \times U)$ such that for all $(\zeta, z) \in (U \times U)$ the equalities

$$f_{ij}^k(\zeta) - f_{ij}^k(z) = \sum_{s,l=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} (\zeta_{sl}^t - z_{sl}^t) P_{slt}^{ijk}(\zeta, z), \quad i, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}.$$

We denote by $H(\zeta, z)$ the determinant of the matrix $P_{slt}^{ijk}(\zeta, z)$ of order $nm^2 \times nm^2$ the rows of which are numbered by i, j, k and the columns by s, l, t.

Theorem 1. *Let $h(z)$ be a holomorphic function in $\overline{\Pi}_{f,r}$. Then for any $z \in \Pi_{f,r}$, we have the following formula*

$$h(z) = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\zeta) H(\zeta, z) \dot{\zeta}}{det^m (f(\zeta) - f(z))} \tag{1}$$

where $\Gamma_{f,r} = \{\zeta \in G : f^j(\zeta)(f^j(\zeta))^* = r_j^2 I, j = \overline{1, n}\}$ is a polyhedral skeleton of $\Pi_{f,r}$ and $det^m(f(\zeta) - f(z)) = \prod_{k=1}^{n} det^m(f^k(\zeta) - f^k(z))$.

In the case $f(z) \equiv z$ formula (1) represents the Bokhner-Hua Loken formula for the matrix polycircle ([2]).

Let $\Pi_{f,r}$ be a matrix polyhedron in the domain $G \subset \mathbb{C}^n [m \times m]$ corresponding to the mapping $f = (f^1, ..., f^n) : G \to \mathbb{C}^n [m \times m]$. Let us fix a positive integer $0 \leq p \leq n$ and represent f as $f = (f', f'')$, where $f' = (f^1, ..., f^p)$,$f'' = (f^{p+1}, ..., f^n)$. Consider the matrix polyhedron

$$\begin{aligned} \Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)} = \quad & \{z \in G : r^2 I - f^j(z) \left(f^j(z)\right)^* > 0, j = \overline{1, p}, \\ & (r + \varepsilon)^2 I - f^k(z) \left(f^k(z)\right)^* > 0, k = \overline{p + 1, n}\} \end{aligned}$$

lying compactly in G. This polyhedron will be called *the ε-continuation of the matrix polyhedron $\Pi_{f,r}$ along f''.*

Theorem 2. *Let there be an $\Pi_{f,r}$-special analytic matrix polyhedron in the domain $G \subset \mathbb{C}^n [m \times m]$ and a $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$-th ε-extension along f''. Then there exists a smooth $\overline{\partial}$-closed form $\psi_z^{(p)}$ whose coefficients depend holomorphically on $z \in \Pi_{f,r}$, and for any function his holomorphic in the closure $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$ and for $z \in \Pi_{f,r}$ the following formula holds*

$$h(z) = \int_{\Gamma_{f,r}^{(p)}} \frac{\psi_z(\xi)}{\prod_{j=1}^{p} \det^m \left(f^j(\xi) - f^j(z)\right)},$$

where

$$\Gamma_{f,r}^{(p)} = \left\{ \xi \in \Pi_{f,r}^{(p)} : f^j(\xi) \left(f^j(\xi) \right)^* = r^2 I, j = \overline{1,p} \right\}$$

is the face of the matrix polyhedron $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$.

REFERENCES

1. Shabbat B.V., Introduction to complex analysis, Moscow:Science, 1976,part-2, 400 p
2. Khudayberganov G. Kytmanov A. Shaimkulov B., Complex Analysis in Matrix Domains, Krasnoyarsk, Siberian Federal University,2011-299 p.

ON THE 6-PERIODIC POINTS OF A VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Rozikov U.A.[1], Abdurakhimova SH.B.[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

[2] Faculty of Mathematics, Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;

rozikovu@yandex.ru, shakhnoza.karimova95@mail.ru

Let S^{m-1} be the m-dimensional simplex:

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

We consider dynamical system generated by the operator $W : (x, y, a) \in \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, (where $\mathcal{S} = S^1 \times [-1, 1]$) having the following form

$$W : \begin{cases} x' = x(1 - ay), \\ y' = y(1 + ax), \\ a' = f(a) \end{cases}$$

where $a \in [-1, 1]$, $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ is piecewise-linear function defined as

$$f(a) = \begin{cases} 2a + 2, & \text{if } \ -1 \leq a < -\frac{1}{2}, \\ -2a, & \text{if } \ -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, \\ 2a - 2, & \text{if } \ \frac{1}{2} < a \leq 1. \end{cases}$$

The operator W maps a point (x, y, a) in the space $\mathcal{S}$ to another point (x', y', a') in the same space. The first two equations describe how x and y evolve. The third equation $a' = f(a)$ determines the evolution of the parameter a, this is a one-dimensional discrete dynamical system independent of x and y.

A periodic point of period k for W is a point (x, y, a) such that $W^k(x, y, a) = (x, y, a)$, where W^k denotes k-th iteration the operator W (see [1], [2]). Since dynamics of a is independent, any periodic point of W must have an a component that is periodic for the map f. Therefore, to have periodic points for W, we need f to have periodic points.

Remark. If the operator W has a periodic point of period k, then the function f also has a periodic point of period k. But the fact that the function f has a periodic point of period k doesn't mean that the operator W also has a periodic point of period k.

Lemma. The equation $f^6(a) = a$ has 127 solutions (including a fixed point, 6 two-periodic points and remaining 120 are six-periodic points) in $[-1, 1]$ and 6-periodic points form twenty 6-periodic orbits.

Theorem. The operator W has twelve non-trivial 6-periodic orbits.

These periodic orbits will be useful to study full dynamics generated by the operator W.

REFERENCES

1. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical system. Westview Press, 2003.
2. Rozikov U.A. An introduction to mathematical billiards. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. - 2019.

Weighted α-subharmonic measure

Salayeva D.S.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
rafaelsanti476@gmail.com

In this work, we generalize the concept of the $\alpha-$subharmonic measure within the class of $\alpha-$subharmonic functions and present several properties of the weighted α-subharmonic measure.

Let α be closed and strictly positive differential form of degree $(n-1, n-1)$ in $D \subset \mathbb{C}^n$

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\ dz[j] \wedge d\overline{z}[k],$$

where $\alpha_{jk}(z) \in C^1(D)$, $dz[j] = dz_1 \wedge dz_2 ... \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge ... \wedge dz_n$, $d\overline{z}[k] = d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_2 ... \wedge d\overline{z}_{k-1} \wedge d\overline{z}_{k+1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_n$.

Definition 1. A function $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ is called $\alpha-$ subharmonic in D if it is upper semicontinuous in D and the current $dd^c u \wedge \alpha$ is positive, i.e., for any positive test function ω in D, we have

$$\int u\alpha \wedge dd^c\omega \geq 0.$$

The class of $\alpha-$subharmonic functions in D is denoted by $\alpha - sh(D)$, in addition, the function $u(z) \equiv -\infty$ is also considered to be in this class.

Definition 2. A domain D is called $\alpha-$regular domain, if there exists a function $\rho(z) \in \alpha - sh(D)$, such that $\rho\big|_D < 0$, $\overline{\lim\limits_{z\to\partial D}}\rho(z) = 0$.

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a $\alpha-$regular domain, E be any fixed subset in D and $\psi(z)$ be bounded function on E. We denote by $\mathcal{U}(E, D, \psi, \delta)$ the class of all functions $u(z) \in \alpha - sh(D)$ such that $u|_E \leq \psi|_E$ and $u|_D < \delta$, where $\delta \in \mathbb{R}$ satisfies $\delta > \sup\limits_{z\in E}\psi(z)$. We define

$$\omega_\alpha(z, E, D, \psi, \delta) = \sup\left\{u(z):\ u(z) \in \mathcal{U}(E, D, \psi, \delta)\right\}.$$

Definition 3. The regularization

$$\omega^*_\alpha(z, E, D, \psi, \delta) = \overline{\lim_{w\to z}}\omega_\alpha(w, E, D, \psi, \delta)$$

is called $(\alpha, \psi, \delta)-$subharmonic measure of the set E with respect to D.

By definition, the function $\omega^*_\alpha(z, E, D, \psi, \delta)$ is $\alpha-$subharmonic in D (see [1]). Note that when $\psi \equiv -1$, $\delta = 0$, $(\alpha, \psi, \delta)-$ subharmonic measure coincides with $\alpha-$subharmonic measure defined by

$$\omega^*_\alpha(z, E, D) = \overline{\lim_{w\to z}} \sup\left\{u(w) : u \in \alpha - sh(D),\ u|_D < 0,\ u|_E \leq -1\right\},$$

that is, $\omega^*_\alpha(z, E, D, -1, 0) \equiv \omega^*_\alpha(z, E, D)$. The $(\alpha, \psi, \delta)-$measure has the following properties.

Proposition 1. The following monotonicity properties hold:

a) if $E_1 \subset E_2 \subset D_1 \subset D_2$, then

$$\omega_\alpha^*(z, E_2, D_2, \psi, \delta) \leq \omega_\alpha^*(z, E_1, D_2, \psi, \delta) \leq \omega_\alpha^*(z, E_1, D_1, \psi, \delta), \quad \forall z \in D;$$

b) if $\psi_1|_E \leq \psi_2|_E$, then $\omega_\alpha^*(z, E, D, \psi_1, \delta) \leq \omega_\alpha^*(z, E, D, \psi_2, \delta), \quad \forall z \in D;$
c) if $\delta_1 \leq \delta_2$, then $\omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta_1) \leq \omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta_2), \quad \forall z \in D;$
d) for any $c \in \mathbb{R}$ such that $\psi|_E < \delta - c$, we have

$$\omega_\alpha^*(z, E, D, \psi + c, \delta) = c + \omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta - c), \forall z \in D.$$

Proposition 2. Let $u(z) \in \alpha - sh(D)$. If $u|_D < C$ and $u|_E \leq c$, where $c < C$, $E \subset D$, then the inequality holds

$$u(z) \leq C \cdot \left(1 + \frac{\omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta) - \delta}{\delta - \inf\limits_{z \in E} \psi(z)}\right) - c \cdot \frac{\omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta) - \delta}{\delta - \inf\limits_{z \in E} \psi(z)} \quad \forall z \in D.$$

Theorem 1. We have the following properties:
a) for any set $E \subset D$, the inequalities are satisfied for all $z \in D$:

$$\left(\delta - \inf_{z \in E} \psi(z)\right) \cdot \omega_\alpha^*(z, E, D) + \delta \leq \omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta)$$

$$\leq \left(\delta - \sup_{z \in E} \psi(z)\right) \cdot \omega_\alpha^*(z, E, D) + \delta;$$

b) if $E \subset\subset D$, then $\lim\limits_{z \to \partial D} \omega_\alpha^*(z, E, D, \psi, \delta) = \delta.$

REFERENCES

1. Abdullaev B., Sharipov.R. Local and global $\alpha-$polar set, Bulletin of the Institute of Mathematics. 2019. No.5. P. 4–8.
2. Kuldoshev K., Narzillayev N. $(m, \psi, \delta)-$regularity of compacts in $\mathbb{C}^n$, Acta NUUz. 2024. Vol 2.2.1. P. 65–76.

Uchinchi tartibli operatorli matritsa blok elementlari uchun spektral munosabatlar Sharipova M.Sh.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston;
m.sh.sharipova@buxdu.uz

$\mathbb{T}$- bir o‘lchamli tor, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - kompleks sonlar fazosi, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ - $\mathbb{T}$ torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatni qabul qiluvchi) funksiyalar Hilbert fazosi va $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$ - $\mathbb{T}^2$ ikki o‘lchamli torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatni qabul qiluvchi) funksiyalar Hilbert fazosi bo‘lsin. $\mathcal{H}^{(3)}$ orqali $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ va $\mathcal{H}_2$ fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, ya’ni $\mathcal{H}^{(3)} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Xuddi shunday, $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ fazoni kiritamiz. Zamonaviy matematik fizikada $\mathcal{H}^{(3)}$ Hilbert fazosiga Fok fazosining qirqilgan uch zarrachali qism fazosi deyiladi. $\mathcal{H}^{(3)}$ fazoning ixtiyoriy f elementi $f = (f_0, f_1, f_2), f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1, 2$ ko‘rinishga ega.

$\mathcal{H}^{(3)}$ Hilbert fazosida

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & 0 \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ 0 & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0$$

ko'rinishdagi uchinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i, i \leq j, i, j = 0, 1, 2$ matritsaviy elementlar quyidagi formulalar orqali aniqlangan:

$$A_{00}f_0 = \varepsilon f_0, \quad (A_{01}f_1)(t) = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}f_1(x)) = (\varepsilon + u(x))f_1(x), \quad (A_{12}f_2)(x,t) = \int_{\mathbb{T}^2} v(t)f_2(x,t)dt,$$

$$(A_{22}f_2)(x,y) = (\varepsilon + u(x) + u(y))f_2(x,y).$$

Bu yerda $f_i \in \mathcal{H}_i$ ($i = 0, 1, 2$ uchun), ε - berilgan haqiqiy son, $u(\cdot)$ va $v(\cdot)$ esa mos ravishda $\mathbb{T}$ va $\mathbb{T}^2$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalardir. Bundan tashqari, $i < j$ bo'lganda, A^*_{ij} operatori A_{ij} ning qo'shma operatoridir.

Mazkur farazlar ostida blok-operator matritsa $\mathcal{A}_\mu$ chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini tekshirish qiyin emas.

Dastlab, $\mathcal{A}_\mu$ operatorli matritsaning spektrini o'rganish maqsadida quyidagi yordamchi operatorlarni kiritamiz:

$$\mathcal{A}^{(1)}_\mu : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{A}^{(1)}_\mu := A_{22}$$

$$\mathcal{A}^{(2)}_\mu : \mathcal{H}^{(2)} \to \mathcal{H}^{(2)}, \quad \mathcal{A}^{(2)}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A^*_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mu > 0.$$

$\alpha = 1, 2$ sonlari uchun $\mathcal{A}^{(\alpha)}_\mu$ operatorlarning spektrlarini tadqiq qilamiz. Funksional analiz kursidan ma'lumki, $\mathcal{A}^{(1)}_\mu$ operatorning spektri uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sigma(\mathcal{A}^{(1)}_\mu) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}^{(1)}_\mu) = [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M].$$

Bu yerda,

$$m := \min_{x\in\mathbb{T}} u(x), \qquad M := \max_{x\in\mathbb{T}} u(x).$$

$\mathcal{A}^{(2)}_\mu$ operatorli matritsa $\mathcal{A}_\mu$ operatorga mos kanal operator deyiladi va sof muhim spektrga ega bo'ladi, ya'ni

$$\sigma(\mathcal{A}^{(2)}_\mu) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}^{(2)}_\mu), \qquad \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}^{(2)}_\mu) = \emptyset.$$

Teorema. $\mathcal{A}_\mu$ operatorli matritsa blok elementlari spektrlari orasida

$$\sigma(\mathcal{A}^{(1)}_\mu) \subset \sigma(\mathcal{A}^{(2)}_\mu) \subset \sigma(\mathcal{A}_\mu)$$

spektral munosabatlar o'rinli.

Ko'rinib turibdiki, $\mathcal{A}^{(2)}_\mu$ operatorli matritsaga nisbatan sodda ko'rinishga ega hamda uning spektrini yoyiluvchi operatorlar spektri [1] haqidagi teorema yordamida aniqlash mumkin [2]. Bundan tashqari, $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \sigma(\mathcal{A}^{(2)}_\mu)$ tenglik o'rinlidir. Shu sababli, 1-teorema $\mathcal{A}_\mu$ operatorli matritsaning spektrini aniqlashda muhim hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. M.Reed, B.Simon. Methods of Modern Mathematical Physics, Analysis of Operators: Volume 4, Academic Press, 1978

2. T.H.Rasulov, M.Sh.Sharipova. Spectral Estimates for the Bounds of an Operator Matrix of Order Three, Russian Mathematics 2025, N6, p. 88-93

ON THE FIXED POINTS OF A PHYTOPLANKTON-ZOOPLANKTON MODEL WITH TOXIN-MEDIATED INTERACTIONS

Shoyimardonov S.K.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
shoyimardonov@inbox.ru

In [1], a continuous-time phytoplankton–zooplankton model was introduced to describe the combined effects of predation and toxin release:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = bP\left(1-\dfrac{P}{K}\right) - \alpha f(P)Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \beta f(P)Z - rZ - \theta g(P)Z, \end{cases} \tag{1}$$

where P and Z denote the densities of phytoplankton and zooplankton, respectively. The function $f(P)$ describes the predation response, while $g(P)$ models the toxin distribution. The parameters are: $b > 0$ - intrinsic phytoplankton growth rate; $K > 0$ - carrying capacity; $\alpha > 0$- predation rate; $\beta > 0$ - conversion efficiency; $r > 0$ - natural zooplankton mortality; and $\theta > 0$ - toxin-induced mortality.

In the present work, we study the discrete-time version of model (1) with Holling type III grazing and Holling type II toxin release. The functional responses are defined as

$$f(P) = \frac{P^2}{\gamma^2 + P^2}, \qquad g(P) = \frac{P}{\gamma + P},$$

where $\gamma > 0$ denotes the half-saturation constant.

For nondimensionalization, we introduce the variables

$$\overline{t} = bt, \quad \overline{u} = \frac{P}{K}, \quad \overline{v} = \frac{\alpha Z}{b}, \quad \overline{\gamma} = \frac{\gamma}{K}, \quad \overline{\beta} = \frac{\beta}{b}, \quad \overline{r} = \frac{r}{b}, \quad \overline{\theta} = \frac{\theta}{b}.$$

Dropping the overline notation, the discrete-time model for $t \geq 0$ takes the form

$$\begin{cases} u^{(1)} = u(2-u) - \dfrac{u^2 v}{\gamma^2 + u^2}, \\ v^{(1)} = \dfrac{\beta u^2 v}{\gamma^2 + u^2} + (1-r)v - \dfrac{\theta u v}{\gamma + u}, \end{cases} \tag{2}$$

where u and v denote the scaled densities of phytoplankton and zooplankton, respectively.

Theorem 1. The operator (2) has positive fixed points according to the following cases:

(i) If $\beta > \Psi(1)$ and $(r, \gamma, \theta) \in R_i$ for some $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, then there exists a **unique** positive fixed point, where

$$R_1 = \left\{(r,\gamma,\theta) \in \mathbb{R}^3_+ : 0 < \gamma < \sqrt{7}-2, \quad 0 < \theta \leq \frac{4r\gamma(1+\gamma)}{3-4\gamma-\gamma^2}\right\},$$
$$R_2 = \left\{(r,\gamma,\theta) \in \mathbb{R}^3_+ : \gamma \geq \sqrt{7}-2, \quad \theta > 0\right\},$$
$$R_3 = \left\{(r,\gamma,\theta) \in \mathbb{R}^3_+ : 0 < \gamma < \sqrt{2}-1, \ \frac{4r\gamma(1+\gamma)}{3-4\gamma-\gamma^2} < \theta < \frac{2r\gamma(1+\gamma)^2}{1-2\gamma-\gamma^2}\right\},$$
$$R_4 = \left\{(r,\gamma,\theta) \in \mathbb{R}^3_+ : \sqrt{2}-1 \leq \gamma < \sqrt{7}-2, \quad \theta > \frac{4r\gamma(1+\gamma)}{3-4\gamma-\gamma^2}\right\}.$$

(ii) Let $(r,\gamma,\theta) \in R_5$, where

$$R_5 = \left\{ (r,\gamma,\theta) \in \mathbb{R}^3_+ : 0 < \gamma < \sqrt{2}-1, \quad \theta > \frac{2r\gamma(1+\gamma)^2}{1-2\gamma-\gamma^2} \right\}.$$

Then:

(ii.a) If $\beta > \Psi(1)$ or $\beta = \Psi(\widehat{u})$, then there exists a **unique** positive fixed point.

(ii.b) If $\Psi(\widehat{u}) < \beta < \Psi(1)$, then there exist **two** positive fixed points.

where $\Psi(u) = \frac{[ru+\theta u+r\gamma](\gamma^2+u^2)}{u^2(\gamma+u)}$.

Theorem 2. Let $E_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$, denote the positive fixed points of operator (2). Then the following statements hold:

(i) The type of the fixed point E_1 is determined by:

$$E_1 = \begin{cases} \text{attracting}, & \text{if } \Delta(u_1) < 1, \\ \text{repelling}, & \text{if } \Delta(u_1) > 1, \\ \text{nonhyperbolic}, & \text{if } \Delta(u_1) = 1. \end{cases}$$

(ii) The fixed point E_2, if it exists, is a saddle point, where $\Delta(u_1)$ denotes the determinant of the Jacobian evaluated at E_1.

REFERENCES

1. Chattopadhayay J., Sarkar R. R., Mandal S. Toxin-producing plankton may act as a biological control for planktonic blooms-Field study and mathematical modelling. J. Theor. Biol. 2002. 215(3), 333–344.
2. Shoyimardonov S. Neimark-Sacker bifurcation and stability analysis in a discrete phytoplankton-zooplankton system with Holling type II functional response. J. Appl. Anal. Comput. 2023. 13(4), 2048–2064.

Three-magnon systems in the Heisenberg model

Tashpulatov S . M.[1],
Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

In the work [1] considered the three-magnon system in a two-dimensional isotropic and anisotropic bounded ferromagnetic lattice, and the spectrum and bound states of the system were investigated using numerical methods. In the work S. Tashpulatov [2], was considered the three-magnon system in an isotropic non-Heisenberg ferromagnet model with spin values $s = 1$ with the nearest neighbors interactions. The structure of the essential spectrum of the system was investigated and the upper and lower estimate of the number of three-magnon bound states of the system was obtained. We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system. Hamiltonian of the system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}), \tag{1}$$

where $J < 0$ is the parameter of the bilinear exchange interaction between atoms, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the operator of the atomic spin $\frac{1}{2}$ at the site m, and summation over τ ranges the nearest neighbors. Hamiltonian H acts in a symmetric complex Fock space $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$. We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$ and $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, where $||\varphi_0|| = 1$. We set $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, here S_m^- and S_m^+ are the magnon creation and annihilation operators at the site m. The vector $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ describes the state of the system of three magnons at the sites p, q and r with the spin $s = \frac{1}{2}$. The vectors $\psi = \sum_{p,q,r} f(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ constitute an orthonormal system. We let $\mathcal{H}_3$ denote the closure of this space of three-magnon states of operator H. We let H_3 denote the restriction of operator H to the space $\mathcal{H}_3$.

Theorem 1. a). If $\nu = 1$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = \pi$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of a three values $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-12J, -8J, -10J\}$, and the relation $1 \le N \le 10$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

b). If $\nu = 1$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = 0$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of a unique segment: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24J]$, and the relation $0 \le N \le 9$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

c). If $\nu = 1$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda \ne \pi$, and $\Lambda \ne 0$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-4J(3 - \cos\frac{\Lambda_1}{2} - \cos\frac{\Lambda_2}{2} - \cos\frac{\Lambda_3}{2}), -4J(3 + \cos\frac{\Lambda_1}{2} + \cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2})] \cup [-8J + 2J(2\cos\frac{\Lambda_1}{2} + cos^2\frac{\Lambda_2}{2} + cos^2\frac{\Lambda_3}{2}), -8J - 4J\cos\frac{\Lambda_1}{2} + 2Jcos^2\frac{\Lambda_2}{2} + 2Jcos^2\frac{\Lambda_3}{2}] \cup [-10J + 4J(\cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2}) + 2Jcos^2\frac{\Lambda_2}{2}, -10J - 4J(\cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2}) + 2Jcos^2\frac{\Lambda_1}{2}]$ and the relation $1 \le N \le 10$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 2. If $\nu = 2$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = (\pi, \pi)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of a three values $\{-24J, -22J, -20J\}$, i.e. $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-24J, -16J, -20J\}$ and the relation $1 \le N \le 19$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 3. If $\nu = 2$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = (\pi, 0)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-12J, -36J] \cup [4(-5 + \sqrt{5})J, 4(-7 + \sqrt{5})J] \cup [2(-8 + \sqrt{5})J, 2(-16 + \sqrt{5})J]$, and the relation $1 \le N \le 19$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 4. If $\nu = 2$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = (0, \pi)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-12J, -36J] \cup [4(-5 + \sqrt{5})J, 4(-7 + \sqrt{5})J] \cup [2(-8 + \sqrt{5})J, 2(-16 + \sqrt{5})J]$, and the relation $1 \le N \le 19$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 5. If $\nu = 2$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = (0, 0)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -48J] \cup [2z_1, -16J + 2z_1] \cup [z_1. - 32J + z_1]$, and the relation $1 \le N \le 19$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 6. If $\nu = 2$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_1) = (\Lambda_0, \Lambda_0)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of five intervals: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-24J(1 - cos\frac{\Lambda_0}{2}), -24J(1 + cos\frac{\Lambda_0}{2})] \cup [-8J(1 - cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1, -8J(1 + cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1] \cup [-8J(1 - cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_2, -8J(1 + cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_2] \cup [-16J(1 - cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_1, -16J(1 + cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_1] \cup [-16J(1 - cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_2, -16J(1 + cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_2]$, and the relation $4 \le N \le 22$

holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 7. If $\nu = 3$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (\pi, \pi, \pi)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of a four values $\{-36J, -34J, -32J, -24J\}$, i.e. $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-36J, -34J, -32J, -24J\}$ and the relation $4 \leq N \leq 30$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Theorem 8. If $\nu = 3$ and the total quasimomentum of the system has the form $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (0, 0, 0)$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -72J] \cup [2z_1, -24J + 2z_1] \cup [z_1, -48J + z_1]$, and the relation $1 \leq N \leq 27$ holds for the number of three-magnon bound states N of operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

LITERATURE

1. Van Himbergen J. E., and Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976. vol. 82. PP. 389–416. https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. vol 7, № 4. PP. 874–899. https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7

Dynamics of a convex combination of cubic stochastic operators on the one dimensional simplex

Ubaydullayeva S.I., Usmonov J.B.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; sabinaubaydullayeva529@gmail.com; javohir0107@gmail.com

In [1], a new notion of a cubic stochastic operator is introduced and investigated. Consider the following cubic stochastic operator(CSO)s on the one dimensional simplex:

$$W_1 = \begin{cases} x' = x(x^2 + 3axy + 3(1-a)y^2), \\ y' = y(y^2 + 3axy + 3(1-a)x^2), \end{cases} \quad W_2 = \begin{cases} x' = x(x^2 + 3(a - \frac{2}{3})xy + 3(\frac{5}{3} - a)y^2), \\ y' = y(y^2 + 3(a - \frac{2}{3})xy + 3(\frac{5}{3} - a)x^2), \end{cases}$$

where $a \in (\frac{2}{3}, 1]$.

Using the operators W_1 and W_2, we formulate the convex combination of them as the form $W = \mu W_1 + (1-\mu)W_2$, where $\mu \in [0, 1]$:

$$W = \begin{cases} x' = \mu x(x^2 + 3axy + 3(1-a)y^2) + (1-\mu)x(x^2 + 3(a - \frac{2}{3})xy + 3(\frac{5}{3} - a)y^2), \\ y' = \mu y(y^2 + 3axy + 3(1-a)x^2) + (1-\mu)y(y^2 + 3(a - \frac{2}{3})xy + 3(\frac{5}{3} - a)x^2), \end{cases}$$

Remark 1. If $3a + 2\mu = 4$, then the operator W is an identity operator. That is why, this case is not interesting.

Remark 2. If $\mu = 0$, then the operator W is equal to the operator W_2. If $\mu = 1$, then the operator W coincides with the operator W_1.

Then we find the fixed points of the operator W by solving the equation $W(x) = x$. For the set of fixed points of W, i.e. Fix(W) the following assertion holds.

Lemma 1. $\mathrm{Fix(W)} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{C}\}$, where $e_1\,(1, 0)$, $e_2\,(0, 1)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Lemma 2. For the fixed points of the operator W, the following assertions hold:

- if $3a + 2\mu > 4$, then e_1 and e_2 are attracting, C is repelling;

- if $3a+2\mu<4$, then e_1 and e_2 are repelling, C is attracting.

Theorem. For the limit sets of the trajectory of an initial point $z_0(x_0;y_0)\in S^1$ of the operator W, the followings hold:

- Let $\frac{4-3a}{2}<\mu\leq 1$.
  - if $0\leq x_0<\frac{1}{2}$, then
$$\lim_{n\to\infty} W^n(z_o)=e_1\ ;$$
  - if $\frac{1}{2}<x_0\leq 1$, then
$$\lim_{n\to\infty} W^n(z_o)=e_2\ ;$$
- If $0\leq\mu<\frac{4-3a}{2}$, then $\forall z_0(x_0;y_0)$ except e_1 and e_2
$$\lim_{n\to\infty} W^n(z_o)=C\ .$$

References

1. Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. Ukrainian Math. J., 2004, vol. 56, no. 10, 16991711.

LOG-CONCAVITY OF DYNAMICAL DEGREES OF SKEW PRODUCT POLYNOMIAL-LIKE MAPS IN $\mathbb{C}^3$

Vafoev F.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
vafoyevfurqat@gmail.com

Skew product maps form an important class of holomorphic dynamical systems in several complex variables. They naturally arise as fibered dynamical systems, where the first coordinate describes the dynamics on the *base space*, and the higher coordinates describe the dynamics along the *fibers*, depending on the base point. Formally, a skew product map in $\mathbb{C}^3$ is a proper holomorphic map of the form

$$f(z_1,z_2,z_3)=\big(f_1(z_1),\ f_2(z_2),\ f_3(z_1,z_2,z_3)\big), \tag{1}$$

This triangular structure allows one to analyze the interaction between base and fiber dynamics step by step, making them a natural setting to study questions about dynamical degrees.

Let $\omega:=dd^c\|z\|^2$ be the standard Kähler form on $\mathbb{C}^3$. The mass of a positive (p,p)-current S on a Borel set K is defined as

$$\|S\|_K=\int_K S\wedge\omega^{3-p}.$$

For $0\leq p\leq 3$, the *dynamical degree* of order p of f is given by

$$d_p(f):=\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_S\ \|(f^n)^*(S)\|_U\right)^{1/n},$$

where the supremum is taken over all positive closed (p,p) bidimension currents S on U of mass ≤ 1.

The following theorem is our main result.

Theorem. *Let $f : U_1 \times U_2 \times U_3 \to V_1 \times V_2 \times V_3$ be a skew product polynomial-like map in $\mathbb{C}^3$ as form (1). Then the sequence of dynamical degrees $\{d_p(f)\}_{p=0}^3$ is log-concave, i.e.,*

$$d_p(f)^2 \ \geq \ d_{p-1}(f)\, d_{p+1}(f), \quad \text{for} \quad 1 \leq p \leq 2.$$

REFERENCES

1. T.-C. Dinh, V.-A. Nguyên, N. Sibony. Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension. Advances in Mathematics, (2008).
2. F. Bianchi, T.-C. Dinh, K. Rakhimov. Monotonicity of dynamical degrees for Henon-like and polynomial-like maps. Transactions of the American Mathematical Society, to appear (2024).

Вещественные $AW*$−факторы

[1]Болтаев Х.Х., [2]Расулова Ф.Б.
[1,2]Национальный педагогический университет Узбекистана имени Низами, Ташкент, Узбекистан;
[1]Ташкентский международный университет,Ташкент, Узбекистан;
bkhabibzhan2020mail.ru

Алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, обозначим через $B(H)$. Пусть M-*-подалгебра в $B(H)$. Линейное отображение $\alpha : M \to M$ называется *-автоморфизмом (соответственно *-антиавтоморфизмом), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (соотв. $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$), $(\forall x, y \in M)$, инволютивным, если $\alpha^2(x) = x$, $\forall x \in M$. Пусть $R \subset B(H)$ - вещественная *-подалгебра. Коммутант вещественной *-алгебры R определяется аналогично комплексному случаю:$R' = \{a \in B(H_r) : ba = ab, \forall b \subseteq R\}$. Если $R = R''$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана.*

Пусть R - вещественная W*-алгебра. Наименьшую W*-алгебру $U(R)$, содержащую R, называем обертывающей $W*$−алгеброй для алгебры R. Тогда $U(R) = R+iR$. Кроме того, всякая вещественная $W*$−алгебра R порождает естественный инволютивный *-антиавтоморфизм α_k обертывающей $W*$−алгебры $U(R)$, а именно: $\alpha_k(x+iy) = x^*+iy^*$, где $x+iy \in U(R)$ такой, что $R = x \subseteq U(R) : \alpha_k = x^*$; и обратно, если на $W*$−алгебре U задан некоторый инволютивный *-антиавтоморфизм α, то множество $x \in U : \alpha(x) = x^*$ является вещественной W*-алгеброй. Напомним, что вещественная W*-алгебра называется *вещественным фактором*, если ее центр совпадает с $1 \cdot \mathbb{R} = \{\lambda 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ [1, 2].

Под вещественной $C*$−алгеброй мы понимаем вещественную банахову $*$−алгебру R такую, что выполняется отношение $\|a^*a\| = \|a\|^2$ и элемент $1 + a^*a$ обратимый для любого $a \in R$. Пусть A вещественная $C*$−алгебра с комплексным комплексификацией $M = A+iA$, тогда M - комплексная $C*$−алгебра и, если A - вещественная AW*-алгебра, то M может не быть (комплексной) AW*-алгеброй.

Предложение. Существуют вещественные $AW*$−факторы, которые не являются вещественными $W*$−факторами.

Теорема. Вещественная $AW*$−алгебра A является вещественной $W*$−алгеброй тогда и только тогда, когда

(i) A обладает разделяющим семейством нормальных состояний;

(ii) его комплексная комплексификация $M = A + iA$ является AW*-алгеброй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент, Изд. "ФАН 1986, .121 с.

2. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. MAIA, Kluwer Academic Publishers. 1997. Vol.418, 235p.

Нижепороговые эффекты для двухчастичного оператора Шредингера на решетке

Бозоров И.Н.[1], Хамидов Ш.И.[2]

[1]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, ул. Университетская, 9, г. Ташкент, 100174, Узбекистан; islomnb@mail.ru

[2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, ул. Университетская, 9, г. Ташкент, 100174, Узбекистан; shoh.hamidov1990@mail.ru

Пусть $\mathbb{T}^d$– d-мерный тор, который определяется как $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \equiv [-\pi,\pi)^d$. и пусть $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ – подпространство четных функций на $\mathbb{T}^d$.

Рассмотрим самосопряженный оператор $H_{\gamma\lambda}(K)$, $K\in\mathbb{T}^d$, действующий в $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$H_{\gamma\lambda}(K) := H_0(K) + V_{\gamma\lambda},$$

где $H_0(K)$ – невозмущенный оператор, определенный как оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(p) := 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1-\cos\tfrac{K_i}{2}\,\cos p_i\Big).$$

Возмущение $V_{\gamma\lambda}$ определяется выражением

$$V_{\gamma\lambda}f(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(\gamma+\lambda\sum_{i=1}^{d}\cos p_i\cos q_i\Big)f(q)\mathrm{d}q.$$

Поскольку ранг $V_{\gamma\lambda}$ не превосходит $d+1$, согласно теореме Вейля существенный спектр $H_{\gamma\lambda}(K)$ совпадает со спектром $H_0(K)$ для любого $K\in\mathbb{T}^d$, т.е.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\gamma\lambda}(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

где $\mathcal{E}_{\min}(K) := \min_{p\in\mathbb{T}^d}\ \mathcal{E}_K(p)$, $\quad\mathcal{E}_{\max}(K) := \max_{p\in\mathbb{T}^d}\ \mathcal{E}_K(p)$.

Пусть $K=0$. Функция $\mathcal{E}_0(p) = 2\sum\limits_{i=1}^{d}(1-\cos p_i)$ симметрична относительно перестановок переменных p_i и p_j, $i,j=1,2,\dots,d$. Следовательно, все интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},\quad \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos^2 p_i\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},\quad \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i\cos p_j\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z}$$

не зависят от $i,j=1,2,\dots,d$, $i\neq j$. Введем обозначения

$$a(z) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},\qquad b(z) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},$$

$$c(z) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos^2 p_i\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},\qquad e(z) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i\cos p_j\,\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)-z},$$

$i, j = 1, 2, ..., d, \ \ i \neq j.$

Отметим, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ и $e(\cdot)$ являются аналитическими в $\mathbb{C}\backslash[0, 4d]$. Кроме того они возрастают и положительны на $(-\infty, 0)$ (см. [1–3]). Для любого $d \geqslant 3$ имеют место следующие конечные пределы:

$$\lim_{z \nearrow 0} a(z) = a(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)},$$

$$\lim_{z \nearrow 0} b(z) = b(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos p_i \mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)},$$

$$\lim_{z \nearrow 0} c(z) = c(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 p_i \mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)}$$

$$\lim_{z \nearrow 0} e(z) = e(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos p_i \cos p_j \mathrm{d}p}{\mathcal{E}_0(p)}.$$

Пусть $\lambda_0 = (e(0) - c(0))^{-1} < 0$. Определим следующие связанные компоненты в плоскости (γ, λ):

$$\mathcal{S}_0 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ \lambda_0 < \lambda\Big\}, \qquad \mathcal{S}_1 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ \lambda < \lambda_0\Big\},$$

$$\mathcal{C}_0 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + \gamma a(0) + \lambda(d + \frac{\gamma}{2}) b(0) > 0, \ \lambda > -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},$$

$$\mathcal{C}_1 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + \gamma a(0) + \lambda(d + \frac{\gamma}{2}) b(0) < 0\Big\},$$

$$\mathcal{C}_2 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + \gamma a(0) + \lambda(d + \frac{\gamma}{2}) b(0) > 0, \ \lambda < -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\}.$$

Определим следующие границы для связанных компонент:

$$\partial\mathcal{C}_0 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + \gamma a(0) + \lambda(d + \frac{\gamma}{2}) b(0) = 0, \ \lambda > -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},$$

$$\partial\mathcal{C}_2 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + \gamma a(0) + \lambda(d + \frac{\gamma}{2}) b(0) = 0, \ \lambda < -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},$$

$$\partial\mathcal{S}_0 := \Big\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \ \lambda = \lambda_0\Big\}, \quad P := \partial\mathcal{C}_2 \cap \partial\mathcal{S}_0.$$

Определение. *Пусть $f-$ решение уравнения $H_{\gamma\lambda}(0) f = \mathcal{E}_{\min}(0) f$.*

(i) Если $f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ называется нижним пороговым собственным значением $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(ii) Если $f \in L^{1,e}(\mathbb{T}^d) \setminus L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ называется нижним пороговым резонансом $H_{\gamma\lambda}(0)$.

Теорема. *Верны следующие утверждения:*

(i) Пусть $d \geqslant 3$. Если $(\gamma, \lambda) \in \partial\mathcal{S}_0 \setminus P$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ есть нижнее пороговое собственное значение кратности $d - 1$ оператора $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(ii) Пусть $d = 3, 4$. Если $(\gamma, \lambda) \in \partial\mathcal{C}_j \setminus P$, $j = 0, 2$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ есть нижний пороговый резонанс оператора $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(iii) Пусть $d \geqslant 5$. Если $(\gamma,\lambda) \in \partial\mathcal{C}_j \setminus P$, $j = 0,2$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ есть нижнее пороговое собственное значение оператора $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(iv) Пусть $d = 3,4$. Если $(\gamma,\lambda) \in P$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ есть нижний пороговый резонанс и нижнее пороговое собственное значение кратности $d-1$ оператора $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(v) Пусть $d \geqslant 5$. Если $(\gamma,\lambda) \in P$, то $\mathcal{E}_{\min}(0)$ есть нижнее пороговое собственное значение кратности d оператора $H_{\gamma\lambda}(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакаев С. Н., Бозоров И. Н. Число связанных состояний одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке, Теорет. и мат. физ. 2009. Vol. 158, No. 3. P. 425–443.
2. Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I.N. On eigenvalues and virtual levels of a two-particle Hamiltonian on a $d-$dimensional lattice, Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2023. Vol. 14, No. 3. P. 237–244.
3. Bozorov I.N., Khamidov Sh.I., Lakaev S.N. The number and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators, Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43, No. 11. P. 3079–3090.

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ СЕМЕЙСТВА МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Жабборова Г. С.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
g.s.jabborova@buxdu.uz

Пусть $\mathbb{T}^3$ - трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)-$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим семейство моделей Фридрихса $H_\mu(k)$, $\mu = (\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1,\mu_2 > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующее в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ как

$$H_\mu(k) := H_0(k) - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2,$$

где операторы $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ и V_α, $\alpha = 1,2$, определяются по правилам:

$$(H_0(k)f)(p) = (\varepsilon(p) + \varepsilon(k-p))f(p),$$

$$\varepsilon(p) := \sum_{j=1}^{3}(1-\cos(3p_j)),\ p = (p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{T}^3;$$

$$(V_\alpha f)(p) = \varphi_\alpha(p)\int_{\mathbb{T}^3}\varphi_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь функции $\varphi_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ - вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$

Следует отметить, что семейство моделей Фридрихса $H_\mu(k)$, является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Положим

$$m(k) := 2\sum_{j=1}^{3}\left(1-\left|\cos\frac{3k_j}{2}\right|\right), \quad M(k) := 2\sum_{j=1}^{3}\left(1+\left|\cos\frac{3k_j}{2}\right|\right).$$

С помощью теоремы Вейля [1] можно показать, что существенный спектр семейства моделей Фридрихса $H_\mu(k)$ не зависит от параметра μ, и имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k)) = [m(k); M(k)].$$

В частности, если $k = \mathbf{0} := (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(\mathbf{0})) = [m(\mathbf{0}); M(\mathbf{0})] = [0; 12].$$

Для исследования существования собственных значений модели Фридрихса $H_\mu(k)$ вводятся два вспомогательных семейства моделей Фридрихса $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$, $\alpha = 1, 2$:

$$H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k) : L_2(\mathbb{T}^3) \to L_2(\mathbb{T}^3), \quad H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k) := H_0(k) - \mu_\alpha V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Очевидно, что для $\alpha = 1, 2$ оператор $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ также является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$, имеет одномерное возмущение, причем для существенного спектра этого оператора имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)) = [m(k); M(k)]$ (здесь тоже применяется теорема Вейля).

Для исследования дискретного спектра оператора $H_\mu(k)$ в этой работе будем использовать следующее дополнительное предположение.

Предположение 1. Предположим, что

$$\text{mes}(\text{supp}\{\varphi_1(\cdot)\} \cap \text{supp}\{\varphi_2(\cdot)\}) = 0,$$

где $\text{mes}(\cdot)$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^3$, а $\text{supp}\{\varphi_\alpha(\cdot)\})$ – замкнутый носитель функции $\varphi_\alpha(\cdot)$.

Следующий результат устанавливает связь между дискретными спектрами операторов $H_\mu(k)$ и $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$, $\alpha = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть выполняется предположение 1. Число $z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)]$ является собственным значением оператора $H_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда число z является собственным значением одного из операторов $H^{(1)}_{\mu_1}(k)$ или $H^{(2)}_{\mu_2}(k)$, т.е.

$$\sigma_{\text{disc}}(H_\mu(k)) = \sigma_{\text{disc}}(H^{(1)}_{\mu_1}(k)) \cup \sigma_{\text{disc}}(H^{(2)}_{\mu_2}(k)).$$

Следующий пример показывает, что класс функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$, удовлетворяющих предположению 1, не пуст.

Пример. Если функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ определены следующим образом:

$$\varphi_1(p) = \begin{cases} \sin(2p_1)\sin(2p_2)\sin(2p_3), & p_j \in [-\pi/2; \pi/2],\ j = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$
$$\varphi_2(p) = \sin(2p_1)\sin(2p_2)\sin(2p_3) - \varphi_1(p),$$

то

$$\text{supp}\{\varphi_1(\cdot)\}) = \Pi := \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3 : \ p_j \in [-\pi/2; \pi/2],\ j = 1, 2, 3\},$$
$$\text{supp}\{\varphi_2(\cdot)\}) = \mathbb{T}^3 \setminus \Pi.$$

Следовательно,

$$\text{supp}\{\varphi_1(\cdot)\}) \cap \text{supp}\{\varphi_2(\cdot)\}) = \bigcup_{i=1}^{6} \Gamma_i,$$

где Γ_i – грани (плоские квадратные поверхности) куба Π.

Следует отметить, что если $k = \mathbf{0}$, то предположение 1 в теореме 1 можно также заменить условием нечетности по каждой координате функции $\varphi_1(\cdot)\varphi_2(\cdot)$.

Оператор $H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(k)$ имеет более простой вид, чем оператор $H_\mu(k)$, и условия существования его собственных значений подробно анализировались во многих статьях, см. например [2]. Поэтому теорема 1 важна при анализе дискретного спектра оператора $H_\mu(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов, М.: Мир, 1982.
2. Б.И.Бахронов, Т.Х.Расулов, М.Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана, Изв. вузов. Матем., 2023, N. 7, С. 3–12.

СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ПЯТИМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Жумаева Д. Х.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
d.x.jumayeva@buxdu.uz

Пусть $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ - одномерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ обычно называют двухчастичной обрезанной подпространство пространства Фока.

В гильбертовом постранстве $\mathcal{H}$ рассмотрим семейству обобщенных моделей Фридрихса

$$H_{\mu,\lambda}(k) := \begin{pmatrix} H_{00}(k) & \mu H_{01} \\ \mu H_{01}^* & H_{11}^0(k) - V_\lambda \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$H_{00}(k)f_0 = a(k)f_0,\ H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(H_{11}^0(k)f_1)(x) = E_k(x)f_1(x),\ (V_\lambda f_1)(x) = \int_{\mathbb{T}} v_\lambda(x-t)f_1(t)dt,$$

$$E_k(x) := \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(k-x),\ v_\lambda(x) := \lambda_0 + \lambda_1 \cos x,\ x, k \in \mathbb{T}.$$

Здесь $\mu > 0$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$, $\lambda_0, \lambda_1 > 0$; а функции $a(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\varepsilon_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ – вещественные непрерывные функции на одномерном торе $\mathbb{T}$.

При условиях, наложенных на элементы этой матрицы, $H_{\mu,\lambda}(k)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$. Операторную матрицу второго порядка $H_{\mu,\lambda}(k)$ обычно называют семейством обобщенных моделей Фридрихса. В современной математической физике оператор H_{01} называется оператором уничтожения, а сопряженный ему оператор H_{01}^* - оператором рождения. Операторная матрица $H_{\mu,\lambda}(k)$ соответствует системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает двух, взаимодействующих как с помощью парного контактного потенциала, так и с помощью операторов рождения и уничтожения.

Очевидно, что оператор возмущения (диагональный оператор) $H_{0,0}(k)$ является двумерным и

$$\sigma_{\rm ess}(H_{0,0}(k)) = [m(k); M(k)], \quad \sigma_{\rm point}(H_{0,0}(k)) = \{a(k)\},$$

где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом:

$$m(k) := \min_{x\in\mathbb{T}} E_k(x),\ M(k) := \max_{x\in\mathbb{T}} E_k(x).$$

Если $a(k) \notin [m(k); M(k)]$, то $\sigma_{\mathrm{disc}}(H_{0,0}(k)) = \{a(k)\}$. Поэтому в силу известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем, что существенный спектр оператора $H_{\mu,\lambda}(k)$ не зависит от параметров μ и λ, и верна $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}(k)) = [m(k); M(k)]$.

Для исследования существования собственных значений обобщенной модели Фридрихса $H_{\mu,\lambda}(k)$ вводятся два вспомогательных операторов $H^{(1)}_{\mu,\lambda}(k)$ и $H^{(2)}_{\lambda_1}(k)$:

$$H^{(1)}_{\mu,\lambda}(k) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad H^{(1)}_{\mu,\lambda}(k) := \begin{pmatrix} H_{00}(k) & \mu H_{01} \\ \mu H^*_{01} & H^0_{11}(k) - V^{(1)}_\lambda \end{pmatrix},$$

$$(V^{(1)}_\lambda f_1)(x) = \int_{\mathbb{T}} (\lambda_0 + \lambda_1 \cos x \cos t) f_1(t) dt,$$

$$H^{(2)}_{\lambda_1}(k) : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}),$$

$$(H^{(2)}_{\lambda_1}(k) f_1)(x) = E_k(x) f_1(x) - \lambda_1 \sin x \int_{\mathbb{T}} \sin t f_1(t) dt.$$

Операторы $H^{(1)}_{\mu,\lambda}(k)$ и $H^{(2)}_{\lambda_1}(k)$ являются линейными, ограниченными и самосопряженными операторами в своих областях определения. Оператор $H^{(1)}_{\mu,\lambda}(k)$ является обобщенной модель Фридрихса с четырехмерным возмущением, а оператор $H^{(2)}_{\lambda_1}(k)$ является модель Фридрихса с одномерным возмущением.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Если $v(\cdot)$ и $\varepsilon(\cdot)$ четные функции на одномерном торе $\mathbb{T}$, то число $z \in \mathbb{C}\backslash[m(0); M(0)]$ является собственным значением оператора $H_{\mu,\lambda}(0)$ тогда и только тогда, когда число z является собственным значением одного из операторов $H^{(1)}_{\mu,\lambda}(0)$ или $H^{(2)}_{\lambda_1}(0)$, т.е.

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu,\lambda}(0)) = \sigma_{\mathrm{disc}}(H^{(1)}_{\mu,\lambda}(0)) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(H^{(2)}_{\lambda_1}(0)).$$

Операторы $H^{(1)}_{\mu,\lambda}(0)$ и $H^{(2)}_{\lambda_1}(0)$ имеют более простой вид, чем оператор $H_{\mu,\lambda}(0)$, и условия существования их собственных значений подробно анализировались во многих статьях, см. например [1,2]. Поэтому теорема 1 важна при анализе дискретного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.I.Muminov, T.H.Rasulov,On the eigenvalues of a 2×2 block operator matrix, Opuscula Mathematica, 35:3 (2015), pp. 369–393.
2. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov, The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations, Journal of mathematical analysis and applications, 330:2 (2007), pp. 1152–1168.

Принцип Бирмана-Швингера для операторной матрицы третьего порядка

Журакулова Ф.М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
juraqulova.farangis@mail.ru

Через $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ обозначим одномерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определенных на $\mathbb{T}^2$. Положим $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mu\mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mu\mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

где матричные элементы $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1, 2$ определяются по формулам

$$\mathcal{A}_{00} f_0 = a f_0, \quad \mathcal{A}_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_1(t) dt, \quad (\mathcal{A}_{11} f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathcal{A}_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t) dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22} f_2)(x, y) = w(x, y) f_2(x, y) \quad f_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 0, 1, 2.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$; μ– вещественное положительное число, $v(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}$, а функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$w(k, y) := 3 - \cos k - \cos y - \cos(k + y).$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}$.

Операторы $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{A}_{12}$ называются операторами уничтожения, а операторы $\mathcal{A}_{01}^*$ и $\mathcal{A}_{12}^*$ называются операторами рождения, причем

$$\mathcal{A}_{01}^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{01}^* f_0)(x) = v(x) f_0, \quad \mathcal{A}_{12}^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2,$$

$$(\mathcal{A}_{12}^* f_1)(x, y) = \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}.$$

Вводим следующие обозначения::

$$m(k) := 3 - \cos k - \sqrt{2 + 2\cos k}, \quad M(k) := 3 - \cos k + \sqrt{2 + 2\cos k}.$$

Для каждого $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ определим регулярную функцию

$$\Delta_\mu(k\,; z) := \begin{cases} 1 - z - I_\mu(k\,; z), & z < m(k), \\ 1 - z + I_\mu(k\,; z), & z > M(k) \end{cases}$$

в области $\mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)]$, где

$$I_\mu(k\,; z) := \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos k - z)^2 - 4\cos^2\frac{k}{2}}}.$$

Обозначим через $E_\mu^{(1)}(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k)$ нули функции $h_\mu(k)$, лежащих слева от $m(k)$ и справа от $M(k)$, соответственно, т.е. $E_\mu^{(1)}(k) < m(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k) > M(k)$.

Причем $E_\mu^{(\alpha)} : k \in \mathbb{T} \to E_\mu^{(\alpha)}(k)$, $\alpha = 1, 2$ является непрерывной функцией на одномерном торе $\mathbb{T}$.

Вводим следующие обозначения: $\Sigma_\mu = \operatorname{Im} E_\mu^{(1)}(k) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \operatorname{Im} E_\mu^{(2)}(k)$.

Теорема 1. Для существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ имеет место равенство $\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$. Более того, множество Σ_μ представляет собой объединение не более трех отрезков.

Обозначим через $\tau_{min}(\mathcal{A}_\mu)$ и $\tau_{max}(\mathcal{A}_\mu)$ нижную и верхную грани существенного спектра $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$ операторной матрица $\mathcal{A}_\mu$, соответственно,т.е.,

$$\tau_{min}(\mathcal{A}_\mu) := \min \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu) \quad \tau_{max}(\mathcal{A}_\mu) := \max \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu).$$

Отметим, что для любых $k \in \mathbb{T}$ и $z < \tau_{min}(\mathcal{A}_\mu)$ (соответственно $z > \tau_{max}(\mathcal{A}_\mu)$), функция $\Delta_\mu(k, z)$ (соответственно $-\Delta_\mu(k, z)$) положительна и, следовательно, существует ее положительной квадратный корень. В исследованиях дискретного спектра операторной матрица $\mathcal{A}_\mu$ основную роль играет компактный (симметризованный) интегральный оператор $\widehat{T}_\mu(z)$, $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{max}(\mathcal{A}_\mu)]$, действующий в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как

$$\widehat{T}_\mu(z) := \begin{pmatrix} \widehat{T}_{00}(\mu, z) & \widehat{T}_{01}(\mu, z) \\ \widehat{T}_{01}^*(\mu, z) & \widehat{T}_{11}(\mu, z) \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы $\widehat{T}_{ij}(z) : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$ $i, j = 0, 1$ определяются следующим образом:

$$\widehat{T}_{00}(\mu, z)\varphi_0 = (1 + a - z)\varphi_0, \quad (\widehat{T}_{01}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}},$$

$$(\widehat{T}_{11}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}(\omega(x, t) - z)},$$

$$(\widehat{T}_{01}^*(\mu, z)\varphi_0)(x) = \frac{-\mu v(x)\varphi_0}{\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}},$$

при $z < \tau_{min}(\mathcal{A}_\mu)$,

$$(\widehat{T}_{01}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}}, \quad (\widehat{T}_{01}^*(\mu, z)\varphi_0)(x) = \frac{-\mu v(x)\varphi_0}{\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}},$$

$$(\widehat{T}_{11}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \frac{-\mu^2}{2\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}(\omega(x, t) - z)},$$

$$\varphi_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1.$$

при $z > \tau_{max}(\mathcal{A}_\mu)$.

Следующая теорема является реализацией известного принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ [1].

Теорема 2. При каждом $x \in \mathbb{T}$ число $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{max}(\mathcal{A}_\mu)]$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собтвенным значением операторной матрицы $\widehat{T}_\mu(z)$. Кроме того, собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys., 127:2 (2007), P. 191-220.

О СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

Маъмуров Б. Ж., Хикматуллаева Ш. В.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
bmamurov.51@mail.ru

В статье изучается суперпозиция двух операторов (линейного и вольтерровского). Находится неподвижная точка этого оператора, определяется его тип и изучается траектория этого оператора.

Пусть $S^{m-1} = \mathbf{x} = (x_1, \quad . \ .., \ x_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1-$ $(m-1)$–мерные симплекс, где $\mathbb{R}^m_+ = \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, x_i \geq 0, i = 1, ..., m.$

Отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ назовем квадратичном стохастическом оператором (КСО), если

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, k = 1, ..., m,$$

для всех $\mathbf{x} \ \in S^{m-1}$, где $p_{ij,k} \geq 0, p_{ij,k} \ = p_{ji,k}$ для всех $i, j, k = 1, 2, ..., m.$

Предположим, что $V^{(n)} \left(\mathbf{x}^{(0)}\ \right)_{n=1}^{\infty}$ траектория начальной точки $\mathbf{x}^{(0)} \ \in S^{m-1}$, где $\mathbf{x}^{(n+1)} \ = V(\mathbf{x}^{(n)}\ )$ для всех $n = 0, 1, 2,...$

Точка $\mathbf{x}^* \in S^{m-1}$ назавем неподвижными точкам для оператора V, если $V(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ и множество всех неподвижных точек обозначается $Fin(V)$. Отметим, что такого рода нелинейные операторы часто возникают во многих областях математической биологии, а именно в теории наследственности (см. [1]).

Рассмотрим оператор $B = A \cdot V$, где оператор A определяется матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 1-\alpha-\beta & 1-\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

и $V :\ x_1' = x_1\ (1 + ax_2 - bx_3)\ ; x_2' = x_2\ (1 - ax_1 + cx_3); x_3' = x_3\ (1 + bx_1 - cx_2)$, где $a, c \in [-1, 0]$ и $b, \alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta \in (0, 1)$.

Через $e_i = (\delta_{1i}, ..., \delta_{mi}) \in S^{m-1}, i = 1, 2, ..., m$, обозначим вершины симплекса, где δ_{ij}–символ дельта Кронекера.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для стохастического оператора B справедливы следующие:*

i) $Fin(B) = e_3$ *и* e_3 *является притягивающая;*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} B^{(n)} \left(x^{(0)}\right) = e_3$ *для любого* $x^{(0)} \in S^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyubich, Y.I., Mathematical structures in population genetics, Biomathematics. vol.22, Spriger-Verlag, Berlin, 1992.

О НИЖНЕМ ГРАНИ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОМ РЕШЕТКЕ

Неъматова Ш.Б.

Бухарский государственый университет, Бухара, Узбекистан;

Для каждого фиксированного $h>0$ через $\mathbb{T}_h^3$ обозначим куб $(-\pi/h;\pi/h]^3$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}_h^3)^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}_h^3)^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0=\mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1=L_2(\mathbb{T}_h^3)$ и $\mathcal{H}_2=L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}_h^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$. Пространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются нульчастичной, одночастичной и двухчастичной подпространства бозонного фоковского пространства $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}_h^3))$ по $L_2(\mathbb{T}_h^3)$, соответственно.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ при каждом фиксированном $h>0$ рассматривается следующая семейства трехдиагональных блочно-операторных матриц

$$H_h(K):=\begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0\\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12}\\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K)\end{pmatrix},\ K\in\mathbb{T}_h^3,$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$H_{00}(K)f_0=w_0(K)f_0,\quad H_{01}f_1=\int_{\mathbb{T}_h^3}v_0(t)f_1(t)dt,$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p)=w_1(K;p)f_1(p),\quad (H_{12}f_2)(p)=\int_{\mathbb{T}_h^3}v_1(t)f_2(p,t)dt,$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q)=w_2(K;p,q)f_2(p,q).$$

Здесь $f_i\in\mathcal{H}_i$, $i=0,1,2$; $w_0(\cdot)$, и $v_i(\cdot)$, $i=0,1$ - вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}_{\mathrm{h}}^3$, а функции $w_1(\cdot;\cdot)$ и $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ определены по формулам

$$w_1(K;p):=l_1\varepsilon_h(p)+l_2\varepsilon_h(K-p)+1,$$

$$w_2(K;p,q):=l_1\varepsilon_h(p)+l_2\varepsilon_h(K-p-q)+l_1\varepsilon_h(q),$$

где $l_i>0$, $i=1,2$, и функция $\varepsilon_h(\cdot)$ имеет вид:

$$\varepsilon_h(q):=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{3}(1-\cos(hq_i)),\ q=(q_1,q_2,q_3)\in\mathbb{T}_h^3.$$

При этом $H_{ij}^*:\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_j$, $i<j$ сопряженный оператор к H_{ij} и

$$(H_{01}^*f_0)(p)=v_0(p)f_0,$$

$$(H_{12}^*f_1)(p,q)=\frac{1}{2}(v_1(p)f_1(q)+v_1(q)f_1(p)),\ \ f_i\in\mathcal{H}_i,\ \ i=0,1.$$

Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В этих предположениях блочно-операторная матрица $H_h(K)$ является ограниченным и самосопряженным в $\mathcal{H}$.

Для удобства через $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ существенный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Чтобы изучить спектральные свойства оператора $H_h(K)$, мы вводим семейство ограниченных самосопряженных операторов (модели Фридрихса)$\mathcal{A}_h(k)$, $k \in \mathbb{T}_h^3$, при каждом фиксированном $h > 0$ действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{A}_h(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(h;k) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h;k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h;k) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$ и $A_{01}(h) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ определяются по правилам

$$A_{00}(h;k)f_0 = (l_2\varepsilon_h(k) + 1)f_0, \quad A_{01}(h)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}_h^3} v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h;k)f_1)(q) = E_h(k;q)f_1(q), \quad E_h(k;q) := l_1\varepsilon_h(q) + l_2\varepsilon_h(k-q).$$

Легко можно заметить, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(\mathbf{0})) = [0; 3/h^2]$, где $\mathbf{0} := (0,0,0) \in \mathbb{T}_h^3$.

Через $C(\mathbb{T}_h^3)$ (соот. $L_1(\mathbb{T}_h^3)$) обозначим банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$.

Определение 1. *Говорят, что оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора*

$$(G_h\psi)(p) = \frac{v_1(p)}{2(l_1 + l_2)}\int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_1(t)\psi(t)dt}{\varepsilon_h(t)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}_h^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$. Если число $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора G_h, то число $z = 0$ называется регулярной точкой оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 2. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение или резонанс с нулевой энергией, то

$$\min \sigma_{\text{ess}}(H_h(\mathbf{0})) = \mathbf{0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), pp. 327–342.

СПЕКТРАЛЬНОЕ ВЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО РАФИНИРОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ

Расулов Т. Х.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
t.h.rasulov@buxdu.uz

Для операторов в гильбертовом пространстве в различных приложениях оказывается важным понятие *числовой области значений* (или *поля значений*).

Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$.

Множество

$$W(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}x, x) : \ x \in D(\mathcal{A}), \ ||x|| = 1\}$$

называется числовой областью значений оператора $\mathcal{A}$.

В общем случае множество $W(\mathcal{A})$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор $\mathcal{A}$ замкнут.

Из определения видно, что множество $W(\mathcal{A})$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(\mathcal{A})$ дают некоторую информацию об операторе $\mathcal{A}$, см. например [1].

Надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда дает достаточно хорошую структуру. Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанном случае, в работе [2] введено понятие квадратичной числовой области значений.

Блочно-числовая область значений для любого n с ограниченными элементами была введена в работе [3]. Здесь мы обобщим понятие блочно-числовой области значений для $n \times n$-операторных матриц с неограниченными элементами и изучим некоторые ее элементарные свойства.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ натуральное число с условием $n \geq 3$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \cdots, n$ - гильбертовы пространства и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим линейные операторы $\mathcal{A}$, действующие как $n \times n$ - операторные матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \to \mathcal{H}_i, \quad i, j = 1, \ldots, n$, плотно определенные, допускающие замыкание линейные операторы и область определения

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} D(A_{ij}) \Big),$$

оператора $\mathcal{A}$ также плотна в $\mathcal{H}$.

Обозначим

$$\mathbb{S}^n := \{ f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathcal{H}, \, \|f_j\| = 1, \, j = 1, \ldots, n \}.$$

Для каждого $f = (f_1, \cdots, f_n) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}^n$ определим $n \times n$-матрицу

$$\mathcal{A}_f := \Big((A_{ij} f_j, f_i) \Big)_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Тогда множество собственных значений этих матриц

$$W_{\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}) := \bigcup \{ \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_f) : f \in \mathbb{S}^n \}$$

называется блочная числовая область значения оператора $\mathcal{A}$ (относительно блочно-операторного представления (5)); для фиксированного разложения $\mathcal{H}$ мы также пишем

$$W^n(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}).$$

Так как $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_f) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \, \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0 \}$ для всех $f \in \mathbb{S}^n$ имеет место эквивалентное представление

$$W^n(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists f \in \mathbb{S}^n, \, \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0 \}.$$

Для $n = 1$, блочно-числовая область значений совпадает с обычной числовой областью значений оператора $\mathcal{A}$; для $n = 2$ она совпадает с квадратично-числовой областью значений, которая введена в работе [2]. Если $\mathcal{A}$ - симметрическая, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, то $W^n(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$.

Следующее утверждение является прямым обобщением факта, что числовая область значений содержится в квадратично-числовой области значений (см. утверждение 3.2 из [4]): $W^n(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$.

Если при $n > k$ имеют место разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ и $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_k$, то включение $W^n(\mathcal{A}) \subset W^k(\mathcal{A})$ не всегда верно.

Включение будет верно, если $n \geq k$ и $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ есть рафинирование (продолжение) пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_k$. Следовательно, в этом случае множество $W^n(\mathcal{A})$ может дать хорошое спектральное вложение, чем $W^k(\mathcal{A})$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, и пусть $\mathcal{H}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{H}_n$ есть рафинирование пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_k$, т.е. существуют целые числа $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$ такие, что $\widetilde{\mathcal{H}}_l := \mathcal{H}_{i_{l-1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{i_l}$, $l = 1, ..., k$. Тогда $W_{\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n} \subset W_{\widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_k}$, или, коротко, $W^n(\mathcal{A}) \subset W^k(\mathcal{A})$ при $n \geq k$ относительно рафинирования разложения.

Доказательство теоремы аналогично доказательству для ограниченной $\mathcal{A}$, см. [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. K.E.Gustafson, D.K.M.Rao. Numerical range. The field of values of linear operators and matrices, Universitext. Springer, New York, 1997.
2. H.Langer, C.Tretter. Spectral decomposition of some non-self-adjoint block operator matrices, J. Oper. Theory, 39, (1998), pp. 339–359.
3. C.Tretter, M.Wagenhofer. The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24, (2003), No. 4, pp. 1003–1017.
4. C.Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications, Impe. Coll. Press, 2008.

Действие волны релея на трубопровод (длинный упругий стержень), вложенный в упругой среде

Рахматов Р., Р.[1]**, Охунбоев М. И.**[2].

[1,2]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
[1]r.raxmatov55@mail.ru, [2]muzoxun54@mail.ru

В статье предлагается теоретическая модель описания совместной сейсмических колебаний подземного трубопровода (длинного упругого стержня) и упругого грунта на воздействие поверхностных волн. Принимается, что на поверхности контакта выполняется условие равенства продольных перемещений сечения трубы и частиц упругой среды. С помощью этой модели объясняется механизм возникновения касательных усилий на поверхности контакта. Удлинение сечений трубопровода при этом происходит в результате взаимодействия грунтовой его грунтовой (упругой) средой.

Постановка задачи. Установим начало координат на сводной поверхности в точке O. Направим ось Oz_1 вдоль оси трубопровода, которая образует с фронтом распространяющейся волной угол α, ось Ox перпендикулярная к ней сверху вниз, ось Oy перпендикулярная к этим осям. Уравнение продольного движения частиц грунта $\omega(r, ct - z_1)$

(c- "видимая скорость"распространения волны), моделируемого упругой средой, в цилиндрическом слое по направлению оси трубопровода Oz_1 в приближении, принятом в работах [1-3], имеет вид :

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-m^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0, \quad (a<r<R, \ -\infty<z<\infty), \tag{1}$$

где $z=ct-z_1$, $m=\sqrt{\dfrac{c^2-c_1^2}{c_2^2}}$, $c_1=\sqrt{(2\mu+\lambda)/\rho}$ и $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$– скорости продольной и поперечной волн в среде,μ,λ и ρ– коэффициенты Ламе и плотность упругой среды, R– глубина заложения трубы (стержня). В дальнейшем считаем $c>c_1$. Уравнение (1) интегрируется при условиях

$$\omega=U(z), \tag{2}$$

если $r=a$

$$\omega=\omega_0(z), \tag{3}$$

если $r=R$, а $\omega_0(z)$– перемещение частиц среды за падающую волну.

Метод решения. Введем новую функцию по формуле

$$u=\omega(r,z)-\frac{ln(r/a)}{ln(R/a)}\left[w_0(z)-U(z)\right]+U(z), \tag{4}$$

удовлетворяющую следующему уравнению

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-m^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=\frac{m^2ln(r/a)}{ln(R/a)}\left[w_0''(z)-U''\right]+m^2U'', \tag{5}$$

и граничным условиям

$$u(R)=0, \ \ u(a)=0$$

Рассмотрим случай $c=c_1(m=0)$. В этом случае имеем $u=0$, и функция удовлетворяет уравнению [4].

$$U''(z)\pm p^2U(z)=\pm p^2\omega_0(z),$$

$$p=\left(\frac{2\mu}{E'|1-M^2|(a^2-b^2)ln(R/a)}\right)^{1/2}$$

где $M=C-1/C_0'$– число Маха, $c_0'=\sqrt{E'/\rho'}$– скорость распространения продольных волн в стержне. E' и ρ' соответственно модуль Юнга и плотность материала стержня, b,a– внутренний и внешний радиусы трубы. Рассмотрим разные случае. При этом установлено, что при $M>1$ и $p=\omega_1$ в трубопроводе возникает резонансное явление.

Полагаем $c=c_1/sin\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2)$, где α– угол наклона между фронтом волны и осью трубопровода. Решение краевой задачи (6) для уравнения (5) получим методом Фурье

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(z)R_n(n),$$

где $=J_0(\lambda_n a)N_0(\lambda_n r)-J_0(\lambda_n r)N_0(\lambda_n a)$,

а λ_n– корни уравнения:

$$J_0(\lambda_n a)N_0(\lambda_n R)-J_0(\lambda_n R)N_0(\lambda_n a)=0.$$

Далее получим уравнение относительно Z_n и окончательно имеем

$$U'' + p^2 U = p^2\omega_0 + p^2\frac{2}{\pi}ln\frac{R}{a}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\limits_0^z \omega_0''(\xi)sin\overline{\lambda_n}(z-\xi)d\xi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int\limits_0^z g_n(z-\xi)U(\xi)d\xi\Big].$$

Полученное уравнение является интегро-дифференциальным уравнением для определения функции $U(z)$.

Выводы. Установлено, что степень воздействия поверхностной волны на трубопровод в значительной степени зависит от угла наклона фронта волны к оси трубопровода и глубины залегания его в грунтовой среде. С ростом глубины залегания амплитуда уменьшается, а период увеличивается. В случае и расчетного значения угла наклона для каждого значения волнового числа может существовать критическая глубина залегания трубопровода, при которой сечения трубопровода по переменной совершают колебания в резонансном режиме.

References

1. Рашидов Т.Р. Исраилов М.Ш., Мардонов Б. Сейсмодинамика подземных трубопроводов при неидеальном контакте с грунтом: влияние проскальзывания на динамические напряжения, Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ) РАН. Сибирское отделение. т. 57,no6 (340) 2016, с. 189-197.
2. Исраилов М.Ш. Сейсмодинамика подземных трубопроводов, Ташкент, Проблемы механики. 2012,no3. с.18-24
3. Рашидов Т.Р. Исраилов М.Ш. Мардонов Б. Стационарное движение системы "трубопровод - грунтовой слой"при действии сейсмических волн, Ташкент. Проблемы механики 2016.no3, с.61-65.

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Г.Х.Умиркулова

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
g.h.umirqulova@buxdu.uz

Через $\mathbb{T}^{\rm d} :\equiv (-\pi;\pi]^{\rm d}$ обозначим d-мерный тор. В гильбертовом пространстве $L_2^{\rm s}((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ симметрических функций, квадрат которых интегрируем (в общем случае, принимающих комплексные значения), определенных на $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$, рассмотрим модельный гамильтониан, заданный равенством

$$H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} := H_0^{(\gamma)} - \mu(V_1+V_2) - \lambda V_3. \tag{1}$$

Здесь $H_0^{(\gamma)}$ - оператор умножения на функцию $E_\gamma(\cdot,\cdot)$, то есть невозмущенный оператор:

$$(H_0^{(\gamma)}f)(x,y) = E_\gamma(x,y)f(x,y), \quad E_\gamma(x,y) := \varepsilon(x)+\varepsilon(y)+\gamma\varepsilon(x+y),$$

$$\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{\rm d}(1-\cos(mx_i)), \quad x=(x_1,x_2,...,x_{\rm d})\in\mathbb{T}^{\rm d}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Операторы V_α, $\alpha=1,2,3$ являются операторами нелокального потенциала и представляют собой частично интегральные операторы вида:

$$(V_1 f)(x,y)=v(y)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f(x,t)dt, \quad (V_2 f)(x,y)=v(x)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f(t,y)dt,$$

$$(V_3 f)(x,y)=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f(t,x+y-t)dt.$$

Здесь $\mu,\lambda>0$ - параметры взаимодействия и $\gamma>0$, а функция $v(\cdot)$, входящая в ядро операторов V_α, $\alpha=1,2$, является действительно-значной, непрерывной функцией, определенной на торе $\mathbb{T}^d$.

Модельный гамильтониан $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, заданный равенством (1), является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором, определенным в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$.

Эта модель представляет собой гамильтониан, соответствующий оператору энергии системы трех частиц на операторной решетке [1, 2].

Для формулировки основного результата работы рассмотрим два (ограниченных и самосопряженных) семейства моделей Фридриха в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$:

$$(h_\mu^{(\gamma,1)}(k)g)(x)=(\varepsilon(x)+\gamma\varepsilon(k+x))g(x)-\mu v(x)\int_{\mathbb{T}^d} v(t)g(t)dt,$$

$$(h_\lambda^{(2)}(k)g)(x)=(\varepsilon(x)+\varepsilon(k-x))g(x)-\lambda\int_{\mathbb{T}^d} g(t)dt.$$

Введем обозначение:

$$\Sigma_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}:=\bigcup_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\big(\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu^{(\gamma,1)}(k))+\varepsilon(k)\big)$$

$$\cup\bigcup_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\Big(\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\lambda^{(2)}(k))+\gamma\varepsilon(k)\Big)\cup[0,\mathrm{d}(3+3\gamma/2)].$$

Следующие множества называются, соответственно, трехчастичной и двухчастичной ветвями влияния воздействия модельного оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$:

$$\sigma_{\mathrm{three}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}):=[0,\mathrm{d}(3+3\gamma/2)],$$

$$\sigma_{\mathrm{two}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}):=\bigcup_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\big(\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu^{(\gamma,1)}(k))+\varepsilon(k)\big)\cup\bigcup_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\Big(\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\lambda^{(2)}(k))+\gamma\varepsilon(k)\Big).$$

Эти множества называются, соответственно, трехчастичной и двухчастичной ветвями существенного спектра модельного оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$.

Следующая теорема описывает существенный спектр оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ и дает информация о числе его компонентов.

Теорема 1. Для существенного спектра $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ справедливо равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})=\Sigma_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Э.Муминов, Н.М.Алиев. О спектре трехчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке / ТМФ, 171:3 (2012), С. 387–403.
2. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), pp. 327–342.

О единственности решения задачи с локальными и нелокальными условиями на границе области эллиптичности для одного класса уравнений смешанного типа

Хуррамов.Н Х.[1], Олтиев Б. Ж.[2]

Термезский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан;

Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан;
nxurramov22@mail.ru

Постановка задачи (**Бицадзе–Самарского**). Пусть D_a- область ограниченная отрезком OB оси Oy, $\;0 \le y \le ((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$, дугой AB нормальной кривой $\sigma_a:\; x^2+\dfrac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=a^2,\; x\ge 0,\; y>0$, здесь $O=O(0,0),\; A=A(a,0),\; B=B(0,b)$ и характеристиками

$$OC:\, x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0 \quad \text{и} \quad AC:\, x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=a$$

уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0, \tag{1}$$

где постоянные $m>0$.

Через D_a^+ и D_a^- соответственно обозначим части области D_a лежащие в верхней или в нижней полуплоскостях.

Пусть прямая $y=-k(x-x_0)$ $\;(x\le x_0,\; 0\le x_0\le a)$ пересекает оси координат в точках $(x_0,0),\; (0,kx_0)$, где $\;k=b/a,\; b=((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$.

Настоящая работа посвяшена исследованию задачи с условием Бицадзе–Самарского связывиющим значения искомого решения $u(x,y)$ в точках $(x_0,0),\; (0,kx_0)$, осей координат, Ox и Oy соответственно, где $0\le x_0\le a$.

Задача BS_0**.** Требуется найти в области D_a решение $u(x,y)\in R_1$ [1, с. 104] уравнения (1) ($u(x,y)\in R_1$ если в формуле Даламбера $\tau'(x),\nu(x)\in H$ (см. ниже (6)) удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y)\mid_{\sigma_a}=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le a, \tag{2}$$

$$u(0,kx)=\mu(x)u(x,0)+\varphi_2(x),\quad 0\le x\le a, \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{OC}=\psi(x),\quad 0\le x\le a/2, \tag{4}$$

где

$$\varphi_1(x),\mu(x),\; \varphi_2(x)\in C[0,a],\; \psi(x)\in C[0,a/2]\cap C^{1,\delta}(0,a/2)$$

причем

$$\psi(0)=0,\; \varphi_2(0)=0,\; \varphi_1(0)=\mu(a)\varphi_1(a)+\varphi_2(a),$$

$$\mu(x)=x^{\delta_1}\tilde{\mu}(x),\; \varphi_2(x)=x^{\delta_1-m}\tilde{\varphi}_2(x),$$

$$\delta_1>m+1,\; \tilde{\mu}(x),\; \tilde{\varphi}_2(x)\in C[0,a],$$

$$\varphi_1(x) = (a-x)^{\delta_2}\tilde{\varphi}_1(x),\ \delta_2 > 1/2,\ \tilde{\varphi}_1(x) \in C[0,a].$$

На отрезке вырождения $y = 0,\ 0 \le x \le a$ имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\ 0 < x < a, \tag{5}$$

причцм эти пределы при $x \to 0,\ \ x \to a$ могут иметь особенности порядка ниже единицы.

2. Единственность решения задачи BS_0. Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$\tau(x) = u(x,0),\ \ 0 \le x \le a;\quad \nu(x) = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ \ 0 < x < a,$$

для уравнения (1) в области D_a^- задачтся формулой Даламбера

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right]$$

$$-\frac{a(-y)^{(m+2)/2}}{2(m+2)}\int_0^a \nu\left[x + \frac{2(2t-a)}{a(m+2)}(-y)^{(m+2)/2}\right]dt. \tag{6}$$

В силу (6) из краевого условия (4) получим

$$\tau'(x) - \frac{a^2}{4}\nu(x) = 4\psi_1(2x).\ \ 0 < x < a/2 \tag{7}$$

Соотношение (7) являются первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесцнным на интервал $(0,a)$ оси $y = 0$ из области D_a^-.

Для задачи BS_0 аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе [2, с. 301] является

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи BS_0 при выполнении условий $\varphi_2(x) \equiv 0, \psi(x) \equiv 0$ и*

$$0 < \mu(x) < 1, \tag{8}$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{D}_a^+$ может принимать только в точках кривой σ_a.

Теорема доказывается методом работы [3].

Из теорема 1 следует следуюшее:

Следствие. Задача BS_0 имеет не более одного решения.

LITERATURE

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.,1985,-304с.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981,-448с.
3. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Задача с локальными и нелокаль-ными условиями на границе обла-сти эллиптичности для уравнения смешанного типа, Известия вузов. Математика, 2021, є12, с.80-93.

О существовании собственных значений модели Фридрихса специального вида

Хусенова Ж.Т.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
j.t.husenova@buxdu.uz

Известно, что задачи, связанные с исследованием собственных значений модели Фридрихса [1] с компактным возмущением, в частности, с конечномерным возмущением, встречаются в квантовой механике, статистической механике, гидродинамике и многих других областях. В данной работе найдены условия существования собственных значений модели Фридрихса с трехмерным возмущением. В гильбертовом пространстве $l_2[-\pi;\pi]$ рассматривается модель Фридрихса вида

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3 \tag{1}$$

Здесь H_0 есть оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi],$$

V_α интегральный оператор вида:

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x)\int_{-\pi}^{\pi} v_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2,3, \quad f \in L_2[-\pi;\pi].$$

Параметр функция $u(\cdot)$ определен, и вещественнозначная непрерывная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$. Для чисел $-\pi < a < b < \pi$ определим функции $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и $v_3(\cdot)$ как

$$v_1(x) := \begin{cases} w_1(x), \text{ если } x \in [b;\pi] \\ 0, \text{ если } x \in [-\pi;b] \end{cases} ; \quad v_2(x) := \begin{cases} w_2(x), \text{ если } x \in [b;\pi] \\ 0, \text{ если } x \in [-\pi;b] \end{cases} ;$$

$$v_3(x) := \begin{cases} w_3(x), \text{ если } x \in [b;\pi] \\ 0, \text{ если } x \in [-\pi;b] \end{cases} .$$

Причем параметры функции $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$ и $w_3(\cdot)$ определены, соответственно, в отрезках $[b;\pi]$, $[a;b]$ и $[-\pi;a]$ и вещественнозначные непрерывные функции, удовлетворяющие условию $w_1(b) = w_2(a) = w_2(b) = w_3(a) = 0$.

При таких предположениях модель Фридрихса H, определенная по формуле (1) является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

Так как параметры функции $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ и $v_3(\cdot)$ линейно независимы, оператор возмущения $-V_1 - V_2 - V_3$ является трехмерным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля [2] о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях, для существенного спектра оператора Н имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}} = [m;M]$, где

$$m := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x), \quad M := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x).$$

С целью изучения дискретного спектра оператора H определим регулярную функцию в области $\mathbb{C} \setminus [m;M]$ как

$$I_{\alpha\beta}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v_\alpha(t)v_\beta(t)}{u(t)-z}dt, \quad \alpha,\beta = 1,2,3.$$

В соответствии с требованиями, наложенными для параметры функций $w_1(\cdot), w_2(\cdot)$ и $w_3(\cdot)$ для всех индексов $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2, 3$ имеем $I_{\alpha\beta} = 0$. Причем

$$I_{11}(z) = \int_b^\pi \frac{w_1^2(t)dt}{u(t) - z}, \quad I_{22}(z) = \int_a^b \frac{w_2^2(t)dt}{u(t) - z}, \quad I_{33}(z) = \int_{-\pi}^a \frac{w_3^2(t)dt}{u(t) - z}.$$

Можно легко показать, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда

$$\Delta(z) := (1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z))(1 - I_{33}(z)) = 0.$$

Следовательно, для дискретного спектра оператора H имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta(z) = 0\}.$$

Таким образом, для спектра оператора H имеет место равенство

$$\sigma(H) = [m; M] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta(z) = 0\}.$$

Для более детального изучения дискретного спектра оператора H рассмотрим три вспомогательные модели Фридрихса:

$$H_\alpha := H_0 - V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Выбранные таким образом модели Фридрихса с одномерными возмущениями являются линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi; \pi]$.

При всех $\alpha = 1, 2, 3$ для существенного спектра модели Фридрихса H_α имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\alpha) = [m; M],$$

а для дискретного спектра имеет место соотношение

$$\sigma(H) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \ I_{\alpha\alpha}(z) = 1\}.$$

Обычно функция $1 - I_{\alpha\alpha}(\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором H_α. Из определения $\Delta(\cdot)$ следует, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда когда число z является собственным значением одно из следующих операторов H_1, H_2 и H_3. Следовательно,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H) = \sigma_{\mathrm{disc}}(H_1) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(H_2) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(H_3).$$

Последнее равенство важно для нахождения условия существования собственных значений модели Фридрихса H.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. Если $I_{\alpha\alpha}(m) = \infty$ при некотором $\alpha \in 1, 2, 3$, то модель Фридрихса H имеет по крайней мере одно собственное значение, лежащее левее точки m. Если $I_{\alpha\alpha}(m) = \infty$ при всех $\alpha \in 1, 2, 3$, то модель Фридрихса H имеет три собственных значения (с учетом кратности), лежащих левее точки m.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.Фридрихс. *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Москва: Мир, 1969, 232 С.

2 М.Рид, Б.Саймон. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Москва: Мир, 1982, 426 С.

СЕКЦИЯ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

SECTION 3. DIFFERENTIAL EQUATIONS, INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Yig‘indi ko‘rinishdagi moslangan manbali manfiy tartibli modifitsirlangan Korteveg-de Friz–Liuvill tenglamasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida integrallash

Abdivokhidov A.A.

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; azamatabdivoxidov@mail.ru

Ushbu ishda quyidagi

$$\begin{cases} u_{xt} = e^{2u} + \left(u_{xxxt} - (2u_x\mu_{xt})_x\right) - \\ - \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t) \left(\psi_1^2(x, \lambda_k, t) - \psi_2^2(x, \lambda_k, t)\right), \\ \mu_{xx} = u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

yig‘indi ko‘rinishdagi moslangan manbali manfiy tartibli modifitsirlangan Korteveg-de Friz–Liuvill tenglamasining

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \ u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)|_{x=0} = \alpha(t), \ \mu_x(x,t)|_{x=0} = \gamma(t), \\ \left[u_{xt}(x,t) + \mu_{xt}(x,t)\right]|_{x=0} = \zeta(t), \end{cases} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{4,1}(t>0) \cap C(t \geq 0), \ \ \mu(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(t>0) \cap C(t \geq 0) \tag{3}$$

silliqlik sinfiga tegishli bo‘lgan davriy cheksiz zonali yechimini topish masalasi qaralgan. Bu yerda $\alpha(t), \gamma(t), \zeta(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$ funksiyalar berilgan haqiqiy qiymatli funksiyalar, $\beta_k(t), k \in \mathbb{Z}$ berilgan ketma-ketlik esa quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$\beta_k(t) = O\left(\frac{1}{1+|k|^3}\right), \ |k| \to \infty.$$

Shuningdek, $\psi(x,\lambda,t) = (\psi_1(x,\lambda,t), \psi_2(x,\lambda,t))^T$ funksiya ushbu

$$\mathcal{L}(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \tag{4}$$

Dirak operatorining Floke yechimlari bo‘lib, quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\psi_{1,2}(x,\lambda,t) = c(x,\lambda,t) + \frac{s_2(\pi,\lambda,t) - c_1(\pi,\lambda,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda,t)} \cdot s(x,\lambda,t),$$

bu yerda $c(x,\mu,t) = (c_1(x,\mu,t), c_2(x,\mu,t))^T$ va $s(x,\mu,t) = (s_1(x,\mu,t), s_2(x,\mu,t))^T$ funksiyalar (4) Dirak sistemasining mos holda $c(0,\mu,t) = (1,0)^T$ and $s(0,\mu,t) = (0,1)^T$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari, shuningdek, $\Delta(\lambda,t) = c_1(\pi,\lambda,t)+s_2(\pi,\lambda,t)$ (4) Dirak operatorining Lyapunov funksiyasi.

Ushbu ishda,(1)–(3) aralash masalaning yagona yechimi mavjud ekanligi va yechimni topish algoritmi ushbu

$$\mathcal{L}(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x \in \mathbb{R},\ \tau \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5}$$

Dirak operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalalar usuli yordamida keltirilgan. Bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Omega(x+\tau,t) = \begin{pmatrix} p(x+\tau,t) & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & -p(x+\tau,t) \end{pmatrix},\ \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Ushbu $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ funksiyalar orqali (5) Dirak tenglamalar sistemasining mos holda $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ va $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini belgilaymiz. $\lambda_n \equiv \lambda_n(\tau,t)$ orqali (5) Dirak tenglamalar sistemasiga qo'yilgan davriy va yarimdavriy $(y(0) = \pm y(\pi))$ chegaraviy masalalarining xos qiymatlarini, $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ orqali esa (5) tenglamalar sistemasining Dirixle chegaraviy masalasining $(y_1(0,\mu,\tau,t) = 0,\ y_1(\pi,\mu,\tau,t) = 0)$ xos qiymatlarini belgilaymiz.

Ushbu ishdagi asosiy teorema quyidagidan iborat.

Teorema. Agar boshlang'ich shartdagi $p_0(x)$ va $q_0(x)$ funksiyalar ushbu

$$p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1)–(3) Koshi masalasining $p(\tau,t), q(\tau,t)$ yagona global yechimi mavjud bo'lib, ular quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$p(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n}}{2} - \xi_n(x,t) \right), \tag{6}$$

$$q(x,t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(x,t)\sqrt{(\xi_n(x,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(x,t))} \cdot f_n(\xi(x,t)), \tag{7}$$

where

$$f_n(\xi(x,t)) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(x,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(x,t))}{(\xi_k(x,t) - \xi_n(x,t))^2}}.$$

LITERATURE

1. Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation, Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, No. 19. P. 1095-1098.

2. Urazboev G.U., Yakhshimuratov A.B., Khasanov M.M. Integration of negative-order modified Korteweg-de Vries equation in a class of periodic functions, Theor. Math. Phys. 2023. Vol. 217, P. 1689-1699.

3. Khasanov A.B., Abdivokhidov A.A., Eshbekov R.Kh. Negative order modified Korteweg-de Vries–Liouville (nmKdV-L) Equation in the Class of Periodic Infinite-gap Functions, Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45, No. 12. P. 6380-6397.

Inverse problem for a combination of sub-diffusion and degenerate hyperbolic equations

Abdukodirov A. T.[1], Karimov E. T.[2]

[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
[2]Ghent University, Ghent, Belgium;
abdurashid1976@mail.ru, erkinjon.karimov@ugent.be

In the present research we study an inverse source problem for the combination of sub-diffusion and degenerate hyperbolic equations

$$0 = \begin{cases} {}^C D_{at}^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) + h(x), & a < t < b, \\ t^n u_{xx}(t,x) - t u_{tt}(t,x) - \mu u_t(t,x) + \lambda^2 t^n u(t,x), & 0 < t < a \end{cases} \tag{1}$$

in a rectangular domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < x < 1, 0 < t < b\}$. Here $a, b, \lambda, \mu, n \in \mathbb{R}$ such that $b > a > 0,\ n > 1,\ (1-n)/2 < \mu < 1,$

$${}^C D_{at}^{\alpha} y(t) = I_{at}^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} y(t)$$

represents the Caputo fractional derivative [1] and

$$I_{at}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi, \quad t > a$$

represents the Riemann-Liouville fractional integral [1].

Problem. To find a pair of functions $u(t,x)$ and $h(x)$, satisfying Eq. (1) in Ω, together with initial conditions

$$u(0,x) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad \lim_{t \to 0} t^{\mu} u_t(t,x) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le b, \tag{3}$$

and transmitting conditions

$$u(a-0,x) = u(a+0,x), \quad 0 \le x \le 1,$$
$$\lim_{t \to a+0} {}^C D_{at}^{\alpha} u(t,x) = u_t(a-0,x), \quad 0 < x < 1. \tag{4}$$

Here $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are given functions.

The idea of this investigation is based on solutions of first initial-boundary problem for sub-diffusion equation [2] and the modified Cauchy problem for the degenerate hyperbolic equation [3]. The similar combination for the first time was considered by Kilbas and Repin [4]. Later, such combinations have been targeted in polygonal domains [5,6].

The solution of the modified Cauchy problem (Eq.(1) at $0 < t < a$ and initial conditions (2)) has a form [3]:

$$u(t,x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \sigma(2z-1)\right] \left[z(1-z)\right]^{\beta-1} \bar{I}_{\beta-1}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right] dz -$$
$$\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\mu)\Gamma(1-\beta)} t^{1-\mu} \int_0^1 \nu\left[x + \sigma(2z-1)\right] \left[z(1-z)\right]^{1-\beta} \bar{I}_{-\beta}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right] dz,$$

where

$$\beta = \frac{n-1+2\mu}{2n+2}, \quad \sigma = \frac{2t^{(n+1)/2}}{n+1},$$

$$\bar{I}_{\gamma}(s)$$

is the modified Bessel function [7].

REFERENCES

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier. 2006.
2. Pskhu A.V. Solution of boundary value problems for a diffusion equation of fractional order by the Green's function method, Differ. Equ. 2003. Vol.39, No 10, P.1509–1513.
3. Abdukodirov A.T. Problems for a degenerate hyperbolic equation, Reports of Uzbekistan Academy of Sciences. 2006, No 2, P.13–17.
4. Kilbas A.A., Repin O.A. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, Fract.Calc.Appl.Anal. 2010, Vol.13, No 1, P.69–84.
5. Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator, Nonlinear Analysis. 2012, Vol. 75, P.3268–3273.
6. Kerbal S., Karimov E., Rakhmatullaeva N. Non-local boundary problem with integral form transmitting condition for fractional mixed type equation in a composite domain, Mat. Model. Nat. Phenom. 2017, Vol.12, No 3, P.95–104.
7. Erdelyi A., Bateman G. Higher Transcendental Functions, vol. 1, Nauka, Moscow, 1973. Russian translation.

About the Recurrent-differential Equation Related to the Liouville Equation

Abdullayev A.X.[1], Abdullayeva Sh.A.[2], Ruzimuradova D.Kh.[3]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
abduganiax@mail.ru
School No. 41, Andijan, Uzbekistan;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
drozimuradova@gmail.com

It is well known that linear differential equations depending on a parameter can be reduced, using the method of a small parameter, to an infinite system of recurrentвЃYdifferential equations of the form:

Let the players' trajectories be given by the following equations in Hilbert space l_2:

$$y'_n(x) = a_n(x)y_n(x) + b_n(x)y_{n-1}(x) + c_n(x), n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

where $y_0(x)$ is assumed to be given. In this system, the unknowns are determined successively by integration. In practice, however, one often encounters problems that are reduced not to system (1) but to a system of equations of the form:

$$P_{n+1}^k(x) = a_n{}^k(x)P_n^{k+1}(x) + b_n{}^k(x)(P_n^k)' + c_n{}^k(x)P_n^{k-1}(x) \tag{2}$$

where $P_n^k(x)$ are polynomials.

In particular, when ${a_n}^k(x) = (k+1)x, \quad {b_n}^k(x) = 1, \quad {c_n}^k(x) = k-1$, the system is equivalent to a combinatorial problem for Liouville equation. Here, ${P_n}^k(x)$ polynomials form a triangular structure analogous to binomial coefficients:

From (2), the following properties hold: 1. If $k-$ is even, then ${P_n}^k(x)$ is a polynomial of degree $\left(\frac{k}{2}-1\right)$; if $k-$ is odd, then its degree is $\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)$; 2. If ${d_n}^k = \deg {P_n}^k(x)$, then $d_{n+1}^{k+2} = d_n^k + 1$, $n = 2,3,...,n-1$; $k = 1,2,...,n-1$.

Moreover, the recurrence (2) yields relations such as

$P_{n+1}^n(x) = (n+1)!x + (n-1){P_n}^{n-1}(x)$, $P_{n+1}^{n-1}(x) = \left({P_n}^{n-1}(x)\right)' + (n-2){P_n}^{n-2}(x)$, $P_{n+1}^k(x) = (k+1)xP_n^{k+1}(x) + (P_n^k)' + (k-1)P_n^{k-1}(x)$, $P_{n+1}^1 = \left({P_n}^1(x)\right)' + 2x{P_n}^2(x)$, $P_{n+1}^0(x) = \left({P_n}^0(x)\right)' + x{P_n}^1(x)$ with initial conditions

$$P_n^k(x) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 0, & k = n, \\ n!, & k = n+1. \end{cases}$$

$(n = 0,1,2.,k = 0,1,2,.)$. Now consider the equation: $y'' + xy = 0$. Its solution cannot be expressed in terms of elementary functions using algebraic operations and integration (J. Liouville's theorem) [1, 2]. This equation is equivalent to the Riccati equation:

$$z'(x) = x + z^2(x). \tag{3}$$

Theorem. The solution $z(x)$ of equation (3) satisfies:

$$z^{(n)} = n!z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {P_n}^k(x)z^k$$

.

LITERATURE

1. Kaplansky I. An Introduction to differential algebra, Hermann. Paris. 1957.
2. Ritt J.F. Integration in finite terms, Liouville theory of elementary methods, Columbia university press. 1948

An Inverse Problem for Recovering the Kernel in an Integro-Differential Pseudoparabolic Equation with Non-Classical Boundary Conditions

Abdullayev B. R.[1]
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Uzbekistan
behzodbek0202@gmail.com

Consider the following an integro-differential pseudoparabolic equation:

$$u_t(x,t) - \alpha(t)u_{txx}(x,t) - \beta(t)u_{xx}(x,t)$$
$$= \int_0^t K(\tau)u(x,t-\tau)d\tau + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

where $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}, \quad T > 0$. Here, $K(t)$ is the convolution kernel, $f(x,t)$ is a source function. In the domain D_T, we study the following problem for Eq. (1): find a function $u(x,t)$ satisfying (1) with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

non-classical boundary conditions

$$u(1,t)=0, \quad u_{xxx}(0,t)-bu_{xx}(0,t)+au_x(0,t)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

where $\alpha(t)\ge\alpha_0>0$, $\beta(t)>0$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ are the given functions. This problem is commonly referred to as the direct problem.

Determine the kernel $K(t)$, $t>0$, appearing in Eq. (1), given that the solution of the direct problem satisfies the additional condition

$$u(x_0,t)=h(t), \quad x_0\in(0,1), \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

where $x_0\in(0,1)$ is a fixed point and $h(t)$ is a given sufficiently smooth function.

In this work, we investigate an inverse problem of determining the kernel of an integro-differential pseudoparabolic equation. The direct problem is an initial-boundary-value problem with non-classical boundary conditions. The spectral problem is first analyzed, and the direct problem is reduced to a Volterra-type integral equation using the Fourier method. The existence and uniqueness of the solution are proved by Gronwall's inequality and functional series. To identify the kernel, an additional condition is imposed at a fixed point $x=x_0\in(0,1)$. The inverse problem is reduced to a second-order integral equation, and its well-posedness is established using the Banach fixed-point theorem.

REFERENCES

1. Kapustin N. Yu., Moiseev E. I. On the convergence of spectral expansions of functions from the Holder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition, Differential Equations. 2000. Vol. 36, No. 8. P. 1069 - 1074.
2. Bari, N.K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space, Moskov. Gos. Univ. Uenye Zapiski Mathematika. 1951, Vol. 148, No. 4. P. 69-107.

Regularized method for the two-dimensional heat equation backward in time

Ablabekov B. S., Baiserkeeva A. B.
[1]Kyrgyz National University named after Zhusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan;
e-mail: ablabekov_63@mail.ru; a.baiserkeeva@mail.ru

It is well known that the Cauchy problem for the linear heat equation with inverse time is an ill-posed problem, i.e. solutions do not always exist, and in the case of existence, arbitrarily small changes in the initial data may correspond to arbitrarily large changes in the solution. One of the main methods of solution is the quasi-inversion method ([1-3]).

Let $D_T=\{(x,y,t):(x,y)\in D,\ \ t\in(0,T]\}, D=\{(x,y):0<x<\pi,\ \ 0<y<\pi\}$
Problem. Let it be required to find a function $u(x,y,t)\in C([0,T];H_0^1(D))\cap C^1([0,T];L_2(D))$ that satisfies in the domain D_T the equation

$$u_t(x,y,t)-\Delta_2 u(x,y,t)=0,\ \ (x,y,t)\in D_T, \tag{1}$$

initial condition

$$u(x,y,T)=\varphi(x,y),(x,y)\in D; \tag{2}$$

and boundary conditions

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\ \ 0\le y\le\pi,\ \ 0\le t\le T, \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\ \ 0\le x\le\pi,\ \ 0\le t\le T. \end{cases} \tag{3}$$

Theorem 1. Let $\varphi(x,y) \in C^2(D)$, $\varphi'''(x,y) \in L_2(D)$ and $\varphi(0,y) = \varphi(l,y) = 0$, $\varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xx}(l,y) = 0$, $\varphi(x,0) = \varphi(x,m) = 0$, $\varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yy}(x,m) = 0$. Then problem (1) - (3) has a unique solution $u(x,y,t) \in C([0,T]; H_0^1(D) \cap C^1([0,T]; L_2(D)$, which can be represented as

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} exp\left(-(k^2+n^2)(t-T)\right) sin(kx)\cdot sin(ny), \tag{4}$$

where

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} sin(kx)\cdot sin(ny),$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x,y) sin(kx)\cdot sin(ny) dxdy.$$

Let us give Hadamard's example. Indeed, let $\varphi(x,y) = e^{-\sqrt{k+n}} sin(kx)\cdot sin(ny)$.
Then the solution to problem (1)-(3) has the form

$$u(x,y,t) = e^{-\sqrt{k+n}} e^{(k^2+n^2)(T-t)} sin(kx)\cdot sin(ny). \tag{5}$$

For $k \to \infty$, $n \to \infty$ the function $e^{-\sqrt{k+n}} sin(kx)\cdot sin(ny)$, which represents the data of problem (1) вЃЃ (3), tends to zero with derivatives of all orders. Nevertheless, the solution to the problem, as can be seen from formula (5), is unbounded for any fixed $0 < t < T$. Consequently, no matter what norm we choose to evaluate the initial data, we cannot claim that the smallness of this norm implies the smallness of the solution.

Regularization of problem (1)-(3)

To introduce problem (1)-(3) into the correctness class, we will replace it with problem, namely, we will replace equation (1) with a two-dimensional pseudo-parabolic equation with conditions (2), (3), i.e. with the problem

$$u_{\alpha t} - \Delta_2 u_\alpha - \alpha \Delta_2 u_{\alpha t} = 0, \ (x,t) \in \Pi_T, \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_\alpha(0,y,t) = u_\alpha(\pi,y,t) = 0, \ 0 \le y \le \pi, \ 0 \le t \le T, \\ u_\alpha(x,0,t) = u_\alpha(x,\pi,t) = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{7}$$

$$u_\alpha(x,y,0) = \varphi(x,y) \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi. \tag{8}$$

where $\alpha > 0$ is the regularization parameter.

Using the results of work [1], it is easy to prove that if a function satisfies the conditions of Theorem 1, then the solution to problem (6)-(8) exists, is unique, and is given by the formula

$$u_\alpha(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right) sin(kx)\cdot sin(ny), \tag{9}$$

where

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} sin(kx)\cdot sin(ny),$$

$$\varphi_{kn}(x,y) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \varphi(x,y)sin(kx)\cdot sin(ny)dxdy.$$

Theorem 2. Let the function f satisfy the conditions of theorem 1. Then the following estimate is valid for solving problem (6)-(8):

$$\|u_\alpha(x,y,t)\| \leq exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right)\|\varphi(x,y)\|. \tag{10}$$

LITERATURE

1. B. S. Ablabekov, Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations, Ilim, Bishkek, 2001, 183 p. [in Russian].
2. Lattes, R. and Lions, J. L., Methode de Quasi-Reversibilite et Applications. Paris: Dunod 1967
3. Alekseeva, S. M. and Yurchuk, N. I., The quasi-reversibility method for the problem of the control of an initial condition for the heat equation with an integral boundary condition. Dif. Equations 34 (1998) (4), 493-500
4. P.T. Nam, D.D. Trong, N.H. Tuan, The truncation method for a two-dimensional nonhomogeneous backward heat problem, Appl. Math. Comput. 216 (12) (2010) 3423–3432.

On the existence of two closed trajectories in a quadratic dynamical system

Akhmedov O.S.[1], Muzaffarova D.B.[2]
[1] Kokand University, Andijan, Uzbekistan
e-mail: axmedovodiljon@gmail.com
[2] Andijan State University, Andijan, Uzbekistan
e-mail: muzaffarovadilshoda923@gmail.com

Abstract. This thesis studies a quadratic dynamical system that admits two distinct closed trajectories. Using the DN-tracking method, their existence and numerical stability are established. The results confirm orbit multiplicity in quadratic systems and provide a concrete example for further analysis of nonlinear dynamics.

Keywords: Cauchy problem, quadratic dynamical system, closed trajectory, numerical analysis, DN-tracking method.

Consider the quadratic dynamical system

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 1 - z_3^2 + z_1z_2 + z_2z_3, \\ \dot{z}_2 = 1 - z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3, \\ \dot{z}_3 = 1 - z_1^2 - z_1z_2 - z_1z_3, \end{cases} \tag{1}$$

where $z = (z_1, z_2, z_3)$. Computer simulation shows that there exist two distinct closed trajectories with the same period, for which $z(0) \approx z(T)$, where $T \approx 2.9$ with their initial point.

A point on the closed trajectory C_1: $(x_0, y_0, z_0) = (-1.17005, -0.98696, 1.69036)$.

And on the C_2: $(x_0, y_0, z_0) = (1.17005, 0.98696, -1.69036)$.

The following result can be proved by using the DN-tracking method, a numerical approach for tracing and verifying the recurrence of trajectories, plays a central role in identifying and supporting the existence of these closed orbits [1-3].

Theorem. System (1) has two closed trajectories, one in the domain

$\Pi_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid -1.82 \le z_1 \le 0.16,\ -2.19 \le z_2 \le -0.65,\ -0.14 \le z_3 \le 1.74\}$ and the other $\Pi_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid -0.16 \le z_1 \le 1.82,\ 0.65 \le z_2 \le 2.19,\ -1.74 \le z_3 \le 0.14\}$.

For these trajectories the following bounds hold:

$$\max_{z\in\Pi_1} |f(z)| < 9.1, \quad \max_{z\in\Pi_2} |f(z)| < 8.7,$$

$$\max_{z\in\Pi_1} \left\| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\| < 8.4, \quad \max_{z\in\Pi_2} \left\| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\| < 8.2,$$

$$\max_{z\in\Pi_1} \left\| \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \right\| = 4.243, \quad \max_{z\in\Pi_2} \left\| \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \right\| = 4.243.$$

Moreover, DN-tracking provides the error bounds

$$|z_1(t) - \zeta_{n_1}| < \varepsilon_1 = 1.22 \times 10^{-5}$$

for the first orbit,

$$|z_2(t) - \zeta_{n_2}| < \varepsilon_2 = 9.25 \times 10^{-5}$$

for the second one.

These inequalities guarantee the accurate tracking of both trajectories, $z_1(t)$ and $z_2(t)$, using distinct, computable, and storable vector sequences ζ_{n_1} and ζ_{n_2}, respectively, to within errors of ε_1 and ε_2.

Hence, system (1) possesses two distinct and verifiable closed trajectories, confirming orbit multiplicity in quadratic dynamics.

The analysis confirmed the existence of two closed trajectories in a quadratic dynamical system. Their persistence under numerical verification highlights the multiplicity of periodic orbits in low-dimensional nonlinear models and provides a solid foundation for future theoretical investigation.The proof's structure is based on the existence analysis in [4].

Литература

1. A.A. Azamov, DN-Tracking Method to Prove the Existence of Limit Cycles, Moscow, 2008.
2. N.S. Bakhvalov, Numerical Methods, Nauka, Moscow, 1977.
3. E. Suli, D.F. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.
4. A.A. Azamov, O.S. Akhmedov, Existence of a Complex Closed Trajectory in a Three-Dimensional Dynamical System, Comput. Math. Math. Phys., 2011.

On a functional analysis approach to involutory parabolic equations

Ashyralyev A. [1,2,3], Rassovskii L.E.[2]

[1] Department of Mathematics, Bahcesehir University, 34353, Istanbul, Turkiye;

[2] Peoples Friendship University Russia, Ul Miklukho Maklaya 6,117198, Moscow, Russian Federation;

[3] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan;
aallaberen@gmail.com, lrossovskii@gmail.com

In the present paper, the initial value problem for the parabolic type involutory differential equation in a Banach space with the strongly positive operator is investigated. The main theorem on well-posed of this problem is proved. Positivity of multidimensional functional elliptic equations with Dirichlet condition is established. Furthermore, the theorem on well-posednes of the mixed problem for the multidimensional functional parabolic type involutory differential equation without mixed derivatives is proved.

Reference

1. A.L. Skubachevskii, On the problem of attainment of equilibrium for control-system with delay, Dokl. Akad. Nauk, 335, (1994), no. 2, 157–160; translation in Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 49, (1994), no. 2, 282–286.
2. C.E. Falbo, Idempotent differential equations, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 6, (2003), no.3,279-289.
3. R. Nesbit, Delay differential equations for structured populations, in book: S. Tuljapurkar et al. (eds.), Structured-Population Models in Marine, Terrestrial, and Freshwater Systems, Chapman Hall, 89-118, 1997.
4. D. Przeworska-Rolewicz, Equations with transformed argument: an algebraic approach, New York:Elsevier Scientific Publishing Company, 1973.
5. J. Wiener, Generalized solutions of functional differential equations, London Hong Kong: Singapore New Jersey, 1993. https://doi.org/10.1142/1860.
6. A. Cabada, F. Tojo, Differential equations with involutions. Amsterdam, Paris, Beijing: Atlantis Press, 2015.
7. A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed, On the hyperbolic type differential equation with time involution, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 109, (2020), no.1, 38-47.
8. A. Ashyralyev, M. Ashyralyyeva, O. Batyrova, A note on the telegraph type differential equation with involution, Advanced Mathematical Models & Applications, 2024, 9, (2024), no.2, 173-192.
9. A. Ashyralyev, T. A. Hidayat, A. A. Sarsenbi, On the stability of Schrodinger type involutory differential equations, Functional Analysis in Interdisciplinary Applications—II Conference paper, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 351, (2021), 127–140.
10. L.Simon, Application of monotone type operators to parabolic and functional parabolic PDEs. Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, 4, 267–321,2008.
11. T. Kato. Perturbation theory for linear operators. New York: Springer-Verlag, 1966.
12. L.E. Rossovskii, Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function, J. Math. Sci. 223, (4), 351–493 (2017).
13. L.E. Rossovskii and A.R. Hanalyev, Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations, J. Math. Sci. 239, (6), 855–866 (2019).

An direct problem for an integro-differential parabolic equation with nonlocal initial-boundary and overdetermination conditions

Atoyev D.D.[1,2], Hasanova G.J.[1]

[1] Bukhara State University, M.Iqbol 11, Buxoro 200114, Uzbekistan
dilshodatoyev@mail.ru;

Let $T > 0, l > 0$ be fixed numbers and $D_{Tl} = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \le T\}$. Consider the inverse problem of determining of functions $u(x,t), k(t)$ such that they satisfy the equation

$$u_t - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_{Tl}, \tag{1}$$

the nonlocal initial condition

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \psi_1(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi_1(0) + \delta\psi_1(T), \quad \varphi'(l) + h\varphi(l) = \psi_2(0) + \delta\psi_2(T) \tag{4}$$

here $\delta \geq 0,\ h > 0$ are given numbers, $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ are given functions of $x \in [0, l]$ and $t \in [0, T]$.

When the functions $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t), k(t)$ are given, the problem of finding $u(x, t)$ from the initial boundary value problem (1)-(3) is called the **direct problem**.

In this work the existence and uniqueness of the solution of direct problem (1)-(4) is proved.

The main result of unique solvability is presented as follows.

Theorem 1. *Suppose that*

$$\varphi(x) \in C[0,\, l],\, \varphi'(x) \in L_2(0,\, l),\, k(t) \in C[0,\, T],\, \psi_1(t),\, \psi_2(t) \in C^1[0,\, T],$$

$$\delta \geq 0,\, h > 0,\, \varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi_1(0) + \delta\psi_1(T),\, \varphi'(l) + h\varphi(l) = \psi_2(0) + \delta\psi_2(T).$$

Then, if the following inequality is satisfied:

$$\delta\|k\|T^2\left(1 + \|k\|T^2 e^{\|k\|T^2}\right) < 1,$$

the problem (1)–(4) has a unique solution

$$u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T).$$

The (1)-(3) problem was replaced by an equivalent of an integral equation. The local existence and uniqueness of direct problem solution was proven.

REFERENCES

1. Durdiev D.K., Jumayev J.J., Atoev D.D., Convolution kernel determining problem for an integro-differential heat equation with nonlocal initial boundary and overdetermination conditions, Journal of Mathematical Sciences, 271 (2023), 56-65.
2. Durdiev D.K., Jumayev J.J., Atoev D.D., Kernel determination problem in an integro-differential equation of parabolic type with nonlocal condition, Vestnik Udmurtskogo Universiteta, 33(1) (2023), 90-102.
3. Durdiev D.K., Jumayev J.J., Atoev D.D., Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow, Ufa Mathematical Journal, 15(2) (2023), 119-134.

Bir o‘lchamli psevdogiperbolik tenglama uchun teskari masala

Avliyokuqov D. K., Maxtumova M. M., Mirzoyeva S. O.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston;
asliddinboltayev@mail.ru

Ushbu $D = \{(x, t)|0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$ sohada

$$u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} + \int\limits_0^1 g(t-\tau)u_{xxt}(x, \tau)d\tau = 0 \tag{1}$$

tenglamaning [1]

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, 1] \tag{2}$$

boshlang‘ich

$$u(0,t) = u(1,t),\ \ u_x(0,t) = u_x(1,t),\ \ t \in [0,T] \tag{3}$$

periadik chegaraviy va

$$\int\limits_0^1 \eta(x)u(x,t)dx = h(t),\ \ t \in [0,T] \tag{4}$$

qo‘shimcha shartni qanoatlantiruvchi $\{u(x,t), K(t)\}$ yechimlar juftligini aniqlash masalasi qaralgan.

Ta’rif. (1)-(4) masalaning $\{u(x,t), K(t)\}$

$$u(x,t) \in C^{2,2}_{x,t}(D) \cap C^1(D),\ \ K(t) \in C[0,T]$$

funksional sinfga tegishli $\{u(x,t), K(t)\}$ yechimini topsish masalasi teskari masala deyiladi.

Adabiyotlar

1. E.I. Azizbayov, Y.T. Mehraliyev, On an inverse boundary-value problem for the pseudohyperbolic equation with noonclassicall boundary conditions, Haccetepe Journal of Mathematics-Statistics, (2025), V. 54, pp. 142-158.

Buziladigan to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun bir aralash masala haqida

Azizov M. S.[1]**, Xusanova X. Q.**[2]

Farg‘ona Davlat Universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

To‘g‘ri to‘rtburchakli sohada quyidagi masala qaralsin:

Masalaning qo‘yilishi. $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ sohada quyidagi

$$u_{tt} + t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \tag{1}$$

to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani

$$u\,(x,0) = \varphi_1\,(x)\,, \qquad u_t\,(x,0) = \varphi_2\,(x) \tag{2}$$

boshlang‘ich hamda

$$\begin{array}{cc} u\,(0,t) = 0, & u_x\,(0,t) = 0, \\ \left.\left(x^\alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u\,(x,t)\right)\right|_{x=1} = 0, & \left.\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u\,(x,t)\right)\right|_{x=1} = 0 \end{array} \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u\,(x,t)$ funksiya topilsin, bu yerda $\alpha \in (0,1)$, $\varphi_i\,(x)\,,\ i = 1,2$ - berilgan uzluksiz funksiyalar.

Teorema. $\varphi_i\,(x) \in C^5\,[0,1]$, $\varphi_i^{(6)}\,(x) \in L_2\,(0,1)$ bo‘lib, $\varphi_i\,(0) = \varphi'_i\,(0) = 0$, $\varphi''_i\,(1) = \varphi'''_i\,(1) = 0$, $\varphi_i^{(4)}\,(0) = \varphi_i^{(5)}\,(0) = 0$, $i = 1,2$ tengliklar o‘rinli bo‘lsin. U holda qo‘yilgan masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) a_n\ t^{\frac{1}{2}}}{(3)^{\frac{2}{3}} (\lambda_n)^{\frac{1}{6}}}\ J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n}\, t^{\frac{3}{2}}\right)\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) b_n\, t^{\frac{1}{2}}}{(3)^{\frac{1}{3}} (\lambda_n)^{-\frac{1}{6}}}\ J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n}\, t^{\frac{3}{2}}\right)\ \Bigg] y_n\,(x)\,,$$

bu yerda $\Gamma\,(z)$ - Gamma funksiya, $J_\nu\,(z)$ - birinchi tur Bessel funksiyasi,

$$a_n = \int\limits_0^1 \varphi_1\,(x)\, y_n\,(x)\, dx, b_n = \int\limits_0^1 \varphi_2\,(x)\, y_n\,(x)\, dx, \quad n \in N,$$

Furye koeffisiyenti, λ_n va $y_n\,(x)$ - qo‘yilgan masalaning yechimini o‘zgaruvchilarni ajratish (Furye) usulini qo‘llash natijasida kelib chiqadigan

$$\left(x^\alpha y''\,(x)\right)'' = \lambda y\,(x)$$

$$y\,(0) = 0, \quad y'\,(0) = 0; \qquad \left(x^\alpha y''\,(x)\right)\big|_{x=1} = 0, \quad \left(\left(x^\alpha y''\,(x)\right)'\right)\big|_{x=1} = 0,$$

spektral masalaning xos son va xos funksiyalari.

On the integration of the periodical CH-γ equation with a self-consistent source

Babajanov B.A.[1], Atajonov D.O.[2], Sultanova M.U.[3]
[1,2,3]Urgench State University named after Abu Raykhan Beruni, Urgench, Uzbekistan
diwa_4848@mail.ru

In 2001, Dullin et al. presented and studied all smooth, peaked solitary wave solutions of the generalized Camassa-Holm equation

$$u_t + c_0\, u_x + 3uu_x - \alpha^2 (u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) + \gamma\, u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

using the dynamical systems method [1], which is called the γ-Camassa-Holm (CH-γ) equation. Where α, c_0, γ are constant and $\alpha \neq 0$.

We consider the CH-γ equation with a self-cocsistent source

$$u_t - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 3uu_x + \gamma\,(u_x - u_{xxx}) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) s\,(\pi,\ \lambda_k, t) \left[q_x\,(x,t)\, \psi^2\,(x, \lambda_k, t) + 2q(x,t) \left(\psi^2\,(x, \lambda_k, t)\right)'\right] \tag{2}$$

in the class of real-valued π-periodic on the spatial variable x function $u = u\,(x,t)$ which satisfy the regularity of assumption

$$u \in C_x^3\,(t > 0) \cap C_t^1\,(t > 0) \cap C\,(t \geq 0)$$

with the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R, \tag{3}$$

where $q = u(x,t) - u_{xx}\,(x,t)$, $u_0\,(x) \in C^3(R)$ is the given real-valued π -periodic function and $\psi_\pm = \psi_\pm\,(x, \lambda_k, t)$ are the Floquet solution (normalized by the condition $\psi_\pm\,(0, \lambda, t) = 1$) of the weighted Sturm–Liouville equation

$$y'' = \frac{1}{4} y + \lambda q(x,t) y, \quad x \in R. \tag{4}$$

We denote by $c\,(x,\ \lambda_k, t)$ and $s\,(x, \lambda_k, t)$ the solutions of equation (4) satisfying the initial conditions $c\,(0, \lambda_k, t) = 1, \mathrm{c}'\,(0, \lambda_k, \mathrm{t}) = 0$ and $s\,(0, \lambda_k, \mathrm{t}) = 0,\ s'\,(0, \lambda_k, \mathrm{t}) = 1$ respectively.

Here λ_k is zeros of the function $\Delta^2(\lambda_k)-4$, where $\Delta(\lambda_k)=c(\pi,\ \lambda_k,t)+s'(\pi,\ \lambda_k,t)$. In system (2), $\alpha_k(t)$, $k\in Z$, can be chosen freely within the class of real-valued continuous functions having uniform asymptotic decay $\alpha_k=O\left(\frac{1}{k^2}\right),\ k\to+\infty$.

Note that problem (2)–(4) for $\gamma=0$ was solved in [2] using the inverse problem method.

The aim of this work is to provide a procedure for constructing the solution $u(x,t)$, $\psi_\pm(x,\lambda_k,t)$ of the problem (2)-(4) using the inverse spectral theory for the weighted Sturm–Liouville equation (4).

Under this assumption the spectrum of the weighted Sturm–Liouville equation (4) is absolutely continuous and coincides with the set [2,3]

$$E=\{\lambda\in R\colon -2\le\triangle(\lambda)\le 2\}=[\lambda_0,\ \lambda_1]\cup[\lambda_2,\ \lambda_3]\cup\cdots\cup[\lambda_{2n},\ \lambda_{2n+1}]\ldots.$$

The intervals $(-\infty,\ \ \lambda_0),\ \ (\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}),\ \ n\ge 1$ are called the gaps or lacunas.

We denote by $\xi_n, n\ge 1$ the zeros of the function $s(\pi,\lambda,t)$. Notice that ξ_n coincides with the eigenvalues of the Dirichlet problem for equation (4). Moreover, the inclusions $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$ and the equality

$$s(\pi,\ \lambda,t)=2sh\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\xi_n}\right)\tag{5}$$

are fulfilled.

The quantities $\xi_n, n\ge 1$ with the signs $\sigma_n=sign\left\{s'(\pi,\ \xi_n,t)-c(\pi,\ \xi_n,t)\right\}$, $n\ge 1$ are called the spectral parameters of the weighted Sturm–Liouville equation (4).

The boundaries λ_n of the spectrum and the spectral parameters ξ_n, σ_n are called the spectral data of the weighted Sturm–Liouville equation (4). The determination of spectral data of (4) is called a direct spectral problem and conversely, the restoration of the coefficient $q(x)$ of (4) by spectral data is called an inverse spectral problem.

The main result of the paper is stated in the theorem below.

Theorem 1. Let $u(x,t)$ and $\psi_\pm(x,\lambda_n,t)$ be solution of the problem (2)-(4). Then the spectrum of the problem (4) does not depend on t, and the spectral parameters $\xi_n=\xi_n(t),\ \ \sigma_n=\sigma_n(t),\ \ n\ge 1$ satisfy the analogue of the system of Dubrovin equations

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\left(\frac{1}{2\xi_n}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_j}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}+\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_n\alpha_k(t)s(\pi,\ \lambda_k,\mathrm{t})}{\xi_n-\lambda_k}\right\}h_n(\xi),\tag{6}$$

where

$$h_n(\xi)=\frac{\sigma_n\xi_n\sqrt{\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_0}\right)\ \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_{2i-1}}\right)\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_{2i}}\right)}}{\prod\limits_{j\ne n,\,j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\xi_j}\right)}.$$

The sign $\sigma_n(t)=\pm 1$ changes at each collision of the point $\xi_n(t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Moreover, the following initial conditions are fulfilled:

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0,\ n\ge 1,\tag{7}$$

where ξ_n^0, σ_n^0, $n\ge 1$ are the spectral parameters of the weighted Sturm–Liouville equations (4) corresponding to the coefficients $q_0(x)=u(x,0)-u_{xx}(x,0)$.

LITERATURE

1. Dullin H.R., Gottwald G.A., Holm D.D. An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion. Phys. Rev. Lett. 2001. 1–4 C.
2. Hasanov A.B., Babajanov B.A., Atajonov D.O. On the Integration of the Periodic Camassa-Holm Equation with a Self-Consistent Source. Journal of SibFU. Mathematics and Physics, 2022. 15, 785–796 c.
3. Constantin A. On the spectral problem for the periodic Camassa-Holm equation. J. Math. Anal. Appl. 1997. 215–230 C.
4. Constantin A.A general-weighted Sturm-Liouville problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1997. 767–782 C.

On the integration of the periodical CH-γ equation with an integral type source

Babajanov B.A.[1], Atajonov D.O.[2], Yakubova M.Z.[3]

[1,2,3]Urgench State University named after Abu Raykhan Beruni, Urgench, Uzbekistan;
diwa_4848@mail.ru

In 2001, Dullin et al. presented and studied all smooth, peaked solitary wave solutions of the generalized Camassa-Holm equation

$$u_t + c_0\, u_x + 3uu_x - \alpha^2(u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) + \gamma\, u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

using the dynamical systems method [1], which is called the γ-Camassa-Holm (CH-γ) equation. Where α, c_0, γ are constant and $\alpha\neq 0$.

We consider the CH-γ equation with an integral type source

$$\begin{gathered} u_t - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 3uu_x + \gamma\,(u_x - u_{xxx}) + \\ + \int_0^\infty \beta\,(\lambda, t)\, s\,(\pi, \lambda, t)\left[q_x\psi_+\psi_- + 2q(\psi_+\psi_-)'_x\right] d\lambda \end{gathered} \tag{2}$$

in the class of real-valued π-periodic on the spatial variable x function $u = u\,(x, t)$ which satisfy the regularity of assumption

$$u \in C_x^3\,(t > 0) \cap C_t^1\,(t > 0) \cap C\,(t \geq 0)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \;\; x \in R, \tag{3}$$

where $q = u(x,t) - u_{xx}\,(x,t)$, $u_0\,(x) \in C^3(R)$ is the given real-valued π -periodic function and $\psi_\pm = \psi_\pm\,(x, \lambda, t)$ are the Floquet solution (normalized by the condition $\psi_\pm\,(0, \lambda, t) = 1$) of the weighted Sturm–Liouville equation

$$y'' = \frac{1}{4}y + \lambda q(x,t)y, \quad x \in R. \tag{4}$$

We denote by $c\,(x,\ \lambda, t)$ and $s\,(x, \lambda, t)$ the solutions of equation (4) satisfying the initial conditions $c\,(0, \lambda, t) = 1, \mathrm{c}'\,(0, \lambda, \mathrm{t}) = 0$ and $s\,(0, \lambda, \mathrm{t}) = 0,\ \ s'\,(0, \lambda, \mathrm{t}) = 1$ respectively. Here λ is zeros of the function $\Delta^2\,(\lambda) - 4$, where $\Delta\,(\lambda) = c\,(\pi,\ \lambda, t) + s'\,(\pi,\ \lambda, t)$. In system (2), $\alpha_k(t)$, $k \in Z$, can be chosen freely within the class of real-valued continuous functions having uniform asymptotic decay $\alpha_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right),\ k \to +\infty$.

Note that problem (2)–(4) for $\gamma = 0$ was solved in [2] using the inverse problem method.

The aim of this work is to provide a procedure for constructing the solution $u\,(x, t)$, $\psi_\pm\,(x, \lambda, t)$ of the problem (2)-(4) using the inverse spectral theory for the weighted Sturm–Liouville equation (4).

Under this assumption the spectrum of the weighted Sturm–Liouville equation (4) is absolutely continuous and coincides with the set [2,3]

$$E = \{\lambda \in R\colon -2 \leq \triangle(\lambda) \leq 2\} = [\lambda_0,\ \lambda_1] \cup [\lambda_2,\ \lambda_3] \cup \cdots \cup [\lambda_{2n},\ \lambda_{2n+1}] \ldots.$$

The intervals $(-\infty,\ \ \lambda_0)\,,\ \ (\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})\,,\ \ n \geq 1$ are called the gaps or lacunas.

We denote by $\xi_n, n \geq 1$ the zeros of the function $s(\pi, \lambda, t)$. Notice that ξ_n coincides with the eigenvalues of the Dirichlet problem for equation (4). Moreover, the inclusions $\xi_n \in [\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$ and the equality

$$s\,(\pi,\ \lambda, t) = 2sh\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\xi_n}\right) \tag{5}$$

are fulfilled.

The quantities $\xi_n, n \geq 1$ with the signs $\sigma_n = sign\,\{s'\,(\pi,\ \xi_n, t) - c\,(\pi,\ \xi_n, t)\}$, $n \geq 1$ are called the spectral parameters of the weighted Sturm–Liouville equation (4).

The boundaries λ_n of the spectrum and the spectral parameters $\xi_n,\ \sigma_n$ are called the spectral data of the weighted Sturm–Liouville equation (4). The determination of spectral data of (4) is called a direct spectral problem and conversely, the restoration of the coefficient $q(x)$ of (4) by spectral data is called an inverse spectral problem.

The main result of the paper is stated in the theorem below.

Theorem 1. Let $u(x,t)$ and $\psi_{\pm}(x, \lambda, t)$ be solution of the problem (2)-(4). Then the spectrum of the problem (4) does not depend on t, and the spectral parameters $\xi_n = \xi_n\,(t)\,,\ \ \sigma_n = \sigma_n\,(t)\,,\ \ n \geq 1$ satisfy the analogue of the system of Dubrovin equations

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \left(\frac{1}{2\xi_n} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_j} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} + \gamma + \int_0^{\infty}\frac{\xi_n\beta\,(\lambda, t)\,s\,(\pi, \lambda, t)}{\lambda - \xi_n}d\lambda\right\}h_n\,(\xi)\,, \tag{6}$$

where

$$h_n\,(\xi) = \frac{\sigma_n\xi_n\sqrt{\left(1 - \frac{\xi_n}{\lambda_0}\right)\ \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\xi_n}{\lambda_{2i-1}}\right)\left(1 - \frac{\xi_n}{\lambda_{2i}}\right)}}{\prod\limits_{j\neq n,\, j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_j}\right)}.$$

The sign $\sigma_n(t) = \pm 1$ changes at each collision of the point $\xi_n(t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Moreover, the following initial conditions are fulfilled:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0,\ n \geq 1, \tag{7}$$

where ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ are the spectral parameters of the weighted Sturm–Liouville equations (4) corresponding to the coefficients $q_0\,(x) = u\,(x, 0) - u_{xx}\,(x, 0)$.

LITERATURE

1. Dullin H.R., Gottwald G.A., Holm D.D. An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion. Phys. Rev. Lett. 2001. 1–4 C.
2. Babajanov B.A., Atajonov D.O. On the Integration of the Periodic Camassaв Holm Equation with an Integral-Type Source. Russian Mathematics, 2022. 66, 1–11 c.
3. Constantin A. On the spectral problem for the periodic Camassa-Holm equation. J. Math. Anal. Appl. 1997. 215–230 C.
4. Constantin A. A general-weighted Sturm-Liouville problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1997. 767–782 C.

Unique Solvability of the Cauchy Problem for Klein-Gordon-Fock Equation with Loaded Term

Baltaeva U. I.[1], **Egamberganova Z. A.**[2]
Khorezm Mamun Academy[1,2], Khiva, Uzbekistan;
umida_baltayeva@mail.ru, z.egamberganova24@gmail.com

The following work investigates the single-valued solution of the Cauchy problem for the generalized Klein-Gordon-Fock equation with Bessel operator[1] with $n = 2$, $\beta = 0$, $\lambda = 0$, and loaded term.

We consider the Cauchy problem of finding a function $u(x, y, t)$ that satisfies the initial conditions in the domain $D = \{(x, y, t) : x, y \in R^2, t \in R^1_+, x, y > t\}$ for the Klein-Gordon-Fock equation with Bessel operator and loaded term

$$L^{0,\mu}_{0,\alpha}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = \mu u(x, y_0, t) \quad (1)$$

and

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \phi(x, y),\ x \ge 0,\ y \ge 0$$
$$u_t(x, y, t)|_{t=0} = \psi(x, y),\ x > 0,\ y > 0 \quad (2)$$

where, $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ and $f(x, y, t)$ are given sufficiently smooth functions, α, γ, μ- real constant numbers; $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $y_0 \ge 0$.

Theorem. If $\varphi(x, y) \in C\left(\overline{\mathbb{R}}^2_+\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ and $\psi(x, y) \in C\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, then the solution $u(x, y, t)$ to the Cauchy problem defined by $(1) - (3)$ problem is unique and exists.

To solve the Cauchy problem, we seek the solution $u(x, y, t)$ in the form of a sum [2]

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t), \quad (3)$$

where w is a solution to the problem (5)

$$w_{tt} + \frac{2\beta}{t}w_t - \left(w_{xx} + \frac{2\alpha}{x}w_x\right) + \lambda^2 w = \mu w(x, y_0, t),$$

$$w(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad x \ge 0,\ y \ge 0$$
$$w_t(x, y, t) = \psi(x, y), \quad x > 0,\ y > 0. \quad (4)$$

and, v is a solution (6)

$$v_{tt} + \frac{2\beta}{t}v_t - \left(v_{xx} + \frac{2\alpha}{x}v_x\right) + \lambda^2 v = \mu v(x, y_0, t),$$

$$v(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0,\ y \ge 0$$
$$v_t(x, y, t) = 0, \quad x > 0,\ y > 0 \quad (5)$$

we will handle the (5) problem and look for the solution

$$u(x, y, t) = J^{(x,y)}_{0,0}\begin{pmatrix} \alpha\,, & \gamma \\ -\frac{1}{2}\,, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, t) = \frac{4x^{1-2\alpha}y^{1-2\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^x \int_0^y (x^2 - \xi^2)^{\alpha-1}$$

$$\times \times (y^2-\eta^2)^{\gamma-1}U(\xi,\eta,t)d\xi dt. \tag{6}$$

In problems (5) and (6), we eliminate the singularity with respect to α and γ using the Erdelyi-Kober[3] operator in (7). As a result, obtain a Cauchy problem for a non-homogeneous hyperbolic equation. To establish unique solvability of this problem, we use the Poisson formula for one part and Duhamel's method for the other.

LITERATURE

1. Каримов Ш. Т. Операторы Эрдейи-Кобэра и их приложения к дифференсиальным уравнениям в частных производных, Дисс. доктора физ.-мат. наук. Фергана 2019.
2. Baltaeva U.I., Khasanov B.M. Cauchy problem for a loaded hyperbolic equation with the Bessel operator, DOI: 10.1515/ms-2024-0090 Mathematica Slovaca 74(2024), 5, C. 1241–1254.
3. Urinov A., Karimov S. Solution of the analogue of the Cauchy problem for the iterated multidimensional Klein-Gordon-Fock equation with the Bessel operator, arXiv preprint arXiv:1711.00093. 2017.

Algebraic-geometric methods for studying resonances in Hamiltonian mechanics problems

Batkhin A.B.[1], Khaydarov Z.Kh.[2]
[1] Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel;
[2]Samarkand State University named after Sh. Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
batkhin@gmail.com , zafarxx@gmail.com

The study presents algebraic-geometric methods for investigating resonance conditions in Hamiltonian systems with three degrees of freedom. The research focuses on the analysis of formal stability of equilibrium positions in multiparameter Hamiltonian systems using their normal forms under the condition of absence of resonances of small orders.

The main approach involves symbolic computation of resonance existence conditions for arbitrary order resonances. For a given resonance vector $\mathbf{p}^*=(r,q,1)$, the resonance condition is represented as a quadratic form in terms of roots μ_k:

$$R_3^{(r,q,1)}(\mu_j)\equiv q^4\mu_2^2-2q^2r^2\mu_1\mu_2+r^4\mu_1^2-2q^2\mu_2\mu_3-2r^2\mu_1\mu_3+\mu_3^2=0.$$

Using power transformations and computer algebra methods (Maple packages), we obtained polynomial parameterization of the resonance manifold:

$$\begin{aligned}&\mu_3=vr^2(u+2q)^2,\\&\mu_2=vr^2u^2,\\&\mu_1=v((q+1)u+2q)^2.\end{aligned}$$

The coefficients of the semi-characteristic polynomial are expressed as:

$$a_1=-v[(2r^2+(q+1)^2)u^2+4q(r^2+q+1)u+4q^2(r^2+1)],$$

$$\begin{gathered}a_2=v^2[(r^2+2(q+1)^2)u^4+4q(r^2+q^2+4q+3)u^3\\+4q^2(r^2+q^2+6q+7)u^2+16q^3(q+1)u+16q^4]\\a_3=-r^4v^3u^2(u(q+1)+2q)^2(u+2q)^2.\end{gathered}$$

The research demonstrates that for the three-frequency resonance case with vector $\mathbf{p}^* = (1,1,1)$, the resonance manifold is described by the simple equation $R_3^{(1,1,1)} \equiv a_1^2 - 4a_2 = 0$, representing a parabola in the parameter space.

For the two-frequency resonance case $\mathbf{p}^* = (q,1,0)$, the condition takes the form:

$$f_1 = (q^4+q^2+1)^3 a_3^2 + q^4(q^2+1)^2 a_2^3 + q^4(q^2+1)^2 a_1^3 a_3$$

$$-q^6 a_1^2 a_2^2 - q^2(q^4+q^2+1)(q^4+4q^2+1)a_1 a_2 a_3 = 0.$$

The practical application of the method is demonstrated on a model example of a two-parameter pendulum-type system with three degrees of freedom. The mutual arrangement of resonance curves corresponding to two-frequency ($R_3^{(3,1,0)}$) and three-frequency ($R_3^{(2,1,1)}$) resonances of the 4th order is analyzed:

$$\begin{aligned}
R_a^{(3,1,0)} &\equiv \beta = \frac{8\alpha}{2+\alpha},\\
R_b^{(3,1,0)} &\equiv \beta = 8,\\
R_c^{(3,1,0)} &\equiv \beta = \frac{4\alpha}{1-4\alpha},\\
R_a^{(2,1,1)} &\equiv \beta = 4\alpha^2 + 4\alpha,\\
R_b^{(2,1,1)} &\equiv \beta = \frac{8\alpha(2-\alpha)}{(3\alpha-2)^2}.
\end{aligned}$$

The research shows that the developed parameterization ensures that parameters A_1 and A_2 automatically fall within the stability region when using real parameter values. This approach significantly simplifies the analysis of resonance manifolds' mutual arrangement in the parameter space and allows for the identification of stability regions free from strong resonances.

The combination of symbolic computation methods with algebraic-geometric approaches provides an effective tool for studying complex dynamics of Hamiltonian systems and identifying regions of formal stability in multiparameter problems.

LITERATURE

1. Moser J.K. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, No. 1. P. 81-114.
2. Batkhin A.B., Khaydarov Z.Kh. Strong resonances in nonlinear Hamiltonian system. Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics. 2022. No. 59. P. 1-28.
3. Bruno A.D. On formal stability of Hamiltonian systems. Mathematical Notes. 1967. Vol. 1, No. 3. P. 325-330.
4. Batkhin A.B., Khaydarov Z.Kh. Computation of strong resonance condition in Hamiltonian system. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2023. Vol. 63, No. 5. P. 697-714.

Problems of integral geometry with truncated rays and singular weight

Begmatov A. Kh.[1], Ismoilov A. S.[2]

[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
akrambegmatov@mail.ru

Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

Problems of integral geometry, where the values of integrals of an unknown function are known over families of curves or surfaces, occupy a central place in mathematical analysis, physics, and applied fields such as computed tomography, geophysics, and diagnostics. A classical example is the problem of reconstructing a function from its integrals along straight lines (the Radon transform), which is used, in particular, in medical imaging. However, complications in the geometry of the integration set or the appearance of singularities in weight functions lead to ill-posednessЧin the sense of uniqueness, stability, or existence of an inverse operator.

The fundamental foundations of the theory of ill-posed and inverse problems were laid in the works of M.M. Lavrentyev, V.G. Romanov, S.P. Shishatsky [1], as well as in monographs [2,3], where methods of regularization and classification of ill-posedness were developed.

In this paper, new formulations of integral geometry problems arising from data limitations and the presence of a singular weight are considered. The motivation comes from applied problems of tomography, physics, and geometric analysis.

Problem statement. We consider the integral relation:

$$\int_0^L s^{-\beta} u(x_1 + s\cos\alpha, x_2 + s\sin\alpha, x_3 + s)\, ds = f(x_1, x_2, x_3, \alpha),$$

где:

- $u(x_1, x_2, x_3)$ is the unknown function, finite and continuous in Ω;
- $\alpha \in [0, 2\pi]$ is the direction parameter;
- $L > 0$ is the fixed length of the ray;
- β is the weight parameter, $0 < \beta < 1$;
- $f(x_1, x_2, x_3, \alpha)$ is a given smooth function with compact support.

The goal is to reconstruct u in the domain Ω from the known right-hand side f.

In the second case, integration is carried out along curved rays:

$$\gamma_s(x) = (x_1 + s\cos\alpha, x_2 + s\sin\alpha, x_3 + \psi(s)),$$

and the integral has the form

$$\int_0^L s^{-\beta} u(x_1 + s\cos\alpha, x_2 + s\sin\alpha, x_3 + \psi(s))\, ds = f(x_1, x_2, x_3, \alpha),$$

where $\psi(s)$ is a strictly increasing smooth function:

$$\psi(s) = \begin{cases} s^2, & \text{parabolic trajectory;} \\ \ln(1+s), & \text{logarithmic deceleration.} \end{cases}$$

Both models represent new problems of integral geometry with truncated trajectories and singular weight. They extend the results of [4] and open the way to rigorous analysis of stability and correctness.

Results

Within both formulations, the problem of reconstructing the function $u(x_1, x_2, x_3)$ from its integrals along truncated rays with singular weight $s^{-\beta}$, где $0 < \beta < 1$has been investigated. The main achievements are as follows:

1. Straight rays

- A regularizing sequence of solutions along truncated straight lines has been constructed.
- Logarithmic stability of reconstruction of u from the data $f$has been proved, indicating weak ill-posedness for $\beta < 1$.
- Stability estimates in suitable functional spaces have been obtained.
- Existence and uniqueness of a generalized solution are established under smoothness and finiteness conditions.

2. Curved rays

- A new model of integration along parametrically defined curve $\gamma_s(x)$ with a lifting function $\psi(s)$ is introduced.
- A change of variables and reduction to a modified convolution problem with variable kernel have been carried out.
- It is proved that the problem retains logarithmic stability even under trajectory curvature.
- It is shown that the form of $\psi(s)$ affects the operators behavior but does not violate the general reconstruction mechanism, provided ψ is strictly monotone and smooth.

Both formulations expand the class of known problems of integral geometry and demonstrate the possibility of reconstruction from limited data in the presence of a singular weight. The analysis methods include the construction of a Volterra-type operator equation and the use of a priori estimates. The obtained results are consistent with the authors previous studies on problems with nonclassical geometries and weights (see [4-6]).

References

1. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed Problems, Moscow: Nauka, 1980.
2. Lavrentev M.M., Savelev L.Ya. Operator Theory and Ill-posed Problems, Publishing House of the Institute of Mathematics, Moscow, 2010.
3. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed Problems, Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk, 2009.
4. Begmatov A.Kh. wo classes of weakly ill-posed problems of integral geometry in the plane., Siberian Mathematical Journal, 1995, vol. 36, no. 6, pp. 1208-1220.
5. Begmatov A.Kh. Volterra-type problems of integral geometry in the plane for curves with singularities., Siberian Mathematical Journal, 1997, vol. 38, no. 4, pp. 723-737.
6. Begmatov A.Kh. On an inversion problem of the Radon transform with incomplete data, Siberian Mathematical Journal, 2001, vol. 42, no. 3, pp. 507-514.

The boussinesq-type differential equation with non-local boundary conditions

Boboxo'jayeva N.[1]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
nazokatbobokhujayeva@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an arbitrary bounded domain with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ and $T > 0$. Consider in the cylinder $\Omega \times (0, T)$ the following equation

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \nu^2 \Delta u = 0, \quad x \in \Omega,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

where parameter ν is a positive number.

Let A be a positive self-adjoint extension of Laplace operator $-\Delta$: $Au = -\Delta u$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$(Au, u) \geq \mu(u, u), \quad \mu > 0, \quad u \in D(A)$$

We assume that A has a compact inverse operator A^{-1}. Let λ_k and $v_k(x)$ be the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the self-adjoint operator A:

$$Av_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega$$

According to our assumptions, $\mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_k \to \infty$ Set

$$\nu_k = \nu\sqrt{\frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k}}$$

We consider non-local conditions

$$u(x, 0) = u(x, T), \tag{2}$$

$$u(x, T/2)\int_0^T u(x, t)\, dt = \varphi(x) \tag{3}$$

Equations of the form (1) are known as linearized Boussinesq-type equations . A number of studies Sh.A.Alimov and A.R.Khalmukhamedov are devoted to study of various problems Boussinesq type equations. The present problem belongs to the class of Boussinesq-type non-local boundary value problems and is closely related to [1]. The main difference is that, whereas previous works primarily considered non-local conditions, the current problem involves an integral condition (3), adding additional complexity to its formulation and analysis. Earlier studies, in particular [1]-[3], focused on solving Boussinesq-type equations using spectral methods, Fourier series expansions, and analytical techniques. The solution methods remain similar to [1], but the integral condition introduces specific features that require careful analysis.

We say that a function $u(x, t)$ is a solution to the non-local problem (1), (2) and (3) if the following conditions are satisfied:

1) $u(x, t) \in D(A)$ for all $t \in (0, T)$, and the function $u(x, t)$ is continuous with respect to t in the norm of $L_2(\Omega)$;

2) the function $u(x, t)$ and $Au(x, t)$ are twice continuously differentiable with respect to t on the open interval $(0, T)$ in the $L_2(\Omega)$-norm;

3) the function $u(x, t)$ satisfies equation (1) and the non-local conditions (2) and (3). Assume that, $0 < \nu T < 2\pi$.

Theorem. Let $\varphi \in D(A)$, then the solution of the problem (1), (2) and (3) exists and is unique.

Solving method. We can rewrite (1) as

$$(I + A)u_{tt} + \nu^2 Au = 0$$

$$u_{tt} + \nu^2 A(I + A)^{-1}u = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T \tag{4}$$

Assume that $u(x, t)$ is solution of the problem (4), (2) and (3). Then, the spectral decomposition of the solution has the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) v_k(x) \tag{5}$$

where

$$c_k(t) = (u, v_k) = \int_\Omega u(x,t) v_k(x) dx.$$

We solve the problem with the method like a [1] Multiplying equation (4) by $v_k(x)$, we obtain

$$c_k^{''}(t) + \nu_k^2 c_k(t) = 0 \tag{6}$$

$$c_k(t) = a_k cos\nu_k t + b_k sin\nu_k t \tag{7}$$

We add to this equation two conditions that follow from (2) and (3):

$$c_k(0) = c_k(T) \tag{8}$$

$$c_k(T/2) + \int_0^T c_k(t) dt = \varphi_k \tag{9}$$

By using these conditions, we can find a_k and b_k.

Hence, the solving of the problem (1), (2) and (3) exists and is unique.

LITERATURE

1. Sh. A. Alimov, A. R. Khalmukhamedov, On a Non-Local Problem for a Boussinesq Type Differential Equation , ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 4, 916-923.

2. T. K. Yuldashev, Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type Differ. Equat. 54, 1384-1393 (2018).

3. A. R. Khalmukhamedov and E. I. Kuchkorov, On the solvability of a nonlocal problem for a Boussinesq type differential equation, Russ. Math. (Iz. VUZ) 67 (10), 54-62 (2023).

4. T. K. Yuldashev, Mixed differential equation of a Boussinesq type, Vestnik Volgograd. Gos. Universiteta, Seriya 1, Matem., Fizika 2 (33), 13-26 (2016) (in Russian).

Shar sirtida chetlanuvchi argumentga ega Laplas tenglamasi uchun dirixle masalasi

Djakayeva K. O.[1], Jamalov Q. N.[2], Urinbaeva G. B.[2]
[1]Innovatsion texnologiyalar universiteti, Nukus, O'zbekiston;
[2]Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti, Nukus, O'zbekiston;
djakaevakenja@gmail.com, qayratdinjamalov95@gmail.com

Radiusi R ga teng bo'lgan sharda Laplas tenglamasini qanoatlantiradigan, shar sferasida esa $f(\theta, \varphi)$ funksiyasiga teng bo'ladigan chetlanuvchi argumentga ega Laplas tenglamasi uchun

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \delta u = 0, \quad R < r, \tag{6}$$

$$u(R, \varphi, \theta) = f(\varphi, \theta), \tag{7}$$

$$u(r, -\alpha, \theta) = 0, \quad u(r, \alpha, \theta) = 0 \tag{8}$$

chegaraviy masalaning yechimini topish masalasini ковҐЧrib chiqaylik, bu yerda:

$$\delta u = \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}(-\varphi, \theta) + u_{\theta\theta}(\varphi, \theta) + ctg\theta \cdot u_\theta(\varphi, \theta)$$

ковҐЧrinishidagi Beltra-Laplas operatori, $f(\varphi,\theta)$ funksiyasi esa φ argumenti bo'yicha juft funksiya.

(1) tenglamaning yechimini o'zgaruvchilarni ayirish usuli yordamida

$$u(r,\varphi,\theta)=X(r)V(\varphi,\theta)$$

ko'paytmasi tarzida izlaymiz. Buni (1) tenglamaga qo'yib, o'zgaruvchilarini ajratgandan so'ng $X(r)$ ga nisbatan

$$X_n(r)=a_nr^n+b_nr^{-(n+1)}$$

ковҐЧrinishidagi yechimga ega bo'lamiz. Masala shar sferasi tashqarisida ko'rib chiqilayotganligi uchun $a_n=0$ deb $X_n(r)$ ning $X_n(r)=b_nr^{-(n+1)}$ qiymatini tanlab olamiz.

$V(\varphi,\theta)$ ga nisbatan paydo вовҐЧladigan

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}+n(n+1)V=0$$

tenglamasining yechimini $V(\varphi,\theta)=\Phi(\varphi)\Omega(\theta)$ ko'rinishda izlasak, unda $\Omega(\theta)$ ga nisbatan

$$\Omega_n^m(\theta)=P_n^{(m)}(\theta),\ \ m=0,1,..,n;\ \ \ n=0,1,2,...$$

ko'rinishidagi yechimga ega bo'lamiz, bu yerda $P_n^{(m)}(\theta)$ Lejandr funksiyasi.

Chetlanuvchi argumentga ega differensial tenglamani yechish orqali aniqlanadigan $\Phi(\varphi)$ funksiyasiga nisbatan (3) chegaraviy shartlarni hisobga olib

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(-\varphi)=0,$$

$$\Phi(-\alpha)=\Phi(\alpha)=0$$

chegaraviy masalaga ega bo'lamiz. $\Phi(\varphi)$ ga nisbatan bu chegaraviy masalaning yechimi

$$\Phi_m(\varphi)=B_m\cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\varphi,\ \ \ m=0,1,\ 2,...,$$

вовҐЧlib, $V(\varphi,\theta)$ ga nisbatan

$$V_{mn}(\varphi,\theta)=\Phi_m(\varphi)\Omega_n^m(\theta)=B_m\cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

yechimga ega bo'lamiz. Natijada (1) tenglamaning Fure ma'nosidagi umumiy yechimi

$$u(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{b_nB_m}{r^{n+1}}\cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\varphi\,P_n^{(m)}(\cos\theta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{c_{mn}}{r^{n+1}}\cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\varphi\,P_n^{(m)}(\cos\theta) \tag{9}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $c_{mn}=b_nB_m$.

Noma'lum koeffitsiyentlar (2) chegaraviy shart bo'yicha

$$u(R,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{c_{mn}}{R^{n+1}}\cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta)=f(\varphi,\theta)$$

tenglikdan

$$c_{mn} = \frac{R^{n+1}}{\gamma_{nm}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{0}^{\pi} f(\varphi, \theta) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} \varphi P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda

$$\gamma_{nm} = \left\{ \frac{4\alpha}{2n+1},\ m=0;\ \ \frac{2\alpha(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!},\ \ m \neq 0 \right\}.$$

c_{mn} ning bu qiymatlarini (4) dagi o'rinlariga qo'yib, shar sirtidagi Dirixle masalasining yechimiga ega bo'lamiz.

Adabiyotlar

1. Абрегов М.Х., Кончукоев В.З., Шарданова М.А. Краевая задача первого рода для линейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом на симметричном отрезке. Международный научно-исследовательский журнал. Выпуск: Часть 5. 2016. стр. 6–11.
2. Салохиддинов М.С., Исломов Б.И. Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. Т.: MUMTOZSOЎZ, 2010. 372 б.

Determining the left side of a mixed parabolic-hyberbolic equation with characteristic type change line

Durdiyev D. K.[1], Rajabova M. O.[2]
Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after
V.I.Romanovskiy,Bukhara,Uzbekistan;
[1]d.durdiev@mathinst.uz,[2]rajabovamadina@gmail.com

Let Ω_{lT} be the finite open domain on the plane of variables $x,\ y$ consisting of the union of two subdomains, $\Omega_{lT} = \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l}$ with

$$\Omega_{1lT} = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leq T\}$$

$$\Omega_{2l} = \left\{(x,t) : -t < x \leq t + l,\ -\frac{l}{2} < t < 0\right\},$$

$l,\ T$- are fixed positive numbers. In this domain, we consider the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - sign\ t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{1 + sign\ t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1 + sign\ t}{2} q(t) u(x,t) = f(x) g(t). \tag{1}$$

Equation (1) of mixed parabolic-hyperbolic type. For it, the line of change of type $t = 0$ is a characteristic (parabolic degeneration of the second kind).

Direct problem. Find a solution of equation (1) in the domain Ω_{lT} that satisfies the following boundary conditions:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t),\ u|_{x=l} = \varphi_2(t), \quad t\ \in\ [0,T], \tag{2}$$

$$u|_{t=-x} = \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]. \tag{3}$$

where $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi(x)$ are given functions.

Definition. By the solution (classical) to the direct problem (1)-(3) we mean a function $u(x,t)$ in the class $C\left(\overline{\Omega}_{lT}\right) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C^{1,2}_{x,t}(\Omega_{1lT}) \cap C^2\left(\Omega_{2l}\right)$ that satisfies equation (1) and conditions (2), (3), where $\overline{\Omega}_{lT} = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\} \cup \{(x,t) : -t \le x \le t + l,\ -\frac{l}{2} \le t \le 0\}$.

Throughout this paper, with respect to the given functions, we will assume that the following conditions are satisfied:

$(B1)$ $(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)) \in C^1[0,T],\ \psi(x) \in C^2\left[0, \frac{l}{2}\right];$

$(B2)$ $\varphi_1(0) = \psi(0) = 0,\ \varphi_2(0) = 0;$

$(B3)$ $f(x),\ q(t) \in C[0,T],\ f(x_0) \ne 0;$

Using the above results, we obtain the following assertion.

Theorem. Let condition (B1)-(B3) be satisfied and $l\|q\|_{C[0,T]} < 1$. Then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) in Ω_{lT}.

LITERATURE

1. Durdiev D.K., Toshev D.A., Turdiev Kh.Kh. Determining the Right Side of a Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation with a Characteristic Type Change Line. Journal of the Siberian Federal University. Mathematics Physics 2023, 2(3), 258-270.

2. Durdiev D.K. Determining the Coefficient of a Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation with Noncharacteristic Type Change Line, Differential Equations, (2022),58:12, 1633-1644.

An initial-boundary value problem for one dimensional heat equation with involution

Durdiyev D.K.[1], Rashidov R.R.[2]

[1,2]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]rashidovravshanbek6@gmail.com, [2]urdimurod@inbox.ru

Differential equations with modified arguments are equations in which the unknown function and its derivatives are evaluated with modifications of time or space variables; such equations are called in general functional differential equations. Among such equations, one can single out equations with involutions.

Definition: A function $\alpha(x) \not\equiv x$ that maps a set of real numbers, Γ, onto itself on Γ the condition

$$\alpha(\alpha(x)) = x \ \ or \ \ \alpha^{-1}(x) = \alpha(x)$$

is called involution on Γ.

Consider the non-homogeneous heat equation

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t) + q(t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{1}$$

initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ x \in [-\pi, \pi], \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, \ \ t \in [0,T] \tag{3}$$

where $h(x)$, $g(t)$ are given and enough smooth functions, ε is a nonzero real number such that $|\varepsilon| < 1$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega := \{(x,t) | -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$.

Suppose that the data of the problem (1)-(3) the functions satisfy following assumption: The functions $\varphi(x)$ and $f(x,t)$ and satisfy the following assumptions

A1) $\varphi(x) \in C^2[-\pi,\pi]$, $\varphi^3(x) \in L^2[-\pi,\pi]$, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$;

A2) $f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,t) \in L^2(\Omega)$.

Theorem: If $q(t) \in C[0,T]$ (A1)-(A2) are satisfied, then there exists a unique solution to the direct problem (1)-(3) $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

REFERENCES

1.A.Ashyralyev and A.M.Sarsenbi, Well-posedness of an elliptic equation with involution, Electron. J.Differ.Equ 2015(284), 1 -8, 2015.
2.A.R. Aftabizadeh, Y.K. Huang and J. Wiener, Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument, J. Math. Anal. Appl. 135 (1), 31вЃY37, 1988.

Inverse Problem for a Mixed-Type Equation with Fractional Derivative

Duysenbaev R. S.
Tashkent state technical university named after Islam Karimov, Tashkent, Uzbekistan;
ruslanduysenbaev.0299@gmail.com

In this work, we consider an inverse problem for a mixed-type equation with Rimann-Liouville type derivatives involving involution. This inverse problem is close to that investigated in [1]. Together with the solution it is necessary to find an unknown right-hand side of the equation. In work [3], by authors was considered a process that is so slow that it is described by an evolutionary equation with a fractional time derivative. Thus, this process is described by equation

$$t^{-\beta} D_t^{\alpha}\Phi(x,t) - \Phi_{xx}(x,t) + \varepsilon\Phi_{xx}(-x,t) = f(x), \quad \alpha+\beta > 0,$$

in the domain $\Omega = \{(x,t) : -\pi < x < \pi, \ 0 < t < T\}$.. Here, $f(x)$ stands for an external source that does not change with time; $t = 0$ is an initial time point and $t = T$ is a final one.

Different problems for differential equations with involutions have been studied by many authors, as A. Ashyralyev [2], M. A. Sadybekov [3], A.Andreev [4], M.Sh Burlutskayaa [5] and others.

As far as we know, direct and inverse problems for a mixed-type equation with involution, including fractional derivatives, have not been investigated before.

In this work, we state an inverse problem for a mixed-type equation with Rimann-Liouville type derivatives involving involution.

We consider

$$f(x) = \begin{cases} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - a_1 t^{\beta} u_{xx}(x,t) + a_2 t^{\beta} u_{xx}(1-x,t), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

where, D_{0t}^{α} is Rimann-Liouville derivative,

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds, \ \ 0 < \alpha \le 1,$$

$\alpha, \beta,\ a_i,\ (i = 1,2)$ are nonzero real numbers such that, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha+\beta > 0$, $a_1 > 0$, $|a_2| < a_1$ and Ω has two different domains ($\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$). The first of them is $\Omega^+ = \{(x,t) : 0 < x < 1, \ t > 0\}$. The second domain is Ω^-, that located in the lower half-plane ($t < 0$) and bounded by characteristics $AC : x + t = 0, \quad BC : x - t = 1$, and the segment $[0,1]$ of the straight line $t = 0$. Our aim is to find a regular solution to the following inverse problem:

Problem IP**.** Find a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ in the domain Ω satisfying equation (1), the conditions

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x/2, -x/2) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u_x(x,-x) + u_y(x,-x) = \psi_1(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{4}$$

$$u_y(x, x-1) - u_x(x, x-1) = \psi_2(x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{5}$$

and on line $t = 0$ the gluing conditions

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha} (t^{1-\alpha} u(x,t))_t = \lim_{t\to-0} u_t(x,t), \quad 0 < x < 1.$$

where $\varphi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ are given functions, and $\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Unique solvability of the formulated problem was proved, using Fourier series, the solution of Cauchy problem and integral equations. To find unknown function $f(x)$, we use additional conditions (4) and (5).

LITERATURE

1. R.R. Ashurov, R.T. Zunnunov, An Analog of the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Fractional Derivative. Inverse Problems. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol 44, No. 8, pp. 3225-3240. Pleiades Publishing, Ltd., 2023.
2. A. Ashyralyev, A. M. Sarsenbi, Well-posedness of an elliptic equation with involution, Electron. J. Differ. Equ. 2015 (284) (2015) 18.
3. M. A. Sadybekov, A. A. Sarsenbi, On one inverse problem of reconstructing a subdiffusion process with degeneration from nonlocal data, Доклады АМАН, 2019, том 19, выпуск 1, 31–41M.
4. M. Kirane, N. Al-Salti, Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation, J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016) 12431251.
5. Burlutskayaa M. Sh., Khromov A. P. Fourier Method in an Initial-Boundary Value Problem for a First-Order Partial Differential Equation 16 with Involution. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51, Issue 1, pp. 2102-2114.

Kernel Determination Problem for a One-Dimensional Pseudoparabolic Equation

Elmuradova H.B.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
h.b.elmurodova@buxdu.uz

Let $\Pi_T = \{(x,t) | 0 < x < 1,\ 0 < t \le T\}$ be a rectangle domain. In this present paper, we consider the following inverse problems of determining a pair of functions $\{u(x,t), k(t)\}$, which satisfy the non-linear 1D pseudoparabolic equation.

$$u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \int_0^t k(t-\tau) u(x,\tau) d\tau \ \ in \ \ \Pi_{lT}, \tag{1}$$

the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

the Dirichlet boundary condition

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

and the overdetermination condition

$$u(x_0,t)dx = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $f(t)$ differentiable, given function.

The problem of determining

$$u(x,t) \in Y_{lT} := C^{2,1}_{x,t}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi}_T) \tag{A}$$

from (1)-(3) with given $k(t)$ and $\varphi(x)$ is called the direct problem for a 1D pseudoparabolic integrodifferential equation, where $\overline{\Pi}_T = \{[0,1] \times [0,T]\}$.

Inverse problem: Given the initial data $\varphi(x)$ and $f(t)$, to find the pair of functions $u(x,t), k(t)$, satisfying to (1)-(4).

Definition. The pair of the functions $\{u(x,t), k(t)\}$ is called a classical solution to the inverse problem, if

$$u(x,t) \in Y_{lT}, \quad \text{and} \quad k(t) \in C^1[0,T]$$

and satisfying every relation of the system (1)-(4) at every point of the corresponding domain.

The solvability of the inverse problem (1)-(4) is based on the construction of a bi-orthogonal system.

LITERATURE

1. N.I. Ionkin, The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, Differ. Uravn., 1977, Volume 13, Number 2, 294– 304.

On the nonexistence of global solution of a fractional in time and space evolution equation

Fadillah M. R. [1], Kirane M. [1]

[1]Department of Mathematics, College of Computing and Mathematical Sciences, Khalifa University of Science and Technology, Abu Dhabi, United Arab Emirates

Corresponding author: m.rizki.fadillah@gmail.com

We study the non-existence of non-trivial global solutions of the following equation:

$$D^{\alpha}_{0|t}(u-u_0) + (-\Delta)^{\beta/2}|u|^m = \left(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}|u|^p\, ds\right)^q |u|^r$$

posed in $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ subject to the initial condition $u(x,0) = u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N)$; where $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\beta \in (0,2)$, $p,q \in (1,\infty)$, $1 \le m < p$, and $D^{\alpha}_{0|t}$ denotes the Riemann-Liouville fractional derivative with order α. We found the conditions of the exponents p,q,r for which a non-negative, non-trivial global solution does not exist. Our method uses nonlinear capacity as introduced by P. Baras and M. Kersner which utilizes a weak solution and a suitable test function to obtain a contradiction.

LITERATURES

1. P. Baras and R. Kersner. Local and global solvability of a class of semi-linear parabolic equations. Journal of Differential Equations. 1987. Vol. 68. P. 238–252.
2. T. Cazenave and F. Dickstein and F. B. Weissler. An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling. Nonlinear Analysis. 2008. Vol. 68. P. 862–874.
3. T. A. Dao and A. Fino. Blow-up results for a semi-linear structural damped wave model with nonlinear memory. Mathematische Nachrichten. 2022. Vol. 295. P. 309–322.
4. T. A. Dao and M. Reissig. Blow-up results for semi-linear structurally damped σ-evolution equations. Anomalies in Partial Differential Equations. 2021. Vol. 43. P. 213–245.
5. A. de Pablo and F. Quirós and A. Rodriguez and J. L. Vázquez. A fractional porous medium equation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 2012. Vol. 65, No. 9. P. 1242–1284.
6. E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bulletin des Sciences Mathematiques. 2012. Vol. 136. P. 521–573.
7. A. Z. Fino and G. Karch. Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian. Monatshefte für Mathematik. 2010. Vol. 160. P. 375–384.
8. A. Z. Fino and M. Kirane. Qualitative Properties of Solutions to a Time-Space Fractional Evolution Equation. Quarterly of Applied Mathematics. 2012. Vol. 70, No. 1. P. 133–157.
9. H. Fujita. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1966. Vol. 13. P. 109–124.
10. K. M. Furati and M. Kirane. Necessary conditions for the existence of global solutions to systems of fractional differential equations. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2008. Vol. 11, No. 3. P. 281–298.
11. K. Hayakawa. On nonexistence of global solutions of some semi-linear parabolic differential equations. Proceedings of the Japan Academy. 1973. Vol. 49. P. 503–505.
12. M. Kirane and Y. Laskri and N. Tatar. Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 312. P. 488–501.
13. K. Kobayashi and T. Shirao and H. Tanaka. On the growing up problem for semi-linear heat equations. Journal of the Mathematical Society of Japan. 1977. Vol. 29. P. 402–424.
14. S. G. Samko and A. A. Kilbas and I. O. Marichev. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Yverdon: Gordon and Breach, 1987.

An inverse problem for a mixed-type second-order differential equation

Fayazov K. S.[1], Juraeva D. Sh.[2]
Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
kudratillo52@mail.ru, jurayevadildora1998@gmail.com

In this work, we consider an inverse problem for a mixed-type second-order partial differential equation. A boundary value problem is given for a non-homogeneous hyperbolic-elliptic type differential equation. The goal is to determine the right-hand side function using additional conditions.

Statement of Problem. Let $\Omega = (-1, 1) \times (0, T)$. The functions $u(x, t)$ and $f(x)$ which are related in the domain Ω, are required to satisfy the equation

$$u_{tt}(x,t) - \operatorname{sign}(x)\, u_{xx}(x,t) = f(x). \tag{1}$$

Find functions $u(x, t)$, $f(x)$ satisfying equation (1), the boundary

$$u(\pm 1, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

the initial

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_x(x, 0) = \varphi_2(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{3}$$

the final
$$u(x,T) = \varphi_3(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{4}$$
and the gluing
$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad 0 \le t \le T \tag{5}$$
conditions, where $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, and $\varphi_3(x)$ are sufficiently smooth given functions.

We show the existence and uniqueness of the solution to the problem. Then, using the additional condition, we determine the function $f(x)$.

LITERATURE

1. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K., Pyatkov S. Conditional Well-Posedness of the Initial-Boundary Value Problem for a System of Inhomogeneous Mixed Type Equations with Two Degeneration Lines, Journal of Mathematical Sciences (United States). 2023. Vol. 274, No. 2. P. 201–214.
2. Kaliev A., Mugafarov M.F., Fattahova O.V. Inverse problem for forward backward parabolic equation with generalized conjugation conditions, Ufa Mathematical Journal. 2011. Vol. 3, No. 2. P. 33–41.
3. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K. Nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous parabolic type equation with two degenerate lines, Uzbek Mathematical Journal. 2024. Vol. 68, No. 3. P. 53–65.

Bir o'lchamli fazoda o'zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan nolokal boshlang'ich-chegaraviy masala

Hamroqulova Sh.
Bukhara State University
shaxnozahamroqulova32@gmail.com

$Q_{s,T} = \{(x,t) \mid 0 < x < s\,(t)\,, 0 < t < T\}$ sohada quyidagi issiqlik tarqalishi tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masalani qaraymiz. Bu masala ushbu
$$u_t\,(x,t) - u_{xx}\,(x,t) = q\,(t)\,u\,(x,t) + f\,(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_{s,T}, \tag{1}$$
tenglamaning
$$u\,(0,t) = 0, u\,(s\,(t)\,,t) = 0, \quad t \in (0,T)\,. \tag{2}$$
chegaraviy va
$$u\,(x,0) = u_0\,(x)\,,\ x \in [0,s_0]\,,\ s\,(0) = s_0 > 0, s'\,(t) = -\mu u_x\,(s\,(t)\,,t)\,,\ t \in (0,T) \tag{3}$$
shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

Mazkur ishda bir o‘lchamli fazoda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun nolokal boshlang‘ich-chegaraviy masala o‘rganilgan. Masalani tahlil qilishda avvalo fazo o‘zgaruvchisi bo‘yicha almashtirish bajarilib, ekvivalent masala olingan. Keyinchalik, olingan yechimni fazoviy o’zgaruvchi bo‘yicha differensiallash orqali yangi o‘zgaruvchi kiritildi va masala ushbu yangi o‘zgaruvchiga nisbatan ekvivalent shaklga keltirildi. Ushbu masalaning yechimi mavjud va yagonaligi isbotlandi.

ADABIYOTLAR

1. Colombo F, Guidetti D. Identification of the memory kernel in the strongly damped wave equation by a flux condition. Commun Pure Appl Anal. 2009;8:601—620.
2. Hetmaniok E, Słota D, Wituła R, Zielonka A. Solution of the one-phase inverse Stefan problem by using the homotopy analysis method. Appl Math Model. 2015; 39:6793—6805.
3. Janno J, Lorenzi A. Recovering memory kernels in parabolic transmission problems. J Inverse Ill-Posed Probl. 2008;16:239—265.
4. Lin Z. A free boundary problem for a predator-prey model. Nonlinearity. 2007; 20:1883—1892.

Solving the Cauchy problem for the loaded extended fifth-order modified korteweg-devries equation

Hoitmetov U.A.[1], Sobirov Sh.K.[2], Matyokubova M.Ею[3]
Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan;
shexzod19942@mail.ru[1]

This study examines the fifth-order extended loaded mKdV equation. Specifically, the following equation is analyzed:

$$\mathfrak{u}_t + 6\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}_x + \mathfrak{u}_{xxx} + \beta(t)\mathfrak{u}(x_0,t)(30\mathfrak{u}^4\mathfrak{u}_x + 10\mathfrak{u}_x^3 + 40\mathfrak{u}\mathfrak{u}_x\mathfrak{u}_{xx} + 10\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}_{xxx} + \mathfrak{u}_{xxxxx}) +$$
$$+\gamma(t)\mathfrak{u}(x_1,t)\mathfrak{u}_x = 0 \tag{1}$$

where $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ are continuously differentiable prescribed functions x_0, $x_1 \in R$.

Equation (1) is investigated under the initial condition

$$\mathfrak{u}(x,0) = \mathfrak{u}_0(x) \tag{2}$$

where the function $\mathfrak{u}_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ satisfies the following criteria:

$$|\mathfrak{u}_0(x)|\, e^{2\varepsilon|x|} \le \frac{\sigma}{(1+|x|)^{1+\zeta}}, \tag{3}$$

for positive constants $\varepsilon > 0$, $\zeta > 0$, and $\sigma > 0$.

The Dirac-type operator

$$\mathcal{L}(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -\mathfrak{u}_0(x) \\ -\mathfrak{u}_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

possesses exactly N simple eigenvalues $\varrho_1(0), \varrho_2(0), \ldots, \varrho_N(0)$ in the upper half-plane and lacks spectral singularities. The solution $\mathfrak{u}(x,t)$ is assumed to exhibit sufficient smoothness and sufficiently rapid decay as $x \to \pm\infty$, quantified by the condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\varepsilon|x|}\left(\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k \mathfrak{u}(x,t)}{\partial x^k}\right|\right) dx < \infty. \tag{4}$$

The central aim of this work is to derive explicit representations for the solution of the problem (1)-(4) using the inverse scattering transform (IST) framework applied to the time-dependent Dirac operator

$$\mathcal{L}(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -\mathfrak{u}(x,t) \\ -\mathfrak{u}(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Thus, we have proved the following theorem.

Theorem. If the functions $\mathfrak{u}(x,t)$ are a solution to the problem (1)-(4), then the scattering data of the operator $\mathcal{L}(t)$ with the potential $\mathfrak{u}(x,t)$ vary with t as follows:

$$\frac{d\varrho_n}{dt}=0, n=\overline{1,N};$$

$$\frac{d\mathfrak{r}^+(\varrho,t)}{dt}=\left(-32i\varrho^5\beta(t)u(x_0,t)+8i\varrho^3-2i\varrho\gamma(t)u(x_1,t)\right)\mathfrak{r}^+(\varrho,t),\quad \operatorname{Im}\varrho=0;$$

$$\frac{d\mathfrak{C}_n}{dt}=\left(-32i\varrho_n^5\beta(t)u(x_0,t)+8i\varrho_n^3-2i\varrho_n\gamma(t)u(x_1,t)\right)\mathfrak{C}_n(t).$$

Algorithm

Let the function be given, satisfying the condition (3). Then the solution to the problem (1)-(4) is found using the following algorithm. Solve the direct scattering problem with initial function , obtaining scattering data

$$\left\{\mathfrak{r}^+(\varrho,0),\ \varrho\in\mathbb{R};\quad \varrho_k(0),\ \operatorname{Im}\varrho_k>0;\quad \mathfrak{C}_k(0),\quad k=\overline{1,N}\right\}$$

for the operator $\mathcal{L}(0)$.
Determine the time-evolved scattering data for $t>0$, using Theorem:

$$\left\{\mathfrak{r}^+(\varrho,t),\ \varrho\in\mathbb{R};\quad \varrho_k(t),\ \operatorname{Im}\varrho_k(t)>0;\ \ \mathfrak{C}_k(t),\ k=\overline{1,N}\right\}.$$

Solve the inverse scattering problem using the Gelfand-Levitan-Marchenko integral equation method. Namely, restore the unique solution $\mathfrak{u}(x,t)$ from the scattering data obtained in the previous step for $t>0$.

REFERENCES

1. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London 1982.
2. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095-1097.
3. Sobirov S.K., Hoitmetov U.A. Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients and with a self-consistent source, Sib. Math. J., 2024, Vol. 65, No. 4, pp. 971-986.
4. Wazwaz A.M. Two new integrable modified KdV equations, of third-and fifth-order, with variable coefficients: Multiple real and multiple complex soliton solutions. Waves in Random and Complex Media. 2021. Vol. 31. P. 867-878.

On uniqueness of the solution of inverse problem

Ibrohimova D. E.[1]**, Islomova M. N.** [2]

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
dilbaralikulova1997@mail.com, professormarjona25@gmail.com

Consider a Hilbert space H with dot product (u,v) and norm $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.Let $A: H\to H$ be a self-adjoint operator:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, dP(\lambda).$$

Consider for $0 < p < 1$ and $T > 0$ equation

$$D^{\rho}u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T. \tag{1}$$

with initial condition

$$u(0) = \phi. \tag{2}$$

For any $T > 0$ we denote by $C([0,T] \to H$ the Banach space of vector-functions $u : [0,T] \to H$ which continuously depend on $t \in [0,T]$ in the norm of Hilbert space H. The norm in $C([0,T] \to H$ we define by equation

$$\|u\|_T = \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|.$$

Analogously, we denote by $C^1([0,T] \to H$)thelinear space of vector functions $u : [0,T] \to H$ such that their derivatives $u\prime(t)$ continuously depend on $t \in [0,T]$.

We say that $u(t)$ is a solution of the Cauchy problem $(1)-(2)$ if $u \in C([0,t] \to H) \cap C^1((0,T) \to H)$ and equations (1) and (2) are fulfilled.

The problem $(1)-(2)$ is known as the direct problem. We consider the following inverse problem.

The time-inverse problem: given $T > 0$ and $\psi \in H$ such that the solution $u(t)$ of the Cauchy problem $(1)-(2)$ satisfies equation

$$u(T) = \psi. \tag{3}$$

Weprove the uniqueness of the solution of this time-inverse problem. We introduce the resolving evolutionary operator

$$G(t)\phi = u(t), \tag{4}$$

where $u(t)$ is the solution to the Cauchy problem $(1)-(2)$.

Theorem 1. For any $T > 0$ there exists set of quasi converting operators $\{B_{\epsilon}(T)\} : RanG(T) \to H\}$ such that for any $\phi \in H$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\phi - B_{\in}(T)\, G(T)\, \phi\| = 0. \tag{5}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. . Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part II, Spectral Theory, Interscience Publishers,. NY-London, 1963.
2. S. Alimov and R. Ashurov, Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation, J. Inverse Ill-Posed Probl. 28 (2020), no. 5, 651–658.
3.S. Alimov and R. Ashurov, Inverse problem of determining an order of the Riemann–Liouville time-fractional derivative, Fract. Differ. Calc. 11 (2021), no. 2, 203–217.
4.Liu J., Yamamoto M. A backward problem for the time-fractional diffusio equation, Appl. Anal., 2010, 89, 1769-1788.

Evasion from many pursuers in a differential game with integral constraints

Inomiddinov S.N.[1], **Ibroximjonov I.I.**[2], **Ibragimov G.I.**[3]

Namangan State University, 160107, Namangan, Uzbekistan;
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Toshkent, Uzbekistan;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
sn.inomiddinov@gmail.com, islombekibrokhimjonov03@gmail.com, ibragimov.math@gmail.com

This work is devoted to the study of an evasion game of one evader from many pursuers when the controls of pursuers and evader are subject to integral constraints. The control resources of the players change linearly depending on time. The game is considered in space $\mathbb{R}^n$. We construct a strategy for the evader which guarantees the possibility of evasion. It is enough to consider the game in $\mathbb{R}^2$, the case when $\mathbb{R}^n$ is analogous. Let the dynamics of pursuers x_i and evader y be given by the following equations

$$\begin{aligned} &\dot{x_i} = u_i,\ x_i(0) = x_{i0},\ i = 1, 2, ..., M, \\ &\dot{y} = v,\ y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_i, x_{i0}, u_i, y, y_0, v \in \mathbb{R}^2,\ x_{i0} \neq y_0$, u_i and v are control parameters of the pursuers and evader, respectively.

Definition 1. The measurable functions $u_i(t)$ and $v(t)$, $t \geq 0$, that satisfy the following integral constraints

$$\int\limits_0^t |u_i(s)|^2 ds \leq \rho_i^2 t,\ i = 1, ..., M; \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2 t.$$

are called controls of the ith pursuer and evader, respectively.

Definition 2. A function $(t, x_1, ..., x_M, y, u_1, ..., u_M)$ $V(t, x_1, ..., x_M, y, u_1, ..., u_M)$, V : $[0; +\infty) \times \mathbb{R}^{4M+2} \to \mathbb{R}^2$, is called a strategy of the evader if the initial value problem (1) has a unique solution $(x_1(t), ..., x_M(t), y(t))$ with $v = V(t, x_1, ..., x_M(t), y, u_1, ..., u_M(t))$ and arbitrary admissible controls $u = u_1(t), ..., u_M(t)$ of the pursuers.

The behavior of the pursuers are arbitrary, which means that the pursuers apply any admissible controls, while the evader applies a strategy.

Definition 3. We say that evasion is possible in game (1) if there exists a strategy V of the evader such that, for any controls of pursuer, $x_i(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, $i = 1, 2, ..., M$.

Let

$$\mathcal{J}_k = \bigcup_{j=k}^{m_0} [\tau_j, \tau_j'], \quad \mathcal{J}_{m_0+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, ..., m_0.$$

where m_0 is a positive integer.

We define the function

$$r : [0, T] \to \{0, 1, 2, \ldots, m_0\}$$

by the following equation

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T] \setminus \mathcal{J}_1, \\ k, & t \in [\tau_k, \tau_k') \setminus \mathcal{J}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m_0, \end{cases}$$

for $m_0 > 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (m_0 - 1)$.

This function has the following properties:

1) $r(t) = k, \quad \tau_k \le t < \tau'_k, \quad \text{if } \tau_k \le \tau'_{k+1}$.

2) $r(t) = k, \quad \tau_k \le t < \tau_{k+1}, \quad \text{if } \tau_{k+1} < \tau'_k$.

We construct a strategy for the evader. Let $u_i(t), \quad i = 1, \ldots, M$, be arbitrary admissible controls of pursuers:

$$T = T_0 + \frac{2a_1}{\alpha},$$

where $T_0 = \frac{1}{\alpha} \max_{1 \le i \le M} |y_2^0 - x_{i,2}^0|$

$$v(t) = V_0(t) = (0, \alpha + U(t)), \quad t \in [0, T] \setminus \mathcal{J}_1, \tag{2}$$

$$v(t) = V_r(t) = (V_{r1}(t), \alpha + U(t)), \quad t \in [0, T] \cap \mathcal{J}_1, \tag{3}$$

$$v(t) = (0, U(t)), \quad t > T, \tag{4}$$

where

$$r = r(t), \quad V_k(t) = (V_{k1}(t), \alpha + U(t)), \quad \tau_k < t < \tau'_k, \quad k \in I = \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$V_{k1}(t) = \begin{cases} \alpha + |u_{k1}(t)|, & y_1(\tau_k) \ge x_k(\tau_k) \\ -(\alpha + |u_{k1}(t)|), & y_1(\tau_k) < x_{k_1}(\tau_k) \end{cases}, \quad U(t) = \left(\sum_{i=1}^{M} u_{i2}^2(t) \right)^{1/2}.$$

Theorem. If

$$\rho_1^2 + ... + \rho_M^2 \le \sigma^2,$$

then evasion is possible in game (1).

LITERATURE

1. Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A. Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. 2021. https://doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6.
2. Ibragimov G.I., Salleh Y, Alias I.A., Pansera B.A., Ferrara M. Evasion from Several Pursuers in the Game with Coordinate-wise Integral Constraints. Dynamic Games and Applications. 2022. https://doi.org/10.1007/s13235-022-00475-7.
3. Ibragimov G.I. Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers. Dynamic Games and Applications. 2024, 665-685. https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2.

Analysis of Second-Order Optimality Conditions for Optimal Control Problems Governed by Ordinary Differential Equations

Ismoilov A. I.[1], Mamajonova D. D.[2]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
[1]ismoilovaxrorjon@yandex.com, [2]mamajonovadilnoza1995@gmail.com

Optimal control theory is a vital branch of mathematical analysis that focuses on determining control functions to steer dynamic systems in the most efficient manner. This study investigates optimal control problems governed by ordinary differential equations and provides a theoretical framework based on Pontryagin's Maximum Principle and second-order sufficient optimality conditions.

Problem Statement. Consider the controlled dynamical system:

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_a,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, and $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ is the control function subject to the constraints:

$$\alpha \le u(t) \le \beta, \quad \text{for almost every } t \in [a, b].$$

The goal is to minimize the performance index:

$$J(u) = \int_a^b L(t, x(t), u(t))\, dt,$$

where L is the running cost.

To solve this problem, we employ Pontryagin's Maximum Principle. Define the Lagrangian functional with an adjoint variable $\varphi(t)$ as a Lagrange multiplier:

$$\mathcal{L}(x, u, \varphi) = \int_a^b \left[L(t, x(t), u(t)) - \varphi(t)^\top \left(x'(t) - g(t, x(t), u(t)) \right) \right] dt.$$

The adjoint equation associated with the system is:

$$-\varphi'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x(t), u(t))^\top \varphi(t) + \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), u(t)), \quad \varphi(b) = 0.$$

The optimal control $u^*(t)$ satisfies the minimality condition of the Hamiltonian:

$$u^*(t) = \arg \min_{\alpha \le u \le \beta} \left\{ L(t, x(t), u) + \varphi(t)^\top g(t, x(t), u) \right\}.$$

Consider the linearization of the system around $(\bar{x}, \bar{u})$:

$$x'(t) = g_x(t)x(t) + g_u(t)u(t), \quad x(a) = 0.$$

The second variation of the functional is given by:

$$\delta^2 J = \int_a^b \Big[x(t)^\top A(t) x(t) + 2x(t)^\top B(t) u(t)$$

$$+ u(t)^\top C(t) u(t) \Big] dt \ge \delta \int_a^b \|u(t)\|^2 dt,$$

where

$$A(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(L + \varphi^\top g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$
$$B(t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial u}(L + \varphi^\top g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$
$$C(t) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}(L + \varphi^\top g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

A sufficient condition for local optimality is the strong LegendreвЂ"Clebsch condition:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \varphi(t)^\top \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \ge \tilde{\delta} > 0,$$

holding almost everywhere on $[a, b]$.

In conclusion, the combination of Pontryagin's Maximum Principle and second-order sufficient optimality conditions provides a rigorous framework to characterize and compute stable optimal controls for systems governed by ordinary differential equations.

References

1. Pontryagin L.S. et al., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Pergamon Press, 1964.
2. Lions J.L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1971.
3. Maurer H., Second-order Sufficient Conditions in Optimal Control, Numer. Funct. Anal. Optim., 2001.
4. Casas E., Troltzsch F., Second-Order Conditions for Optimal Control Problems, SIAM, 2002.

Identification of the kernel in a semilinear integro-differential parabolic problem

Jonibek J.J.[1]

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
jonibekjj@mail.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, with $d \geq 1$, be a bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. In this paper, we study the following initial-boundary value problem for a semilinear integro-differential parabolic equation

$$u_t(x,t) + L(x,t)u(x,t) + c(t)u(x,t)$$

$$= \int_0^t k(s)u(x,t-s)ds + f(x,t,u,\nabla u),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$\mathbf{B}u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{3}$$

where $Q = \Omega \times (0,T]$ and T is a fixed positive constant, the asymmetric elliptic operator with space-time dependent coefficients is defined by

$$L(x,t)u = \nabla \cdot (-A(x,t)\nabla u - b(x,t)u),$$

and

$$A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{i,j=1,\dots,d}, \qquad b(x,t) = (b_1(x,t),...,b_d(x,t))^T.$$

Moreover, the boundary operator Bu is defined by

$$Bu = (-A(x,t)\nabla u - b(x,t)u) \cdot \nu,$$

where ν is the unitary outer normal vector of $\partial\Omega$.

Our goal is to determine the kernel $k(t)$, $t > 0$, together with $u(x,t)$ as a solution to the problem (1)-(3), under the additional integral measurement:

$$\int_\Omega u(x,t)dx = m(t),\ 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

which represents the population density over the domain Ω at time t. In other diffusion-related applications, condition (4) corresponds to the specification of mass [1].

This work addresses a semilinear integro-differential parabolic problem in a bounded domain, where the time-convolution kernel is unknown. The missing time-dependent kernel is reconstructed using an additional integral measurement. Due to the equation's nonlinearity and the presence of a principal part operator that depends on both space and time, this inverse problem is both novel and mathematically significant. The problem is discretized in time using the backward Euler method. For each time subinterval, the resulting elliptic problems are shown to admit unique solutions by applying the Lax-Milgram theorem. Fundamental energy estimates for the unknowns are established using Gronwall's inequality, along with the coercivity and continuity properties of the elliptic operator. The existence and uniqueness of a weak solution are studied via Rothe's method, a well-established technique for such problems. Furthermore, the convergence of the discrete iterates to the exact solution is rigorously demonstrated. The numerical results confirm that the proposed algorithm effectively reconstructs the unknown kernel function and the solution $u(x,t)$ with high accuracy. The numerical solution closely matches the exact analytical solution, thereby verifying the correctness and convergence of the method. Overall, the numerical procedure is both robust and efficient for solving inverse problems of this type, and it provides a reliable framework for further extensions to more complex systems or higher-dimensional settings.

References

1. Cannon, J. R. and van der Hoek, J. Diffusion subject to the specification of mass. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1986, vol. 115, pp. 517–529.
2. Evans, L. C. Partial Differential Equations,American Mathematical Society,Providence, Rhode Island, 2010.

Of a boundary value problem for a nonlocal elliptic equation with degeneration

Kadirkulov B.J.[1], Ergashev O.T.[2]

Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan and V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences and National University of Uzbekistan;
e-mail: b.kadirkulov@afu.uz, okiljonergashev@gmail.com.

In a vertical half-strip $\Omega = \{(x,y) : -1 < x < 1, y > 0\}$, we consider the following equation

$$u_{yy} + y^m \left(u_{xx}(x,y) + \varepsilon \cdot u_{xx}(-x,y)\right) = 0, \tag{1}$$

here ε, m are given real numbers and $\varepsilon \neq 1$, $m > 0$.

Problem. To find the solution $u(x,y)$ of the equation (1) with the following properties:
1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$;
2) satisfies equation (1) in the domain Ω;
3) satisfies the conditions:

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 \,\text{uniformly in}\, x \in [-1,1],$$

$$u_x(-1,y) = \varphi_1(y), u_x(1,y) = \varphi_2(y), y \geq 0,$$

$$u(x;0) = \tau(x), -1 \leq x \leq 1;$$

4) $u_y(x,y)$ uniformly bounded for $y \to +\infty$ in $x \in [-1,1]$.
Here $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ are given functions.

In this paper, we investigate the solvability of a boundary value problem for a nonlocal degenerate elliptic equation in a vertical half-strip, where the nonlocal operator is defined using involutive mapping with respect to a spatial variable.

LITERATURE

1. Moiseev E.I., On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method, Differentsialnye Uravneniya. 1999. Vol.35. No.8. P.1105–1112. [in Russian].

The method of potentials for the heat equation with involution

Kadirkulov B.J.[1], Sobirov Z.A.[2], Uzaqbaeva D.E.[3]

[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan

[1,2,3]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;

[2]National University of Uzbekistan;

b.kadirkulov@afu.uz, z.sobirov@nuu.uz, uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com.

In domain $\Omega = \{(x,t)| -\alpha < x < \alpha, 0 < t < T\}$ we consider the heat equation with involution

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), \tag{1}$$

here α, T are given positive real numbers, ε is given arbitrary real number, $\varepsilon \neq 1$.

Problem. To find the solution $u(x,t)$ of the equation (1) from the following class of functions: $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$, that satisfies the following initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(-\alpha,t) = \psi_1(t), u(\alpha,t) = \psi_2(t), \tag{3}$$

where $\varphi(x), \psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are given functions.

In this work initial-boundary value problem for the heat equation with involution is considered. The uniqueness of problem proved using the apriory estimate. To prove the existence of the solution, we conduct and investigate the properties of potentials, using which we construct the solution of the investigated boundary value problem.

References

1. Linkov A. Substantiation of a method the fourier for boundary value problems with an involute deviation, Westnik SamSU 1999, 2(12). P. 60-66

2. Cabada A; Tojo, F. A. F.; Equations with Involutions. University of Santiago de Compostela, Spain. Workshop on Differential Equations, 2014.

Frankl's problem for a three-dimensional equation of mixed type with a singular coefficient

Karimov K.T.[1,2], Shokirov A.M.[1]

[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;

[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

karimovk80@mail.ru, asrorshokirov87@gmial.com

In this paper, we consider the equation

$$\operatorname{sgn}(x+y)\left[U_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot U_{yy}\right] + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0 \tag{1}$$

in the domain $D = \Omega \times (0,c)$, where $\gamma = const \in R$, and $\gamma \in (-\infty, 1/2)$, and Ω is a finite simply connected domain of the plane xOy, bounded by the arc

$$\bar{\sigma}_0 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

and segments

$$\overline{MM^*} = \{(x,y) : x = 0,\ -1 \le y \le 1\},$$
$$\overline{M^*P} = \{(x,y) : x - y = 1, 0 \le x \le 1\}.$$

Let us introduce the notation: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : y < 0,\ x + y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0,\ x + y < 0\}$, $D_j = \Omega_j \times (0,c)$, $j = \overline{0,2}$, $OP = \Omega \cap (y = 0)$, $OQ = \{(x,y) : x + y = 0,\ 0 < x < 1/2\}$, $OM = \{(x,y) : x = 0.0 < y < 1\}$, $OM^* = MM^* \backslash \overline{OM}$, $O(0,0)$, $M(0,1)$, $M^*(0,-1)$.

By a regular in domain D solution of equation (1), we mean a function $U(x,y,z)$ from the class

$$C\left(\bar{D}\right) \cap C^1\left((D \cup \{x=0\}) \backslash (\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2)\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(D_0 \cup D_1 \cup D_2).$$

For equation (1) in domain D, we study the following problem:

Problem $\mathbf{F}^{(1)}$. Find a regular in domain D solution for equation (1) satisfying the conditions

$$U(x,y,z) = 0,\ \ (x,y) \in \bar{\sigma}_0,\ \ z \in (0,c),$$
$$U(0,y,z) = 0,\ \ y \in [-1,1],\ \ z \in (0,c),$$
$$U_x(0,y,z) + U_x(0,-y,z) = 0,\ \ y \in (-1,0),\ \ z \in [0,c],$$
$$U(x,y,0) = f_1(x,y), \quad U(x,y,c) = f_2(x,y),\ \ (x,y) \in \bar{\Omega},$$

where $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)-$ given functions.

The following theorem has been proven.

Theorem. Let $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ and functions $f_j(x,y) = \tilde{f}_j(r,\varphi)$, $j = \overline{1,2}$, satisfy the following conditions:

I. $\tilde{f}_l(r,\varphi) \in C^{4,7}_{r,\varphi}\left(\bar{\Pi}\right)$, $l = \overline{1,2}$, where $\bar{\Pi} = \{(r,\varphi) :\ r \in (0,1),\ \varphi \in (0,\pi/2)\}$;

II. $(\partial^{2j}/\partial\varphi^{2j})\,\tilde{f}_l(r,\pi/2) = 0,\ \left(\partial^k/\partial\varphi^k\right)\tilde{f}_l(r,0) = 0,\ j = \overline{0,3},\ k = \overline{0,6},\ l = \overline{1,2}$;

III. $(\partial^j/\partial r^j)\,\tilde{f}_l(1,\varphi) = 0,\ \left(\partial^k/\partial r^k\right)\tilde{f}_l(0,\varphi) = 0,\ j = \overline{0,2},\ k = \overline{0,3},\ l = \overline{1,2}$.

Then the solution to the problem $\mathrm{F}^{(1)}$ exists, is unique and is determined by the formula

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} U^{(0)}_{nm}(x,y,z), & (x,y,z) \in \bar{D}_0,\ \ n,m \in N, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} U^{(1)}_{nm}(x,y,z), & (x,y,z) \in \bar{D}_1,\ \ n,m \in N, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} U^{(2)}_{nm}(x,y,z), & (x,y,z) \in \bar{D}_2,\ \ n,m \in N, \end{cases}$$

where $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = arctg\,(y/x)$, $J_\nu(x)-$ Bessel function [1],

$$U^{(0)}_{nm}(x,y,z) = d_{nm} J_{\omega_n}(\alpha_{nm} r) \sin\left[(\pi/2 - \varphi)\,\omega_n\right] \vartheta_{nm}(z),$$

$$U^{(1)}_{nm}(x,y,z) = \frac{d_{nm}}{2}\left[\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\omega_n}{2}} - (-1)^n \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\omega_n}{2}}\right]$$
$$J_{\omega_n}\left(\alpha_{nm}\sqrt{x^2-y^2}\right)\vartheta_{nm}(z),$$

$$U^{(2)}_{nm}(x,y,z) = \frac{d_{nm}}{2}\left[\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{\omega_n/2} - \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{\omega_n/2}\right]$$
$$J_{\omega_n}\left[\alpha_{nm}\sqrt{y^2-x^2}\right]\vartheta_{nm}(z),$$

$$d_{nm} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} J_{\omega_n+1}\left(\alpha_{nm}\right)},$$

$\alpha_{nm}-$ zeros of the function $J_{\omega_n}(x)$, $\omega_n = 2n + \left[(-1)^n - 1\right]/2$,

$$\vartheta_{nm}(z) = P_{nm}(z)\, f_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\gamma}(\alpha_{nm} z) - P_{nm}(z)\, \bar{K}_{1/2-\gamma}(\alpha_{nm} c)\right] f_{1nm},$$

$$\bar{K}_\nu(x) = \frac{2^{1-\nu} x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)},\ \nu > 0,$$

$$P_{nm}(z) = (z/c)^{1/2-\gamma}\, I_{1/2-\gamma}(\alpha_{nm} z) \big/ I_{1/2-\gamma}(\alpha_{nm} c),$$

$\Gamma(x)$ is the Euler Gamma function [2], and $I_l(x)$ and $K_l(x)$ are the Bessel function of the imaginary argument and the Macdonald function of order l [1], respectively.

LITERATURE

1. Watson G. N. Theory of Bessel functions. -Moscow: T.1. Publ. IL., 1949. -798 p.
2. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Hypergeometric functions. Legendre functions. -Moscow: Nauka. -1973. -296 p.

Butun tartibli Bessel operatori qantashgan oddiy differensial tenglamani almashtirish operatori yordamida yechish

Karimov SH.T.[1], Boynazarov A.N.[2]

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
shaxkarimov@gmail.com, ahror010185@gmail.com

Ushbu ishda $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ sohada quyidagi

$$A^m_{\gamma,\lambda} y(x) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx} + \lambda^2\right)^m y(x) = f(x), \quad x > 0. \tag{1}$$

Bessel operatori qatnashgan iteratsiyalangan yuqori tartibli oddiy differensial tenglamaning

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1, \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x) \in C^{2m}(0,\infty) \cap C^{2m-1}[0,\infty)$ yechimni topishga bag'ishlangan Koshi masalasini qaraymiz.

Bu yerda $f(x)$ - berilgan funksiya, $\gamma, \lambda \in \mathbb{R},\ \gamma > 0,\ m \in \mathbb{N}, A_{\gamma,\lambda} \equiv B_\gamma + \lambda^2,\ B_\gamma = d^2/dx^2 + (\gamma/x)(d/dx)$ - Bessel operatori, $A^m_{\gamma,\lambda} = A^{m-1}_{\gamma,\lambda} A_{\gamma,\lambda}$. Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, $A_{\gamma,0} = B_\gamma$, va agar $\gamma = 0,\ \lambda = 0$ bo'lsa, $A_{0,0} = d^2/dx^2$ bo'ladi.

Koshi masalasini yechish uchun almashtirish operatorlari usulidan [1,2] foydalanamiz. Almashtirish operatori sifatida Lowndes tomonidan kiritilgan [3, 4] quyidagi kasr tartibli operatorni olamiz:

$$J_\lambda(\eta,\alpha)\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}\right) t^{2\eta+1} \varphi(t)\, dt, \tag{3}$$

bu yerda $\eta, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ va $\alpha > 0,\ \eta \geq -1/2$. $\bar{J}_\nu(z)$ - Bessel-Clifford funksiyasi [4].

Ushbu (3) operator quyidagi almashtirish operatori xossasiga ega [5]:

1-teorema. *Agar* $\alpha > 0,\ \eta \geqslant -1/2,\ f(x) \in C^{2m}(0,b),\ b > 0;\ x^{2\eta+1}[B^x_\eta]^{k+1} f(x)$ *funksiyalar nol nuqta atrofida integrallanuvchi va* $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}(d/dx)[B^x_\eta]^k f(x) = 0,\ k = \overline{0, m-1}$, *shartlar bajarilsa, u holda (3) operator uchun ushbu*

$$[B^x_{\eta+\alpha} + \lambda^2]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha)[B^x_\eta]^m f(x),$$

tenglik va xususiy holda $\lambda = 0$ bo'lganda

$$[B^x_{\eta+\alpha}]^m I_{\eta,\alpha} f(x) = I_{\eta,\alpha}[B^x_\eta]^m f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $I_{\eta,\alpha} = J_0(\eta,\alpha)$.

Faraz qilaylik, (1), (2) Koshi masalasining yechimi mavjud bo'lsin. Bu yechimni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y(x) = J_\lambda(0,\alpha)z(x) = \frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right) z(t)\,dt, \tag{4}$$

bu yerda $z(x)$ - yetarlicha hosilaga ega bo'lgan noma'lum funksiya, $\alpha = \gamma/2$.

Yuqoridagi 1-teoremani qo'llab (1)-(2) Koshi masalasini ushbu

$$z^{(2m)}(x) = F(x), \quad x > 0, \tag{5}$$

tenglamaning

$$z^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, 2m-1}, \tag{6}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga keltiramiz, bu yerda $F(x) = J_\lambda^{-1}(-1/2,\alpha) f(x)$, $J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)$ - (3) operatorga teskari operator.

(5)-(6) masalani yechimini quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$z(x) = I^{2m}_{0+} F(x) = I^{2m}_{0+} J_\lambda^{-1}(0,\alpha) f(x), \tag{7}$$

bu yerda

$$I^\alpha_{0+}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$$

- kasr tartibli Riemana-Liuvil operatori.

(7) ifodani (4) tenglikka qo'yib, kerakli hisob-kitoblardan keyin (1)-(2) Koshi masalasini yechimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$y(x) = J_\lambda(0,\alpha)z(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2m)} \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^{2\alpha} \left(\frac{x^2-s^2}{2x}\right)^{2m-1} K(x,s) f(s)\,ds, \tag{8}$$

bu yerda

$$K(x,s) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\sigma)^k}{(2m)_k\, k!} \Xi_2\left(m, m+\alpha-\tfrac{1}{2}+k; 2m+k; \omega, \sigma\right),$$

$$\omega = 1 - \frac{s^2}{x^2}, \ \sigma = \frac{\lambda^2}{4}(x^2-s^2),$$

$\Xi_2(a,b;c;\omega,\sigma)$ -Gumbertning ikki o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyasi.

Shunday qilib quyidagi teorema o'rinli:

2-teorema. Agar $f(x) \in C[0,\infty)$ bo'lsa, u holda (8) formula (1)-(2) Koshi masalasining yagona yechimi bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. The method of transmutation operators and boundary value problems for singular elliptic equations, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, Moscow, 2018, Vol. 64, No. 2, pp. 211–226.
2. Sitnik S.M., Shishkina E.L. The method of transmutation operators for differential equations with Bessel operators. Moscow: Fizmatlit, 2018. 224 pages.
3. Lowndes, J. S. A generalization of the Erdfelyi'Kober operators, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Series 2, Cambridge (UK), 1970, Vol. 17, No. 2, pp. 139–148.
4. Karimov Sh.T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order. Filomat. -Serbia, 2018, 32. 3. P. 873–883.

Yuqori tartibli giperbolik tenglama uchun Gursa masalasi

Karimov Sh.T.[1], Mo'ydinov I.M.[2]
Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
Farg'ona davlat texnika universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
shaxkarimov@gmail.com, ilhommuydinov887@gmail.com

Ushbu maqolada yuqori tartibli iteratsiyalangan to'lqin tenglamasi uchun Gursa masalasini Riman usuli bilan yechishni ko'rib chiqamiz. Buday masalani Riman usuli bilan yechish ilgari o'rganilmagan.

Tekislikda (x,y); $y=0$, $x+y=0$, $x-y=1$ chiziqlar bilan chegaralangan sohani Ω bilan belgilab va bu sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$M(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u(x,y)=f(x,\,y)\,,\qquad m\in N, \tag{1}$$

bu yerda $u(x,\,y)$ noma'lum funksiya, $f(x,\,y)$ esa uzluksiz funksiya.

Gursa masalasi. (1) tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x,\,y)\in C^{2m}(\Omega)\cap C^{2m-1}\left(\overline{\Omega}\right)$ sinfga teng va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,\,y)$ funksiya topilsin.

$$u|_{OK}=\varphi_0(x)\,,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{OK}=\varphi_1(x)\,,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n_1^2}\right|_{OK}=\varphi_2(x)\,,$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n_1^{m-1}}\right|_{OK}=\varphi_{m-1}(x)\,,$$

$$u|_{KN}=\psi_0(x)\,,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial n_2}\right|_{KN}=\psi_1(x)\,,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n_2^2}\right|_{KN}=\psi_2(x)\,,\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n_2^{m-1}}\right|_{KN}=\psi_{m-1}(x)\,. \tag{2}$$

$$OK=\left\{(x,\,y):\ x+y=0,\ 0\le x\le\frac{1}{2}\right\},$$

$$KN=\left\{(x,\,y):\ x-y=1,\ \frac{1}{2}\le x\le 1\right\},$$

(Ω_0-soha Ω sohani ichki qismida bo'lib, $CEKF$ to'g'ri to'rtburchakdan iborat, bu yerda ixtiyoriy $C\left(x_0,\, y_0\right) \in \Omega$ nuqta, CE va CF kesmalar esa harakteristik chiziqlarga paralell holda joylashgan),
bu yerda $\varphi_0\left(x\right),\;\; \psi_0\left(x\right),\;\; \varphi_1\left(x\right),\;\; \psi_1\left(x\right),\;\; \varphi_2\left(x\right),\;\; \psi_2\left(x\right),\;\; \varphi_{m-1}\left(x\right),\;\; \psi_{m-1}\left(x\right)$ berilgan funksiyalar bo'lib, yetarlicha silliq bo'lgan funksiyalar, hamda

$$\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\;\; -\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\;\; \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{1}{2}\right),\;\; \ldots,$$

$$(-1)^{m-1}\varphi_{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_{m-1}\left(\frac{1}{2}\right), \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiradi. n_1 va n_2 lar xarakteristika chiziqlariga o'tkazilgan normallar bo'lib,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{OK}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n_1^2}\right|_{OK}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha_1\cos\beta_1+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta_1,$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n_1^{m-1}}\right|_{OK}=\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}\cos^{m-1}\alpha_1+2\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x\partial y}\cos^{m-2}\alpha_1\cos\beta_1+\,\ldots\,+\frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}\cos^{m-1}\beta_1.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_2}\right|_{NK}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_2+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n_2^2}\right|_{NK}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha_2\cos\beta_2+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta_2,\;\ldots,\;\left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n_1^{m-1}}\right|_{NK}=\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}\cos^{m-1}\alpha_2+$$

$$+2\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x\partial y}\cos^{m-2}\alpha_2\cos\beta_2+\frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}\cos^{m-1}\beta_2$$

bu yerda $\alpha_1=n_1\wedge x=225^0$, $\beta_1=n_1\wedge y=135^0$, $\alpha_2=n_2\wedge x=315^0$ $\beta_2=n_2\wedge y=225^0$.

$$\nu\left(x,y;x_0,y_0\right)=\frac{\left[\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2\right]^{m-1}}{\left[(m-1)!\right]^2} \tag{4}$$

Riman funksiyasidan foydalanib (1) Gursa masalasining yechimini oshkor ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin.

$$u\left(x_0,y_0\right)=\psi_0\left(\frac{x_0+y_0+1}{2}\right)$$

$$-\int\limits_0^{x_0+y_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m-k}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\left(\xi-x_0-y_0\right)^{m-k}}{(m-k)!}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(1-x_0+y_0\right)^{m-k}}{(m-k)!}\;\psi_{m-k}^{(m-k)}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right]d\xi$$

$$-\int\limits_{x_0-y_0}^{1}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m-k}\frac{(-x_0-y_0)^{m-k}}{(m-k)!}\times\right.$$

$$\left.\frac{(\eta-x_0+y_0)^{m-k}}{(m-k)!}\,\varphi_{m-k}^{(m+1-k)}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]d\eta$$

$$-\iint\limits_{\Omega_0}\frac{\left[(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]^{m-1}}{[(m-1)!]^2}f\left(x,\,y\right)dxdy. \qquad (5)$$

Teorema. Agar $\psi_j,\ \varphi_j,\ j=\overline{0,\ m-1}$ funksiyalar uchun $\psi_j\in C^{2m}\left(0,\,1/2\right),\ \varphi_j\in C^{2m}\left(1/2,\,1\right)$ shartlar bajarilsa, u holda G masalaning yagona yechimi (5) tenglik bilan aniqlanadi.

ADABIYOTLAR

1. Каримов Ш. Т. Решение задачи Коши для поливолнового уравнения методом сферических. УзМУ хабарлари, Тошкент Ц 2016.
2. Каримов Ш. Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи, Кобера и их приложения. Вестник КРАУНЦ. Физ–мат. науки. 2017. є2(18). С. 20–40. ISSN 2079–6641.
3. A. K. Urinov, Sh. T. Karimov. On the Cauchy Problem for the Iterated Generalized Two Ц axially Symmetric Equation of Hyperbolic Type. ISSN 1995 Ц 0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 1, pp. 102–110.
4. Karimov Sh. T. The Cauchy Problem for the Iterated Klein – Gordon Equation with the Bessel Operator. ISSN 1995–0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 5, pp. 772–784

The Cauchy problem for the degenerate plate vibration equation in two-dimensional space

Karimov Sh.T.[1], Tulasheva Y.I.[2]

[1]Fergana State University(FerSU), Fergana, Uzbekistan;
[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
shaxkarimov@gmail.com, yorqinoytulasheva@gmail.com

Let $x=(x_1,\ x_2)$ - point three-dimensional Euclidean space R^2, in the domain $\Omega=\{(x,t):\ x\in R^2,\ t>0\}$.

Initial value problem (Cauchy problem). Find a function $u\left(x,t\right)$ satisfying the conditions

$$u\left(x,t\right)\in C^{4,2}_{x,t}(\Omega) \qquad (1)$$

$$Lu=u_{tt}+t^p\Delta^2u+\lambda^2t^pu=0,(x,t)\in\Omega, \qquad (2)$$

satisfying the initial conditions

$$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in R^2, \qquad (3)$$

where $\varphi\left(x\right),\psi(x)$ - given sufficiently smooth functions, $p,\lambda\in R,\ p>0,\ \Delta\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - multidimensional Laplace operator, $\Delta^2=\Delta\Delta-$ biharmonic operator.

In the problem (1)-(3) we make the change of variables $y=[2/(p+2)]t^{(p+2)/2}$. Then Equation (2) with the initial conditions (3) take the form

$$A^{\beta}_{n,\lambda}(u)\equiv u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y+\Delta^2u+\lambda^2u=0,n=2, \qquad (4)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(x,y)=\psi_0(x),\ x\in R^2, \tag{5}$$

where $\psi_0(x) = (1-2\beta)^{2\beta}\psi(x)$, $2\beta = p/(p+2)$, and $0 < 2\beta < 1$ at $p > 0$. Due to the linearity of equation (4), we first construct a solution, satisfying the semi-homogeneous initial conditions

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_y(x,0)=0,\ x\in R^2. \tag{6}$$

To construct a solution to the Cauchy problem (4), (6) we use the Generalized Erdélyi-Kober Operator[1]:

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2^\alpha\lambda^{1-\alpha}}{x^{2\alpha+2\eta}}\int\limits_0^x \frac{J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{(x^2-t^2)^{(1-\alpha)/2}}t^{2\eta+1}f(t)dt, \tag{7}$$

where $\alpha,\eta,\lambda\in R, \alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $J_\nu(z)$ is the Bessel function of the first kind of order ν.

Assume that $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $f(x)\in C^{2\ell}(0,b)$, $b>0$, the functions $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^k f(x)$ are integrable at zero and

$$\lim_{x\to0} x^{2\eta+1}\frac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0,\quad k=\overline{0,\ell-1}.$$

Then

$$[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2]^\ell J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x]^\ell f(x). \tag{8}$$

where $B_\eta^{(x)}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}$ - Bessel operator. We assume that a solution to the problem (4), (6) exists. We look for it in the form of the generalized Erdélyi-Kober operator (7):

$$u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(-1/2,\beta)\upsilon(x,y), \tag{9}$$

where $\upsilon(x,y)$ is an unknown twice continuously differentiable function.

Substituting (9) into (4) and (6), using Equation (8) with $l=1$, $\alpha=\beta$, $\eta=-1/2$ we obtain the following problem: Find a solution $\upsilon(x,\eta)$ to the equation

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\eta^2}+\Delta^2\upsilon=0,\quad (x,\eta)\in\Omega, \tag{10}$$

satisfying the initial conditions

$$\upsilon(x,0)=k_0\varphi(x),\quad \upsilon_\eta(x,0)=0,\quad x\in R^2, \tag{11}$$

where

$$k_0=\Gamma(\beta+1/2)/\sqrt{\pi},$$

Then the solution to the problem (10), (11) has the form[2]

$$\upsilon(x,\eta)=\frac{k_0}{4\pi\eta}\int\limits_{R^2}\varphi(\xi)\cos\left(\frac{|x-\xi|^2}{4\eta}-\frac{\pi}{2}\right)d\xi. \tag{12}$$

Substituting (12) into (9), replacing the integration variable, using the series expansion of the Bessel-Clifford (or normalized Bessel) function, and applying formula (2.5.8.3) in [3], we find

$$u_1(x,y)=\frac{k_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{R^2}\varphi(x-2\sqrt{y}\eta)\,G_2(y,\eta;\beta,\lambda)d\eta, \tag{13}$$

where

$$G_2(y,\eta;\beta,\lambda)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}K_1\left(\beta;\,1,\,\frac{1}{2};\,-\frac{\eta^4}{4},-\frac{1}{4}\lambda^2y^2\right)-$$
$$-\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-(1/2))}\eta^2K_1\left(\beta-\frac{1}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2};-\frac{\eta^4}{4},-\frac{1}{4}\lambda^2y^2\right),\tag{14}$$

where

$$K_1(a,b,c;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{(a)_m m!}\,{}_1F_2(1-a-m;b,c;x)$$

and ${}_1F_2(a;b,c;z)$ is the generalized hypergeometric function.

LITERATURE

1. S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, (1993).

2. Polianin A.D., Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Chapman and Hall/CRC Press:, Boca Raton, FL, USA, (2002).

3. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series, In 3 volumes. T. 1. Elementary functions. - 2nd ed., corrected. - M.: FIZMATLIT, 2002. 632 p.

On the Hirota type equation with a finite density and integral self–consistent source

Khasanov A.B.[1], Eshbekov R.Kh.[2]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
[1]ahasanov2002@mail.ru, [2]rayxonbek@mail.ru

In this work, the Cauchy problem is proposed for the Hirota-type equation with a finite density and integral self-consistent source in the class of periodic infinite-gap functions.

We consider the following Initial Value Problem(IVP) for the Hirota-type equation with a finite density and integral self-consistent source:

$$\begin{cases} p_t=p_{xxx}+6p_x\left(\rho^2-\left\{p^2+q^2\right\}\right)-q_{xx}-2q\left(\rho^2-\left\{p^2+q^2\right\}\right)-\\ -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(\mu,t)v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_2^-+\psi_2^+\psi_1^-\right)d\mu,\\ q_t=q_{xxx}+6q_x\left(\rho^2-\left\{p^2+q^2\right\}\right)+p_{xx}+2p\left(\rho^2-\left\{p^2+q^2\right\}\right)+\\ +\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(\mu,t)v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_1^--\psi_2^+\psi_2^-\right)d\mu, \end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0}=p_0(x),\;\;p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^6(\mathbb{R}),\\ q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),\;\;q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R}), \end{cases}\tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions in x :

$$\begin{cases} p(x+\pi,t)=p(x,t),\;\;q(x+\pi,t)=q(x,t),\;\;x\in\mathbb{R},\;\;t>0,\\ p(x,t),q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \end{cases}\tag{3}$$

Here $\zeta(\mu,t)$ is a given real continuous function with the uniform asymptotes

$$\zeta(\mu,t)=O\left(\frac{1}{1+\mu^3}\right),\;\mu\to\pm\infty.$$

In addition, the function $\psi^{\pm}(x,\mu,t) = \left(\psi_1^{\pm}(x,\mu,t), \psi_2^{\pm}(x,\mu,t)\right)^T$ are Floquet solution, normalized by the condition $\psi_1^{+}(0,\mu,t)$, of the following Dirac equation

$$\mathcal{L}(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \tag{4}$$

and defined as follows:

$$\psi(x,\mu,t) = u(x,\mu,t) + \frac{v_2(\pi,\mu,t) - u_1(\pi,\mu,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}}{2v_1(\pi,\mu,t)} \cdot v(x,\mu,t),$$

where $u(x,\mu,t) = (u_1(x,\mu,t), u_2(x,\mu,t))^T$ and $v(x,\mu,t) = (v_1(x,\mu,t), v_2(x,\mu,t))^T$ are solutions of equation (4) with initial conditions $u(0,\mu,t) = (1,0)^T$ and $v(0,\mu,t) = (0,1)^T$ respectively, the function $\Delta(\mu,t) = u_1(\pi,\mu,t) + v_2(\pi,\mu,t)$ is called the Lyapunov function for the system of equation (4).

In this work, we propose an algorithm for constructing infinite-gap solutions $p(x,t)$, $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ of the problem (1)–(3) by reducing it to the inverse spectral problem for the following Dirac operator:

$$\mathcal{L}(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \mu y, \ x \in \mathbb{R}, \ \tau \in \mathbb{R}, \ t > 0, \tag{e5}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega(x+\tau,t) = \begin{pmatrix} p(x+\tau,t) & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & -p(x+\tau,t) \end{pmatrix}, \ \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Let us denote by $u(x,\mu,\tau,t) = (u_1(x,\mu,\tau,t), u_2(x,\mu,\tau,t))^T$ and $v(x,\mu,\tau,t) = (v_1(x,\mu,\tau,t), v_2(x,\mu,\tau,t))^T$ solutions of equation (5) with initial conditions $u(0,\mu,\tau,t) = (1,0)^T$ and $v(0,\mu,\tau,t) = (0,1)^T$, respectively.

The intervals (μ_{2n-1}, μ_{2n}), $n \in \mathbb{Z}$ are called gaps, where $\mu_n \equiv \mu_n(\tau,t)$ are the eigenvalues of the periodic or antiperiodic $(y(0) = \pm y(\pi))$ problem for the equation (5). The eigenvalues of the Dirichlet problem for the system (5) with boundary conditions $y_1(0,\mu,\tau,t) = 0, \ y_1(\pi,\mu,\tau,t) = 0$ will be denoted by $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ and at the same time $\xi_n(\tau,t) \in [\mu_{2n-1}, \mu_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Numbers $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$ and signs $\sigma_n(\tau,t) = sgn\left\{v_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - u_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$ are called the spectral parameters of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

Spectral parameters $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, and spectrum boundaries $\mu_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$ are called the spectral data of the Dirac operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

The problem of recovering the coefficient $\Omega(x,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ from spectral data is called the inverse problem. The coefficients $p(x+\tau,t)$ and $q(x+\tau,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ are determined uniquely from the spectral data $\mu_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$.

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem. If the initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ satisfy the conditions

$$p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined global solution $p(\tau,t), q(\tau,t)$ of the problem (1)–(3) belonging to the class $C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$, which are determined by the sum of the following uniformly convergence series, respectively:

$$p(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mu_{2n-1}+\mu_{2n}}{2}-\xi_n(x,t)\right), \tag{6}$$

$$q(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(x,t)\sqrt{(\xi_n(x,t)-\mu_{2n-1})(\mu_{2n}-\xi_n(x,t))}\cdot f_n(\xi(x,t)), \tag{7}$$

where

$$f_n(\xi(x,t))=\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{+\infty}\frac{(\mu_{2k-1}-\xi_n(x,t))(\mu_{2k}-\xi_n(x,t))}{(\xi_k(x,t)-\xi_n(x,t))^2}}.$$

LITERATURE

1. Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation, Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, No. 19. P. 1095-1098.
2. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation, Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14. P. 805-809.
3. Khasanov A.B., Eshbekov R.Kh., Khasanov T.G. Integration of a Non-Linear Hirota Type Equation with Additional Terms, Izvestiya: Mathematics. 2025. Vol. 89, No.1. P. 196-219.

The inverse problem of the source for the equation of forced vibrations of beams

Kilichov O.Sh.[1], Ubaydulloev A.N.[2]

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;

oybek.qosh@gmail.com[1], alisherubaydullayev2022@gmail.com[2] .

We consider the following equation

$$u_t+u_{xxxx}=f(x), \tag{1}$$

in the domain $\Omega=\{(x,t):\quad 0<x<p,\, 0<t<T\}$, with boundary conditions

$$u(0,t)=u(p,t)=0,\quad 0\leq t\leq T, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t)=u_{xx}(p,t)=0,\quad 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

initial conditions

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leq x\leq p,$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0)=\psi(x),\ 0\leq x\leq p,\ k\geq 1. \tag{4}$$

The nonlocal problem for a fourth-order equation with a high-order derivative in the initial condition was studied in [1]. One inverse problem for a sixth-order nonlinear equation was studied in [2], and a control problem for a fourth-order parabolic equation - in [3].

Lemma 1. If $\varphi(x)\in W_2^{4k+2}(0,p)$ and $\frac{\partial^{2l}\varphi(0)}{\partial x^{2l}}=\frac{\partial^{2l}\varphi(p)}{\partial x^{2l}}=0,\ l=0,1,\ldots,2k$ then

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)(-\lambda_n^4)^k\varphi_n\left(e^{-\lambda_n^4 t}-1\right)$$

the series converges absolutely and uniformly in interval $[0, p]$.

Lemma 2. If $\psi(x) \in W_2^2(0, p)$ and $\psi(0) = \psi(p) = 0$, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\psi_n$$

converges absolutely and uniformly in interval $[0, p]$.

Theorem 1. Let $\varphi(x) \in W_2^{4k+6}(0, p)$, $\psi(x) \in W_2^6(0, p)$ and conditions $\frac{\partial^{2l}\psi(0)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l}\psi(p)}{\partial x^{2l}} = 0$, $l = 0, 1, 2$, $\frac{\partial^{2l}\varphi(0)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l}\varphi(p)}{\partial x^{2l}} = 0$ $l = 0, 1, \ldots, 2k+2$ be satisfied. Then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(4).

LITERATURE

1. D. Amanov, O.Sh. Kilichov, Nonlocal Boundary Value Problem for a Fourth Order Differential Equation, Lobachevskii Journal of Mathematics, 43(2), pp. 293-302, (2022).
2. T.K. Yuldashev, O.Sh. Kilichov, Nonlinear Inverse Problem for a Sixth Order Differential Equation with Two Redefinition Functions, Lobachevskii Journal of Mathematics, 43(3), pp. 804-814, (2022).
3. H. Yu, Null controllability for a fourth order parabolic equation, Sci China Ser F-Inf Sci, 52(11): 2127-2132, (2009).

Ba'zi bir chegaraviy masalalarni yechishda ketma-ket taqribiy hisoblash usuli

Kurbanbaev O. O., Askarova D. B., Saliev I. B.
Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti, Nukus, O'zbekiston;
Otebay58@mail.ru, askarovadilafruz@gmail.com, saliev22islam93@gmail.com

Maqolada ikkinchi tartibli, umumiy olganda hosilaga nisbatan yechilmagan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1}$$

differensial tenglamasining hosilaga nisbatan T davriy bo'lgan

$$ax(0) + bx(T) = d, \quad x'(0) = x'(T) \tag{2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlandiradigan yechimining taqribiy tuzish masalasi qarashtiriladi, bu yerda $f(t, x, y)$ funksiyasi t va x, y argumentlarning

$$t \in [0; T], \quad x \in D_1, \quad y \in D_2$$

sohasidagi uzluksiz funksiyasi, a, b va d lar nolga teng bo'lmagan o'zgarmas sonlar.

Quyidagi shartlar o'rinli bo'lgan holda (1), (2) chegaraviy masalaning aniq yechimiga va uning hosilasiga teng o'lchovli intiladigan $x_m(t, x_0, x'_0)$ va $\dfrac{dx_m(t, x_0, x'_0)}{dt}$ taqribiy yechimlar ketma-ketligi mavjud bo'ladi.

Aytaylik, (1), (2) chegaraviy masala uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

1). $f(t, x, y)$ funksiyasi (3) sohada bazi-bir musbat M soni bilan chagaralangan bo'lsin:

$$|f(t, x, y)| \leq M,$$

shuning bilan birga musbat K soni bo'yicha Lipshist shartini qanoatlandirsin:

$$|f(t, x, y) - f(t, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq K\left(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|\right). \tag{2}$$

2). x_0 va x'_0 parametrlari aniqlanadigan

$$x_0 \in D_1 \backslash \left[\frac{T^2}{6}M + \beta(x_0)\right] = \tilde{D}_1, \quad x'_0 \in D_2 \backslash \frac{T}{2}M = \tilde{D}_2 \tag{4}$$

to'plamlari mavjud bo'lsin, bu yerda $\beta(x_0) = \frac{1}{b}\left|d - (a+b)x_0\right|$.

3).T va K sonlaridan tuzilgan $Q = \frac{T}{\pi}\left(1 + \frac{T}{\pi}\right)K$ soni birdan kichik bo'lsin:

$$Q = \frac{T}{\pi}\left(1 + \frac{T}{\pi}\right)K < 1. \tag{5}$$

Bu keltirilgan shartlar o'rinli bo'lgan holda taqribiy $x_m(t, x_0, x'_0)$ yechimlar va uning $\frac{dx_m(t, x_0, x'_0)}{dt}$ hosilalar ketma-ketligini quyidagicha aniqlashga bo'ladi:

$$\frac{dx_m(t, x_0, x'_0)}{dt} = x'_0 + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, x_0, x'_0), \dot{x}_{m-1}(s, x_0, x'_0))ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0, x'_0), x'_{m-1}(s, x_0, x'_0))ds, \tag{6}$$

$$x_m(t, x_0, x'_0) = x_0 + \int_0^t x'_m(s, x_0, x'_0)ds$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T x'_m(s, x_0, x'_0)ds + \frac{t}{T}\left(\frac{d}{b} - \frac{a+b}{b}x_0\right). \tag{7}$$

Agar $\frac{dx^*(t, x_0, x'_0)}{dt}$ va $x^*(t, x_0, x'_0)$ lar mos ravishda $\frac{dx_m(t, x_0, x'_0)}{dt}$ va $x_m(t, x_0, x'_0)$ funksiyalar ketma-ketligining $m \to \infty$ dagi limiti bo'lsa, u holda

$$\begin{cases} \int\limits_0^T x'^*(s, x_0, x'_0)ds - \left(\frac{d}{b} - \frac{a+b}{b}x_0\right) = 0, \\ \int\limits_0^T f(s, x^*(s, x_0, x'_0), x'^*(s, x_0, x'_0))ds = 0 \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar sistemasining (x_0, x'_0) yechimi uchun $x^*(t, x_0, x'_0)$ limit funksiyasi (1),(2) chagaraviy masalaning aniq yechimi bo'lib, uning hosilasi (8) ketma-ketlikning limitidan olingan hosilaga teng bo'ladi.

Teorema. Faraz qilaylik (1) tenglamaning o'ng tomonidagi $f(t, x, y)$ funksiyasi (3) sohada aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lib, (4)-(7) shartlari o'rinli bo'lsin. Unda (8) va (9) ko'rinishidagi $\frac{dx_m(t, x_0, x'_0)}{dt}$ va $x_m(t, x_0, x'_0)$ funksiylar ketma-ketligi $m \to \infty$ da o'zining mos $\frac{dx^*(t, x_0, x'_0)}{dt}$ va $x^*(t, x_0, x'_0)$ limit funksiyalariga teng o'lchovli intiladi. Shuningdek, (10) sistemaning yechimi bo'lib topiladigan x_0, x'_0 parametrlari uchun $x^*(t, x_0, x'_0)$ limit funksiya (1) tenglamani va (2) chegaraviy shartlarni qanoatlandiradi.

Taqribiy $x_m(t, x_0, x'_0)$ va aniq $x^*(t, x_0, x'_0)$ yechimlar orasidagi xatolik

$$|x^*(t,x_0,x'_0)-x_m(t,x_0,x'_0)|=\frac{TQ^m\tilde{\alpha}_1(t)}{\pi(1-Q)}$$

tengsizligi bilan, ularning hosilalari orasidagi xatolik esa

$$\left|\frac{dx^*(t,x_0,\tilde{x}_0)}{dt}-\frac{dx_m(t,x_0,\tilde{x}_0)}{dt}\right|\le\tilde{\alpha}_1(t)\frac{Q^m}{1-Q}$$

tengsizligi bilan baholanadi, bu yerda $\tilde{\alpha}_1(t)=\frac{6t}{\pi}\left(1-\frac{t}{T}\right)$.

Adabiyotlar

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. –Киев. Вища школа, 1976.стр.180.
2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.–Киев. Наукова думка, 1992. стр.280.

Evasion Strategy in Linear Differential Game with Multiple Pursuers

Kurbanov A.A.[1], Tursunaliev T.G.[1]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
kurbanovakmal92@gmail.com, toychivoytursunaliyev@gmail.com

We study a linear differential game in $\mathbb{R}^d$, $d\ge 2$, involving n pursuers $x_1,\dots,x_n$ and a single evader y. Initially, the pursuers and the evader begin their motions from initial positions x_{i0} and y_0, respectively. The dynamics of the players are described by the following equations

$$\dot{x}_i=\mu x_i+u_i,\ x_i(0)=x_{i0},\quad |u_i|\le 1, \tag{1}$$

$$\dot{y}=\mu y+v,\ y(0)=y_0,\quad |v|\le\sigma, \tag{2}$$

where $x_i,x_{i0},y,y_0,u_i,v\in\mathbb{R}^d$, $v\in S$, $\mu<0$. It is assumed that $x_{i0}\ne y_0$, $i=1,2,\dots,n$, and σ, $\sigma>1$, is a given number. The control parameter of pursuer x_i is u_i and that of evader y is v. The area S is defined as follows

$$S=\{(v_1,v_2)|\ v_1^2+v_2^2\le\sigma^2,\ |v_1|\le v_2\tan\varphi,\ v_2\ge 0\}.$$

It is the control set of the evader, and φ is a given angle in $(0,\pi/2)$. Note that S is a sector with a radius of σ and a central angle of 2φ (see Fig. 1). Also, S does not contain the pursuers' control sets, which are the unit circles centered at the origin. The goal is to analyze the evasion conditions under these dynamics and constraints.

Definition 1. Measurable functions $u_i(t)=(u_{i1}(t),u_{i2}(t))$, $|u_i(t)|\le 1$, $t\ge 0$, and $v(t)=(v_1(t),v_2(t))$, $v(t)\in D$, $t\ge 0$, are called admissible controls of the pursuer x_i and evader y, respectively.

Definition 2. Let $H(0,r)$ be a circle of radius r and centered at the origin of $\mathbb{R}^2$. A function

$$V(t,\psi_1,\psi_2,y,x_1,...,x_n,u_1,...,u_n),$$
$$V:[0,\infty)^3\times\mathbb{R}^{2(n+1)}\times H(0,r)\times\cdots\times H(0,r)\to S,$$

is called strategy of the evader, if, for any admissible controls $u_1=u_1(t),...,u_n=u_n(t)$ of pursuers and at $\psi_1=\psi_1(t),\ \psi_2=\psi_2(t)$, the following initial value problem

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=\mu x_1+u_1,\ x_1(0)=x_{10},\\
&\vdots\\
&\dot{x}_n=\mu x_n+u_n,\ x_n(0)=x_{n0},\\
&\dot{y}=\mu y+V(t,\psi_1,\psi_2,y,x_1,...,x_n,u_1,...,u_n),\ y(0)=y_0,
\end{aligned}$$

has a unique solution $(x_1(t), ..., x_n(t), y(t))$, $t \geq 0$, where $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$, $t \geq 0$, are given functions.

Definition 3. Evasion in game (1)-(2) is said to be possible if there exists a strategy V for the evader y such that, for all admissible pursuer controls, the condition $x_i(t) \neq y(t)$ holds for every $t \geq 0$ and each $i = 1, ..., n$.

The evader applies a fixed strategy during the game, whereas the pursuers are allowed to choose any admissible controls. Given that $\sigma > 1$, meaning the evader has a speed advantage, we aim to establish the possibility of evasion in game (1)-(2).

Problem. *Find a condition for the angle φ and the number σ to ensure guaranteed evasion in game (1)-(2).*

Theorem. If $\sigma \sin \varphi > 1$, then, regardless of the initial positions of the players, evasion is possible in game (1)-(2).

LITERATURE

1. Azamov A.A. About quality problem for the games of simple pursuit with the restriction, Serdika. Bulgarian math., spisanie. 1986. Vol. 12, P.38–43.
2. Ibragimov G.I. Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers, Dynamic games and applications. 2024. Vol. 14, No. 3. P.665–685.
3. Chernousko F.L., Zak V.L. On differential games of evasion from many pursuers, J Optim Theory Appl. 1985. Vol. 46, No. 4. P.461–470.

On regularization of the solution of the Cauchy problem for a high-order elliptic equation on the plane

Malikov Z.[1], Tursunov F. R .[2], Shodiev D. S.[3]
[1,2,3]Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
[2]farhod.tursunov.76@mail.ru,

Let $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ and G be a bounded simply connected domain in $\mathbb{R}^2$ with a boundary ∂G consisting of a compact part $T = \{y_1 \in \mathbb{R} : a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$ and a smooth arc of the curve $S : y_2 = h(y_1)$ lying in the half-plane $y_2 > 0$, also $\bar{G} = G \cup \partial G, \partial G = S \cup T$.

In the domain G we consider a high-order elliptic equation

$$\Delta^3 U(y) = 0, \quad y \in G. \tag{1}$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ is a Laplace operator.

Statement of the problem. It is required to find the function $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^6(G) \cap C^5(\bar{G})$, whose values are known on the part S of the boundary ∂G, that is,

$$U(y_1, y_2)|_S = f_1(y), \left.\frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial n}\right|_S = f_2(y), \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_3(y), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial(\Delta U(y_1, y_2))}{\partial n}\right|_S = f_4(y), \Delta^2 U(y_1, y_2)\big|_S = f_5(y), \left.\frac{\partial(\Delta^2 U(y_1, y_2))}{\partial n}\right|_S = f_6(y), \tag{3}$$

where $f_j(y)$ are given sufficiently smooth functions $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ and $\frac{\partial}{\partial n}$ is the operator of differentiation along the outer normal to ∂G. It is required to continue $U(y)$ in G using condition (2), (3).

Construction of the Carleman function. Let $\sigma > 0$. For $\alpha > 0$, we define the function $\Phi_\sigma(x, y)$ by the following equalities [1]:

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_2^2-y_2^2\right)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2} u du}{u^2+r^2} - \right.$$
$$\left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \left(y_2 - x_2\right) \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2} \frac{u du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \right] \tag{4}$$

where $u \geq 0, r = |y-x|, y' = (y_1, 0), x' = (x_1, 0), \alpha = |y' - x'|$.

For the function $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^6(G) \cap C^5(\bar{G})$ and any $x \in G$ the following Green's integral formula is valid [2]:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial\left(\Delta^2 L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - \Delta^2 L(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y +$$
$$+ \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x,y) \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y + \tag{5}$$
$$+ \int_{\partial G} \left[\Delta^2 U(y) \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - L_\sigma(x,y) \frac{\partial\left(\Delta^2 U(y)\right)}{\partial n} \right] dS_y, x \in G$$

where $L_\sigma(x,y) = r^4 \Phi_\sigma(x,y)$ is a fundamental solution of equation (1).

Let us denote

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[f_1(y) \frac{\partial\left(\Delta^2 L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - f_2(y) \Delta^2 L(x,y) \right] dS_y +$$
$$+ \int_S \left[f_3(y) \frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - f_4(y) \Delta L_\sigma(x,y) \right] dS_y + \tag{6}$$
$$+ \int_S \left[f_5(y) \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - f_6(y) L_\sigma(x,y) \right] dS_y, x \in G$$

Theorem 1. Let the function $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^6(G) \cap C^5(\bar{G})$ on part S of the boundary ∂G satisfy conditions (2),(3) and let the inequality hold on part T of the boundary ∂G

$$|u(y)| + \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right| + |\Delta u(y)| + \left| \frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n} \right| + \left| \Delta^2 u(y) \right| + \left| \frac{\partial\left(\Delta^2 u(y)\right)}{\partial n} \right| \leq M, \; y \in T, \tag{6}$$

then for any $x \in G$ and $\sigma > 0$ the following estimates are valid:

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq \varphi(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \tag{7}$$
$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \varphi_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, i = 1, 2, \tag{8}$$

where M is a positive number, $\varphi(\sigma, x_2)$ and $\varphi_i(\sigma, x_2)$ are some functions depending on σ, x_2.

LITERATURE

1. Yarmukhamedov S. Representation of harmonic functions as potentials and the Cauchy problem, Math. Notes. 2008. Vol. 83. P. 693–706.
2. Vekua I.N. New methods for solving elliptic equations. Moscow: Gostexizdat, 1948.

3. Khasanov A.B., Tursunov F.R. On the Cauchy Problem for the Three-Dimensional Laplace Equation, Russ. Math. 2021. Vol. 65. P. 49–64.
4. Shodiev D.S., Tursunov F.R. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation, Journal of Siberian Federal University. 2022. Vol. 15. P. 199–213.

Ta'qiqlangan vaziyatli o'yin masalalaridan birini yechish algoritmi

Mamatov A.R.
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston;
akmm1964@rambler.ru

Bizga

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*, Y(x) \neq \varnothing\}$$

va

$$Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, \quad ax + By = b\}$$

to'plamlar berilgan bo'lsin.

Bu yerda

$$x, f_*, f^* \in \mathbb{R}^1; y, g_*, g^* \in \mathbb{R}^l; a, b \in \mathbb{R}^m; B \in \mathbb{R}^{m\times l}, rankB = m < l. \qquad (1)$$

Ikki o'yinchidan iborat ta'qiqlangan vaziyatli o'yin masalasini qaraymiz: dastlab birinchi o'yinchi x sonni X kesmadan, so'ngra uni bilgan holda ikkinchi o'yinchi y vektorni $Y(x)$ to'plamdan tanlaydi.

Birinchi o'yinchining maqsadi $\varphi(x) = \min_{y\in Y(x)}(c'x + d'y), x \in X \quad (c \in \mathbb{R}^1, d \in \mathbb{R}^l)$ funksiyaga maksimal qiymat beradigan $\hat{x}$ sonni aniqlash, ikkinchi o'yinchining maqsadi esa $d'y, y \in Y(x)$ funksiyaga minimal qiymat beradigan $\hat{y}$ vektorni aniqlashdan iborat.

U holda o'zgaruvchilari bog'langan maksimin masalasiga ega bo'lamiz [1-3]:

$$\varphi(x) = \min_{y\in Y(x)} (c'x + d'y) \rightarrow \max_{x\in X}.$$

$\varphi(x), x \in X$ funksiya qavariq va bo'lakli chiziqli bo'lganligi [1] sababli u ko'p ekstremallidir.

$x \in X$ – birinchi o'yinchining strategiyasi, $y \in Y(x)$ – ikkinchi o'yinchining birinchi o'yinchi x strategiysiga mos strategiyasi deyiladi.

Ishda birinchi o'yinchining optimal $x \in X$ strategiyasi va ikkinchi o'yinchining unga mos optimal strategiyasini ko'pi bilan to'rt chiziqli programmalash masalasini yechishga asoslangan algoritmi keltiriladi.

Algoritmni illyustratsiya qiladigan misol keltiriladi:

$$c = -1, d'(-2, 1, 0, 0, 0), f_* = -10, f^* = 3,$$

$$g'_* = (0; 0; 0; 0; 0), g^{*'} = (6; 7; 100; 100; 100),$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b' = (4; 10; 5).$$

ADABIYOTLAR

1. Falk J.E. Linear maxmin, Math. Program. 1973. V. 5. No 2. pp. 169–188.
2. Azizov I.Konechniy algoritm resheniya lineynoy maksiminnoy zadachi so svyazannimi peremennimi i rezultati chislennogo eksperimenta. Minsk: 1984, 20 s. (Preprint/In-t matematiki AN BSSR. 18(203))
3. Mamatov A.R. An Algorithm for Solving a Linear Max-min Problem with Coupled Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2005, vol. 45, no. 6. pp. 1006–1010.
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Tyatyushkin A.I. Konstruktivniye metodi optimizatsii. Ch.1.- Minsk: Universitetskoye, 1984.

A linear inverse boundary value problem for the identification of the right-hand side in a two-dimensional parabolic equation

Mehraliyev Y.T.[1], Azizbayov E.I.[2]

Baku State University, Baku, Azerbaijan;
yashar_aze@mail.ru
Academy of Public Administration under the President of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;
eazizbayov@dia.edu.az

Abstract. The paper investigates the identification of the right-hand side in a two-dimensional parabolic equation under an integral overdetermination condition. The problem is reduced to an equivalent auxiliary problem with trivial boundary conditions whose solvability is established via the contraction mapping principle. Using this equivalence, the existence and uniqueness of a classical solution to the original problem is demonstrated.

0.1 Introduction

It is known that experimental and theoretical research in various sciences often leads to linear and nonlinear inverse problems described by the equations of mathematical physics.

The problem of reconstructing the source term or recovering unknown coefficients from observed or measured data is known as an inverse boundary value problem in the theory of mathematical physics. These type of problems are widely applied in various scientific and engineering fields, including seismology, biology, medicine, acoustics, electromagnetics, mineral exploration, seawater desalination, and fluid flow in porous media, fluid dynamics, remote sensing, nondestructive evaluation, etc.

In recent years, inverse and ill-posed problems involving partial differential equations in various dimensions have attracted considerable attention from researchers (see, for example, [1]–[3] and the references therein).

The present work focuses on the unique identification of the right-hand side of a two-dimensional parabolic equation under various boundary conditions. A linear inverse boundary value problem for a parabolic equation involves determining an unknown function-such as a source term, coefficient, or initial condition-within a linear parabolic equation using additional information, typically provided in the form of overspecified boundary or interior data.

0.2 Mathematical formulation of the problem

Let $T > 0$ be a fixed time moment and let $D_T = \bar{Q}_{xy} \times [0, T]$ denote a closed bounded region in space, where Q_{xy} is defined by the inequalities $0 < x < 1$ and $0 < y < 1$. We consider the problem of determining the unknown functions $u(x,y,t) \in C^{2,2,1}(D_T)$ and $a(t) \in C[0,T]$ such that the pair $\{u(x,y,t), a(t)\}$ satisfies the following two-dimensional parabolic equation

$$u_t(x,y,t) - c(t)\left(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\right)$$
$$= a(t)g(x,y,t) + f(x,y,t),\ (x,y,t) \in D_T, \tag{1}$$

subject to the initial condition

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \bar{Q}_{xy}, \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = u(x,1,t) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

and the overspecified condition

$$u(x_0,y_0,t) + \int_0^1\int_0^1 K(x,y)u(x,y,t)dxdy = h(t),\ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

where $(x_0,y_0) \in Q_{xy}$ is a certain fixed point, and the functions $c(t) > 0, f(x,y,t), g(x,y,t), K(x,y), \varphi(x,y), h(t)$ are given functions.

Definition. The pair $\{u(x,y,t), a(t)\}$ is said to be a classical solution to the problem (1)–(4) if the components of the pair satisfy relations (1)–(5) in the classical sense.

0.3 Classical solvability of the inverse boundary value problem

Assume that data of the problem satisfy the following conditions:

A_1 $\varphi(x,y), \varphi_x(x,y), \varphi_{xx}(x,y), \varphi_y(x,y), \varphi_{xy}(x,y), \varphi_{yy}(x,y) \in C(Q_{xy})$,
$\varphi_{xxy}(x,y), \varphi_{xyy}(x,y), \varphi_{xxx}(x,y), \varphi_{yyy}(x,y) \in L_2(Q_{xy})$,
$\varphi(0,y) = \varphi_x(1,y) = \varphi_{xx}(0,y) = 0,\ 0 \le y \le 1$,
$\varphi_y(x,0) = \varphi(x,1) = \varphi_{yy}(x,1) = 0,\ 0 \le x \le 1$;

A_2 $f(x,y,t), f_x(x,y,t), f_{xx}(x,y,t), f_y(x,y,t), f_{xy}(x,y,t), f_{xy}(x,y,t) \in C(D_T)$,
$f_{xxy}(x,y,t), f_{xyy}(x,y,t), f_{xxx}(x,y,t), f_{yyy}(x,y,t) \in L_2(D_T)$,
$f(0,y,t) = f_x(1,y,t) = f_{xx}(0,y,t) = 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T$,
$f_y(x,0,t) = f(x,1,t) = f_{yy}(x,1,t) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T$;

A_3 $c(t) \in C[0,T],\ h(t) \in C^1[0,T]$,
$g(x_0,y_0,t) + \int_0^1\int_0^1 K(x,y)g(x,y,t)dxdy \ne 0,\ 0 \le t \le T$.

Theorem. Let the conditions $A_1 - A_3$ and the compatibility condition

$$\varphi(x_0,y_0) + \int_0^1\int_0^1 K(x,y)\varphi(x,y)dxdy = h(0)$$

be satisfied. Then, the problem (1)–(5) has a unique classical solution.

References

1. Azizbayov EI, Mehraliyev YT. Nonlocal inverse boundary-value problem for a 2D parabolic equation with integral overdetermination condition, Carpathian Mathematical Publications. 2020, Vol. 12, No. 1, P. 23–33.
2. Durdiev DK , Zhumaev ZhZh. On determination of the coefficient and kernel in an integro-differential equation of parabolic type, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2023, Vol. 11, No. 1, P. 49–65.
3. Mehraliyev YT, Huntul MJ, Azizbayov EI. Simultaneous identification of the right-hand side and time-dependent coefficients in a two-dimensional parabolic equation, Mathematical Modelling and Analysis. 2024, Vol. 29, No. 1, P. 90–108.

An inverse problem for the fractional subdiffusion equation

Merajov N.I
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan; merajovnursaid@gmail.com

In this work, we investigate the unique solvability of a time- and boundary-nonlocal inverse boundary value problem for a fractional subdiffusion equation with an inner point condition. To analyze the solvability of the inverse problem, we first reduce the original formulation to an auxiliary system with trivial data and establish its equivalence to the original problem under certain assumptions. By applying the Banach fixed-point theorem, we then prove the existence and uniqueness of a solution to the auxiliary system. Finally, using the established equivalence, we derive an existence and uniqueness theorem for the classical solution of the inverse coefficient problem on a sufficiently small time interval.

A Cauchy problem for the first order differential equation involving the prabhakar fractional derivative

Mirzaeva M.M.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
maftunamirzayeva2009@gmail.com

Let us consider the following equation

$$^{PRL}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u\left(t,x\right)-u_x\left(t,x\right)=f\left(t,x\right) \tag{1}$$

in a domain $\Omega=\left\{(t,x):\ 0<t<T,\quad x>a\right\}$, $a\geq-\infty$. Here

$$^{PRL}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y\left(t\right)=\frac{d^m}{dt^m}{}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}y\left(t\right)$$

symbolizes Prabhakar fractional derivative [1] and

$$^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y\left(t\right)=\int\limits_0^t\left(t-s\right)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta(t-s)^{\alpha}\right]y\left(s\right)ds,\ \ t>0$$

represents Prabhakar fractional integral, also

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[z\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\gamma\right)_kz^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)k!}.$$

We note that above-given definitions are valid for $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{R}$ such that $\alpha>0$ and $m-1<\beta<m$, $m\in\mathbb{N}$. We see in the particular case $0<\beta<1$.

Cauchy problem. Find the regular solution $u(t,x)$ of the equation (1) in the domain Ω, that satisfies the following initial condition:

$$\lim_{t\to 0} {}^{P}I_{0t}^{\alpha,\,1-\beta,\,-\gamma,\,\delta} u(t,x) = \tau(x), \quad x > a, \tag{2}$$

where $\tau(x)$ is a given function.

Definition. A regular solution of the equation (1) in the domain Ω is called a function $u(t,x)$ with the regularity $t^{1-\beta}u(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_x(t,x)$, ${}^{PRL}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x) \in C(\Omega)$ that satisfies the equation (1) at all points $(t,x) \in \Omega$.

Theorem. Let $t^{1-\beta}f(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $f(t,x)$ satisfies the Hölder condition with respect to one of its variables, $\tau(x) \in C[a,\infty)$, and the conditions

$$\lim_{x\to\infty} \tau(x)\, e^{-\rho|x|^{1/(1-\beta)}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} t^{1-\beta} f(t,x)\, e^{-\rho|x|^{1/(1-\beta)}} = 0$$

are satisfied, where

$$\rho < (1-\beta)\left(\frac{\beta}{T}\right)^{\beta/(1-\beta)},$$

and the convergence is uniform on the set $\{t \in (0;T)\}$. In the domain Ω, the regular solution of the equation (1) satisfying the condition (2) is expressed as follows:

$$u(t,x) = -\int_x^\infty \tau(\xi)\, t^{-1} E_{12}\left(\begin{matrix}-\gamma,1,0;\\ -\beta,\alpha,0;-\gamma,0;1,1;1,1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(x-\xi)\,t^{-\beta}\\ \delta t^{\alpha}\end{matrix}\right) d\xi -$$

$$-\int_0^t \int_x^\infty f(\eta,\xi)\,(t-\eta)^{-1} E_{12}\left(\begin{matrix}-\gamma,1,0;\\ -\beta,\alpha,0;-\gamma,0;1,1;1,1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(x-\xi)\,(t-\eta)^{-\beta}\\ \delta(t-\eta)^{\alpha}\end{matrix}\right) d\xi d\eta.$$

Here $E_{12}(x,y)$ is the bivariate Mittag-Leffler type function [2].

REFERENCES

1. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Ž. Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications. Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 242, P. 576–589.
2. Turdiev Kh.N., Usmonov D.A. The Goursat's problem for generalized (fractional) hyperbolic-type equation. Uzbek Mathematical Journal, 2025, Volume 69, Issue 2, pp.300-306.

Classification of manifolds adjacent to an isolated singular point $(0,0)$ of a generalized polynomial homogeneous system of class (α_1,α_2)

Mukhtarov. Ya. [1]**, Shavkatova.L.** [2]

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
layloshavkatova1@gmail.com, ya-muxtarov@rambler.ru

Abstract. The system of homogeneous differential equations and its properties are studied in detail. The article investigates the neighborhood of a singular point of a system of generalized homogeneous differential equations.

Let us consider the polynomial generalized homogeneous system

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^{m}a_i x^{(m-i)a_1}y^{ia_2}\equiv P(x^{a_1},y^{a_2}),$$

$$\frac{dy}{dt}=\sum_{i=0}^{m}b_i x^{(m-i)a_1}y^{ia_2}\equiv Q(x^{a_1},y^{a_2}) \tag{1}$$

where $a_1,b_i,a_1,a_2 \quad (i=\overline{o,m})$ are real numbers.

If the system admits exceptional directions or tangent parabolas, then the neighborhood of the isolated singular point $O(0,0)$ is partitioned into integral manifolds, in which the geometric structure of the trajectories depends on their boundaries (the exceptional directions and the contact parabolas) $[1,2,3]$. Moreover, the trajectories approach the isolated singular point in its neighborhood ε only along the exceptional directions and the tangent parabolas. The classification of the integral manifolds depends on how the trajectories approach the origin of the xoy.

The main object of our study will be the system

$$\frac{dx}{dt_1}=x^{\frac{a_1}{a_2}}P(1,u^{a_2}),\qquad b)\frac{du}{dt_1}=Q(1,u^{a_2})-\frac{a_1}{a_2}ux^{\varepsilon_1}P(1,u^{a_2}) \tag{2}$$

where $dt_1=x^{a_1m-\frac{a_1}{a_2}}dt,\quad \varepsilon_1=\frac{a_1}{a_2}-1.$

The system

$$\frac{dx}{dt_1}=x^{\frac{a_1}{a_2}}P(1,u^{a_2}),\qquad \frac{dx}{dt_1}=Q(1,u^{a_2}) \tag{3}$$

will be referred to as a "reduction" of system (2).

The integral manifolds generated by the trajectories of equation (3) are non-intersecting smooth sectors $C(\gamma^i)$, on each of which the geometric structure of the trajectories of system (1) can be studied.

We denote by ω the trajectories of system (1), whose first approximation is determined by the formula

$$\omega_i:\gamma^i\frac{x_0^{\frac{a_1}{a_2}-1}}{[1-\frac{a_1}{a_2}\int_{t_1^o}^{t_1}P(1,\gamma^{ia_2})ds+1]^{\frac{a_1}{a_1-a_2}}}$$

Let u_i-be the singular points of system (2) lying on the ou–axis. If the trajectory γ is an isolated singular point of system (2), then the boundary of the sector $C(\gamma)$ degenerates into tangent parabolas

$$c(u^i):y=u^ix^{\frac{a_1}{a_2}},$$

where u^i is determined by the real solutions of the algebraic equation

$$Q(1,u^{\alpha_2})=0.$$

It should be noted that the local pattern of phase trajectories in the ε-neighborhood of the tangent parabolas is determined by the type of the singular point of the Briot-Bouquet system (2) $[1,2]$. The following theorem holds.

Theorem. In order for the point $(0,0)$ of system (1) to be a generalized node, it is necessary and sufficient that all the characteristic numbers of the tangent parabolas and the exceptional directions have the same sign.

LITERATURE

1. Шарипов Ш.Р., Мухтаров Я. Некоторые свойства траекторий полиномиальной обобщенно-однородной двумерной системы в целом. Вопросы теории ОДУ, Самарканд: изд. СамГУ. 1984, с. 66–73
2. Muxtarov Y., Miyassarov A.A. Umumlashgan bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini tadqiqlash, Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti. Ilmiy-nazariy jurnal 2024, є 11, c. 66–70
3. Mukhtarov Ya., Shavkatova L. Qualitative analysis of a generalized homogeneous polynomial system of class Current problems of physics, mathematics and artificial intelligence technologies international scientific and theoretical conference (may 16-17, 2025), c. 80–82

An algorithms for computing a linear ordinary differential equations using approximation by piecewise constant arguments

Muminov M.I.[1,2], Shermukhammedov B.A.[2]

[1]V.I Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

[2]Faculty of Mathematics, Samarkand State University;

mmuminov@mail.ru, shermuxammedovbaxtiyor47@gmail.com

In this paper, we present a construction of an approximate solution for the nth order linear differential equation of the form

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=f(t),$$

with initial conditions

$$y(0)=y_0, y'(0)=y_1,\dots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1},$$

where $a_0(\cdot),\dots,a_n(\cdot)$ and $f(\cdot)$ are real variable continuous on $[0,1]$ functions. To construct an approximate solution, we first introduce an nth order differential equation with piecewise constant arguments corresponding to the considered ODE with initial conditions, which does depend on a positive integer number N. Next, we define a definition of the solution of n-th order differential equation with piecewise constant arguments as a piecewise-smooth function with respect to a positive integer N. It is proved that this equation has a unique piecewise-smooth solution, which will be an approximate solution of the considered initial value problem for large N. Numerical results are presented showing the effectiveness of the proposed methods, and the errors between the approximate and exact solutions are estimated.

Consider n-th order linear differential equation with piecewise constant arguments of the form

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(\frac{k-1}{N})+\cdots+a_n(t)y(\frac{k-1}{N})=f(t),$$
$$t\in[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}),\ k=1,...,N \tag{1}$$

with initial conditions

$$y(0)=y_0, y'(0)=y_1,\dots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \tag{2}$$

We introduce the definition of a solution to the equation (1) .

Definition 1. A function $y(t) := y_N(t)$ is called a solution of the initial value problem (1)-(2) if the following conditions are satisfied:

(i) $y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ exist in $(0,1)$ and continuous on $[0,1]$;

(ii) $y^{(n)}(t)$ exists and continuous in $(0,1)$ with possible exception at points $\frac{k}{N}$, $\quad k = 0,1,...,N$, where one-sided derivatives exist;

(iii) $y(t)$ satisfies initial value problem (1)-(2) in [0,1), with the possible exception at the points $\frac{k}{N}$, $\quad k = 0,1,...,N$.

The equation (1) is called the n-th order differential equation with piecewise constant arguments corresponding to the equation (1).

Theroem 1 For any positive integer number N the initial value problem (**??**, **??**) has a unique solution y_N defined as

$$y(t) = \int\limits_{\frac{k-1}{N}}^{t}\int\limits_{\frac{k-1}{N}}^{s_n}\cdots\int\limits_{\frac{k-1}{N}}^{s_2}\Phi(s_1;\frac{k-1}{N})ds_1\dots ds_n + \frac{(t-\frac{k-1}{N})^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(\frac{k-1}{N})$$

$$+\frac{(t-\frac{k-1}{N})^{n-2}}{(n-2)!}y^{(n-2)}(\frac{k-1}{N}) + \dots + y(\frac{k-1}{N}), \quad t \in [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}).$$

The following theorem claims that the function y_N can be approximated for the solution of the initial value problem (1), (2).

Theroem 2 For any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer number $N_0 = N(\varepsilon)$ such that for any $N > N_0$ the estimation

$$\sup_{t, t\neq \frac{k}{N}} |y_N^{(n)}(t) + a_1(t)y_N^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y_N(t) - f(t)| < \varepsilon$$

holds, where y_N is a solution of the initial value problem (1), (2).

References

1. Muminov, M.I., Jumaev, Z.Z. On the Approximation Algorithms for Solving Generalized Bernoulli Differential Equations Using Piecewise Constant Argument Method. Int. J. Appl. Comput. Math 11, 45 (2025).

Existence of Solutions of a Boundary Value Problem for Hyperbolic Partial Differential Equations with Piecewise Continuous Arguments

Muminov M. I.[1], **Radjabov T. A .**[2]

Samarkand Branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan;

mmuminov@mail.ru

Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan;

radjabovtirkash@yandex.com

In the present paper, we consider the boundary value problem (BVP) in [1], [2] for hyperbolic equation with piecewise constant arguments

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t) + bu_{xx}(x,[t]) + cu_{xx}(x,[t+1]) \quad in \quad \Omega \times J, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = v(x), \quad u_t(x,0) = w(x) \quad in \quad \Omega, \tag{3}$$

where $a, b, c \in \mathbf{R}$, $\Omega = [0,1]$ with smooth boundary $\partial\Omega$, J denotes the time interval $([0,+\infty))$ and $[\cdot]$ denotes the greatest integer function.

Definition 1. [3] A function $u(x,t)$ is called a solution of (1) if it satisfies the conditions:

(i) $u(x,t)$ is continuous in $\Omega \times J$;

(ii) u_{tt} and u_{xx} exist and are continuous in $\Omega \times J$, with possible exception at points $(x,[t]) \in \Omega \times J$, where one-sided derivatives exist with respect to second argument;

(iii) $u(x,t)$ satisfies the boundary value problem (1)-(3) with the possible exception of the points $(x,[t])$.

Application of the method of separation of variables for the solution of (1) gives

$$X''(x) + P^2 X(x) = 0, \tag{4}$$

$$T''(t) + a^2 P^2 T(t) = -bP^2 T([t]) - cP^2 T([t+1]). \tag{5}$$

(4) and the boundary conditions of (1) yield $P = j\pi$, $X_j = \sin(xj\pi)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. So, (5) changes into

$$T_j''(t) + a^2 j^2 \pi^2 T_j(t) = -bj^2\pi^2 T_j([t]) - cj^2\pi^2 T_j([t+1]), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

For convenience, we take $T_j'(t) = V_j(t)$, so (6) gives

$$W_j'(t) = AW_j(t) + BW_j([t]) + CW_j([t+1]), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

where
$W_j = \begin{pmatrix} T_j \\ V_j \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2j^2\pi^2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -bj^2\pi^2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -cj^2\pi^2 & 0 \end{pmatrix}$. The equation (6) is equivalent to the equation (7).

A formal series solution $u(x,t)$ of (1) by the method of separation of variables the following vector in series form $\hat{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \sin(xi\pi) W_j(t)$. Let $t = 0$, we have

$$\hat{u}(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \sin(xj\pi) W_j(0) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \sin(xj\pi) \begin{pmatrix} T_j(0) \\ T_j'(0) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

From (8) and the initial conditions of (1) we have

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_j \sin(xj\pi) T_j(0) = v(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} D_j \sin(xj\pi) T_j'(0) = w(x),$$

so, we get

$$D_j T_j(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 v(x)\sin(xj\pi)\,dx, \quad D_j T_j'(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 w(x)\sin(xj\pi)\,dx.$$

Thus, $\hat{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin(xj\pi) W_j(t) d_j$, where

$$d_j = \begin{pmatrix} D_j T_j(0) \\ D_j T_j'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\int_0^1 v(x)\sin(xj\pi)dx \\ \frac{1}{2}\int_0^1 w(x)\sin(xj\pi)dx \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Let

$$M(t) = e^{At} + \left(e^{At} - I\right) A^{-1} B,$$

$$N(t) = \left(e^{At} - I\right) A^{-1} C.$$

Theorem 1. Let a, b, c be real numbers. If $N_j(1) \neq -1$, then the equation (7) has a unique solution and it represents on $[n, n+1), n = 0, 1, 2, ...$ as

$$W_j(t) = (M_j(t-n) - N_j(t-n)\frac{M_j(1)}{1+N_j(1)})\frac{M_j^n(1)}{(1+N_j(1))^n}W_j, \quad t \in [n, n+1).$$

Theorem 2. Let $N_j(1) \neq -1$ for any $j = 1, 2, ...$. Then the BVP (1)-(3) has a unique solution and it represents in the series form as

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}(M_j(t-n) - N_j(t-n)\frac{M_j(1)}{1+N_j(1)})$$

$$\frac{M_j^n(1)}{(1+N_j(1))^n}W_j \sin j\pi x, t \in [n, n+1).$$

LITERATURE

1. Chen Yongtang, and Qi Wang. Convergence and stability of meshfree method based on radial basis function for a hyperbolic partial differential equation with piecewise constant arguments. Journal of Difference Equations and Applications. –2022. –V. 28, –No. 1. –P. 39–57.
2. Chen Y., Wang Q. Convergence and Stability of Galerkin Finite Element Method for Hyperbolic Partial Differential Equation with Piecewise Continuous Arguments of Advanced Type. Mathematical Modelling and Analysis. –2023. –V. 28, –No. 3. –P. 434–458.
3. Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1993.
4. Muminov, M. I., Radjabov, T. A. Existence of solutions of a boundary value problem for a diffusion equation with piecewise constant arguments. Differential Equations. –2025. –V. 61, –No. 1. –P. 16–28.

Optimal Pursuit Game Described by Infinite System of n-ary Differential Equations

Muxammadjonov A . A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com

The present work is devoted to investigate an optimal pursuit game of infinite system described by n-ary differential equations in Hilbert space l_2 with integral constraints on players' controls. In paper [2], the optimal control problem was studied, while this work is a logical continuation of the paper [2]. In this work, the optimal strategy is constructed and the equation for the optimal pursuit time is found.

Let the players' trajectories be given by the following equations in Hilbert space l_2:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_{ij} = -\lambda_j x_{ij} + x_{i+1,j} + u_{ij} - v_{ij}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_{nj} = -\lambda_j x_{nj} + u_{nj} - v_{nj}, & \\ x_{ij}(0) = x_{ij0}, & 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, \dots, \end{array} \tag{10}$$

where $u_{ij}, v_{ij}, i = \overline{1, n}, j = 1, 2, \dots,$ are control parameters of pursuer and evader, respectively, λ_j are given nonnegative real numbers.

Let μ, ρ_0 and σ_0 be positive numbers. It is assumed that $\rho_0 > \sigma_0$.

Definition 1. The function $\omega : [0,T] \to l_2$,

$$\omega(\cdot) = (\omega_{1j}(\cdot), \omega_{2j}(\cdot), \dots, \omega_{nj}(\cdot), \dots),$$

is called an admissible control if its coordinates $\omega_{ij}(t), 0 \le t \le T, i = \overline{1,n}, j = 1,2,\dots,$ are measurable and satisfy the following integral constraint

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2(s)ds \le \mu^2,$$

where T is a sufficiently large number and μ is a given positive real number.

Definition 2. We call the functions $u(\cdot) \in S(\rho_0)$ and $v(\cdot) \in S(\sigma_0)$ admissible controls of pursuer and evader, respectively.

Definition 3. A function

$$U(t,v) = (U_1(t,v), U_2(t,v), \dots),$$

$$U_k(t,v) = (U_{k1}(t,v), U_{k2}(t,v), \dots, U_{kn}(t,v)),\ U : [0,T] \times l_2 \to l_2,$$

with the components U_k of the form $U_k(t,v) = v_k(t) + w_k(t)$ with $v_k(t) = (v_{k1}(t), v_{k2}(t), \dots, v_{kn}(t))$ and $w_k(t) = (w_{k1}(t), w_{k2}(t), \dots, w_{kn}(t))$ that satisfy, for any $v(\cdot) \in S(\sigma_0)$, the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |U_k(t,v(t))|^2 dt \le \rho_0^2, \quad |U_k(t,v(t))|^2$$

$$= U_{k1}^2(t,v(t)) + U_{k2}^2(t,v(t)) + \ldots + U_{kn}^2(t,v(t)),$$

is called a strategy of the pursuer, where $w(\cdot) = (w_1(\cdot), w_2(\cdot), \dots) \in S(\rho_0 - \sigma_0)$.

Definition 4. We say that the strategy $U = U(t,v)$ of the pursuer guarantees completion of pursuit in game (1) starting from the initial state η_0 for the time $\tau(U)$, if $\eta(t') = 0$ at some $t' \in [0, \tau(U)]$ for the solution $\eta(t)$ of initial value problem generated by $u(t) = U(t, v(t))$ and any admissible control of evader $v(t)$, $0 \le t \le \tau(U)$. Also, the number $\tau(U)$ is called a guaranteed pursuit time.

Obviously, any number τ', $\tau' \ge \tau(U)$, can also be considered as a guaranteed pursuit time corresponding to the same strategy U. Let $\tau^*(U)$ denote the least upper bound of the numbers $\tau(U)$.

The strategy U^* is called the optimal strategy for the pursuer if $\tau^*(U^*) = \inf\limits_U \tau^*(U)$ and the number $\tau^* = \tau^*(U^*)$ is called the minimax payoff of the game.

Definition 5. We call the function

$$(t, \eta, \rho, \sigma, u) \to V(t, \eta, \rho, \sigma, u), \quad V : \mathbb{R} \times l_2 \times [0, \rho_0] \times [0, \sigma_0] \times l_2 \to l_2,$$

the evader's strategy, if, for any pursuer's admissible control $u = u(t)$, $t \in [0,T]$, the system with $v = 0$ if $0 \le t \le \varepsilon$, and $v = V(t, \eta(t), \rho(t), \sigma(t), u(t-\varepsilon))$ if $t > \varepsilon$, where ε is a positive number, has a unique solution

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots)$$

$$= (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots), \quad i = 1, 2, ...,$$

and along this solution the following inequality holds

$$\int_{\varepsilon}^{T} ||V(t,\eta(t),\rho(t),\sigma(t),u(t-\varepsilon))||^2 dt \le \sigma_0^2.$$

Definition 6. We say that the strategy V of evader guarantees evasion on the interval $[0,\tau(V))$ from the initial state $\eta_0 \in l_2$ if $\eta(t) \neq 0$, $t \in [0,\tau(V))$ for any pursuer's admissible control $u(t)$, $t \in [0,T]$. We call the number $\tau(V)$ a guaranteed evasion time.

Let $\tau_*(V)$ be the greatest lower bound of the numbers $\tau(V)$ that correspond to the strategy V. If $\tau_*(V^*) = \sup\limits_{V} \tau_*(V)$, we call the strategy V^* the optimal strategy of the evader, and we call the number $\tau_* = \tau_*(V^*)$ the maximin payoff of the game. If $\tau^*(U^*) = \tau_*(V^*)$, this number is called the optimal pursuit time.

Theorem. The number θ that satisfies the equation $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_{i0}^* W_i^{-1}(t)\eta_{i0} = (\rho_0 - \sigma_0)^2$, is the optimal pursuit time in game (1), where η_{i0}^* is the transpose of η_{i0}, $W_i^{-1}(t)$ is the inverse matrix of $W_i(t) = \int\limits_0^t e^{-A_i s} e^{-A_i^* s} ds$.

LITERATURE

1. Ibragimov G.I. The optimal pursuit problem reduced to an infinite system of differential equation, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. 77(5): 470–476.
2. Muxammadjonov A.A. Optimal pursuit differential game problem with integral constraints in Hilbert Space l_2, Modern methods of mathematical physics and their applications. Tashkent-2025. 153–154.
3. Ibragimov G.I., Qo'shaqov X.Sh., Muxammadjonov A.A. Optimal Pursuit Differential Game Problem for an Infinite System of Binary Differential Equations, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. 45(3): 1131–1144.

Nonlocal Problems with Integral Conditions for the Bussinesq Equation

Nortoshev D. G.[1], Nortoshev M. M.[2]

[1]Tashkent State Transport University (TSTU), Tashkent, Uzbekistan;

[2]Uzbekistan Nationality University (UzMUU), Tashkent, Uzbekistan;

dnortoshev@gmail.com, maqsud.nortoshev2@gmail.com

The report presents results on the solvability of boundary value problems for pseudohyperbolic equations

$$u_{tt} - a \triangle u_{tt} - b \triangle u = f(t,x),$$

with integral conditions,

$$u(0,x) = u_x(0,x) = 0, \int_0^T N(t)u(t,x)dt = 0, \int_0^T R(t)u(t,x)dt = 0.$$

where $N(t), R(t)$ are given functions and $a, b \in \mathbb{R}$.

Here, t belongs to a domain Ω in the space $\mathbb{R}^n$. For the problems under consideration, theorems on the uniqueness and existence of regular solutions have been established; that is, solutions possessing all generalized derivatives in the sense of S.L. Sobolev that appear in the corresponding equation.

LITERATURE

1. Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной: Псевдогиперболические уравнения. 1998. С. 108–121.
2. А.А. Алсыкова. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска. Математические заметки СВФУ, 23:1 (2016), 3–11.
3. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешчнные задачи, А.И. Кожанов. Новосибирск: Наука, 2024. 96 с. ISBN 978-5- 02-041543-0.
4. Т.К. Юлдашев. Об одной нелокальной задаче для неоднородного интегро–дифференциальных уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.Физ.-матем. науки, 159, 1, 2017, 88–99.

Global solvability of a kernel determination problem in 2D heat equation with memory

Nuriddinov J.Z.[1], Ochilova Z.Sh.[2]

[1]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[2]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan; j.zafarovich@mail.ru,

The integro–differential equations with an integral term of convolution type are used in the mathematical modeling of biological phenomena and engineering sciences in which it is necessary to take into consideration the effect of real nature of problems with the history of the processes. In these integro-differential equations the convolution kernel accounts for memory influences as usual. The key point when considering memory effects is that the kernel cannot be considered a known function because there is no way to measure it directly. We can reconstruct this kernel by additional measurements of the physical field taken on a suitable subset of the body. Thus, we have to solve the inverse problem.

The kernel determination problems in heat conduction equations, one-dimensional problems are most encountered, i.e. the problems of memory kernel determining depending only on time variable. For example, in [1]-[3] (see also the references in these articles) these problems were investigated based on a fixed point argument and derived the local/global in time existence and uniqueness of inverse problems. The numerical solutions for this problems were considered in the works [1], [2] and efficient computational algorithms were constructed.

In the present paper, we study the inverse problems about determining the kernels of an integral convolution-type term in the integro-differential heat equation according to the solution of the initial-boundary value problem in a rectangular domain given on the boundary $y = 0$ for this equation. Unlike existing works, here the unknown kernel depends on both time and spatial coordinates.

Consider the problem of determining the functions $u(x, y, t)$ and $k(x, t)$ from the following equations:

$$u_t - \Delta u = \int_0^t k(x, t-\tau)u(x, y, \tau)d\tau + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D_T, \tag{1}$$

$$u\mid_{t=0} = \varphi(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u_x\mid_{x=0} = u_x\mid_{x=1} = 0,\ u_y\mid_{y=0} = u_y\mid_{y=1} = 0,\ (x, y) \in \partial D \times [0, T], \tag{3}$$

$$u\mid_{y=0} = h(x, t),\ (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \tag{4}$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the Laplace operator, $D_T = D \times (0, T]$, $D = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$, $T > 0$ is an arbitrary fixed number.

In these works authors discussed the unique solvability for possed problem. Our main result of this work is following theorem:

Theorem 1. Assume that $\varphi(x,y) \in H^{l+4}(D)$, $|\varphi(x,0)| \geq \varphi_0 = const > 0$, $f(x,y,t) \in C^1\Big(H^{l+2}(D);[0,T]\Big)$, $h(x,t) \in C^2\Big(H^{l+2}([0,1]);[0,T]\Big)$. In addition, all the above matching conditions with respect to the specified functions are met. Then for any fixed $T > 0$, there exists a unique solution of inverse problem (1)-(4), belonging to the class $k(x,t) \in C\Big(H^l([0,1]);[0,T]\Big)$.

References

1. D.K. Durdiev, Z.Z.Nuriddinov, Uniqueness of the Kernel Determination Problem in a Integro-Differential Parabolic Equation with Variable Coefficients, Russian Mathematics, 67, 2023, 11, pp. 1-11.
2. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov , N.N. Ural'tseva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Moscow: Nauka, 1967.
3. D.K. Durdiev, Z.Z.Nuriddinov, Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation, Journal of Siberian Federal University – Mathematics and Physics, 14, 2021, no 1, стр. 117-127.

The inverse problem of the source for the equation of forced vibrations of beams

Odinayev R.R.
Bukhara State University, Bukhara , Uzbekistan.
odinayevrashid@mail.ru.

We consider the following equation,

$$u_{tt} + u_{xxxx} = p(x)q(t), \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

in the domain $D := \{(x,t);\ 0 < x < 1, \ \ 0 < t \leq T\}$ with initial conditions

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where $k \geq 2$ fixed natural number

In the direct problem, it is required to find a function $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,k}_{x,t}(\overline{D})$ satisfying equalities (1)–(3) for given number T and sufficiently smooth functions $p(x), q(t), \varphi(x)$ and $\psi(x)$.

In the inverse problem, it is required to find the function $q(t)$, if the following additional information is known about the solution to the direct problem (1)–(3) :

$$g(t) = \int_0^1 u(x,t)h(x)\,dx, \tag{4}$$

where the functions $g(t)$, $h(x)$ are given and the function $h(x)$ satisfies the conditions

$$h(x) \in C^4[0,1], \ \ h(0) = h(1) = h''(0) = h''(1) = 0. \tag{5}$$

In this paper, the direct and inverse problems for $k \geq 2$ are considered.

Theorem. *Let $g(t) \in C^{k-1}[0,T]$, $(p(x), h(x)) \neq 0$ and $(p(x), h^{(4)}(x)) \neq 0$. Then there exists a unique solution to the inverse problem (1)–(5) from $q(t) \in C^{k-1}[0,T]$* . Here $(.,.)$ scalar product in $L_2(0,1)$

LITERATURE

1. Dudiev U.D., Odinayev R.R. The inverse problem of determining the right-hand side of a fourth-order differential equation Uzbek Mathematical Journal, 69:3, 64-72; 2025. DOI: 10.29229/uzmj.2025-3-6
2. Durdiev D.K., Turdiev H.H. Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type over-determination conditions, Methods in the Applied Sciences, 47:6, 5329–5340 2024.

Moore-Gibson-Thompson tenglamasi uchun aralash masala

Oltiboeva D.O., Mirzoyeva S.O., Rashidova M.R.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston;

Ushbu

$$u_{ttt}+u_{tt}-u_{xxt}-u_{xx}+\int\limits_0^t g(t-\tau)u(x,\tau)d\tau=0,\quad (x,t)\in\Omega_t, \tag{1}$$

Moore-Gibson-Thompson tenglamasini[1]

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}u(x,0)=\psi_i(x),\ \ i=0,1,2,\ \ x\in[0,1] \tag{2}$$

boshlang‘ich va

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ \ t\in[0,T] \tag{3}$$

chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraylik, bunda $T-$ biror musbat son va $\Omega_T:=\{(x,t): 0<x<1, 0<t\leq T\}$.

Ta’rif. (1)-(3) masalaning $u(x,t)\in C^{2,3}_{x,t}(\Omega_t)\cap C^{2,3}_{x,t}(\overline{\Omega}_t)$ funksional sinfga tegishli yechimini topish masalasiga to‘g‘ri masala deyiladi. Bunda $\psi_i(x),\ i=0,1,2$ va $g(t)$ lar ma’lum funksiyalar.

Foydalanilgan adabiyot

1. B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, R. Marchand, Well-posedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, Control and Cybernetics, (2011), V. 40, pp. 971988.

On a Boundary Value Problem for the Holmgren Equation with Singular Coefficients In a Half-Plane

Ruziev M. Kh.[1], Kazakbaeva K. B.[2]

[1,2] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

[1]ruzievmkh@gmail.com, [2]qalligul96@gmail.com

Consider the following equation

$$y^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha_0}{y^{1-m/2}}u_x+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, \tag{1}$$

where m, α_0 and β_0 are some real numbers satisfying the conditions $m>0$, $|\alpha_0|<\frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2}<\beta_0<1$ in the half-plane $\Omega=\left\{(x,y):-\infty<x<\infty, y>0\right\}$.

We introduce the following notation: $J=\{(x,y):0<x<1, y=0\}$, $J_1=\{(x,y):-\infty<x<0, y=0\}$, $J_2=\{(x,y):1<x<\infty, y=0\}$.

In domain Ω we study the following non-local boundary value problem.

Problem A. It is required to find a function $u=u(x,y)$ that satisfies the following conditions:
1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, where $\bar{\Omega}=\big\{(x,y):-\infty<x<\infty, y\geq 0\big\}$;
2) $u(x,y)$ satisfies the boundary conditions:

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x,y)=\varphi_i(x) \quad \forall x\in J_i, \quad i=1,2, \tag{2}$$

$$a_0(x)\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x,y)+\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}u(x,0)+a_{n+1}(x)u(x,0)=\Psi(x) \quad \forall x\in J; \tag{3}$$

3) the following relation hold

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y)=0, \tag{4}$$

where $R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y\geq 0$;
4) $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x,y)$ at $x=0$ can become infinity of order lower than $1-2\delta$, and at $x=1$ is bounded, where $\delta=\frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

In the boundary conditions (2)–(3), $a_0(x)$, $a_j(x)$ $(j=1,\dots n)$, $a_{n+1}(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\Psi(x)$ are given functions, and $a_0(x)$, $a_j(x)$ $(j=1,\dots n)$, $a_{n+1}(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J)$, $\Psi(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^2(J)$,

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in \bar{J}.$$

The function $\varphi_1(x)\in C(J_1)$ can tend to an infinity of order less than $1-2\delta$ at $x=0$, and the function $\varphi_2(x)\in C(J_2)$ is bounded at $x=1$, and for sufficiently large $|x|$, satisfy the inequality $|\varphi_i(x)|\leq M|x|^{-1-\sigma}$, where σ, $M=\text{const}$, $\sigma>0$.

Here

$$D_{0x}^{\alpha_j}f=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-\alpha_j)}\int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\alpha_j}}, & \alpha_j<0,\\ \frac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha_j-1}f, & \alpha_j>0\end{cases}$$

are the operators of fractional integration of order α_j for $\alpha_j<0$ and fractional differentiation of order α_j for $\alpha_j>0$, $\big|\alpha_j\big|<1$, $\Gamma\big(x\big)$ is the Euler's gamma function [1].

Theorem 1. Let the following conditions be satisfied:

$$a_0(x)\neq 0, \quad \frac{a_{n+1}(x)}{a_0(x)}\leq 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a_j(x)}{a_0(x)}\right]\geq 0, \quad \frac{a_j(1)}{a_0(1)}\leq 0, \quad j=1,\dots,n,$$

Then, if a solution to Problem A exists, it is unique.

The uniqueness of Problem A is proved by the method of energy integral [2].

Theorem 2. Let conditions a) $\alpha=\max\limits_{(1\leq j\leq n)}\{\alpha_j\}<\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$; b) $\alpha=\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$ be fulfilled. Then a solution to Problem A exists.

For $\alpha=\max\limits_{1\leq j\leq n}\{\alpha_j\}<\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$, Problem A is equivalently reduced to the Fredholm's integral equation of the second kind. In the case $\alpha=\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$ solving Problem A is equivalent to solving the singular integral equation with a Cauchy-type kernel [3].

LITERATURE

1. G. Bateman, A.Erdelyi. Vysshie transtsendentnye funktsii. Moscow: Nauka, 1974.
2. M.A. Usanetashvili. On a problem with an oblique fractional derivative for the Holmgren equation, Differ. Uravn., 18:1 (1982), 144–152
3. N.I. Mushelishvili. Singulyarnie Integralnie Uravneniya. Moscow: Fiziko-Matematicheskaya Literatura, 1962.

On the solvability of the Cauchy problem for the Biharmonic equation

Sharipova S.A.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail: sharipovasalibkhan@mail.ru

The main monograph for ill-posed boundary value problems for the biharmonic equation may be considered [1]. In it three essentially ill-posed internal boundary value problems for the biharmonic equation and the Cauchy problem for the abstract biharmonic equation was studied.

In [2]-[4], they considered solvability conditions of the Cauchy problem for the elliptic equation. Existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. Set

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : |x| < \pi, \ 0 < y < h\}.$$

Consider the following eqaution in Ω

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \ + \ 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \ + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \ = \ 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u(x, 0) = \phi(x), \ u_y(x, 0) = u_{yy}(x, 0) = u_{yyy}(x, 0) = 0. \tag{2}$$

where $\phi(x)$ is a $2\pi-$periodic function and belongs to the $L_2[-\pi, \pi]$.

The solution of the problem (1)-(2) is the function $u \in C^4(\Omega)$, which satisfies in the domain Ω equation (1), and satisfies the boundary conditions (2) in the following sense:

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x, y) - \phi(x)|^2 \, dx \ = \ 0, \tag{3}$$

and

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^m u}{\partial y^m}(x, y) - 0 \right|^2 \, dx \ = \ 0, \ m = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Problem A. *For a given function $\phi \in L_2[-\pi, \pi]$, find the values on the upper border of Ω of the solution $u(x, y)$ to the problem (1)-(2).*

The solution of the problem A is the function $\chi \in L_2(\partial\Omega)$ satisfying the condition

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x, h - \epsilon) - \chi(x)|^2 \, dx \ = \ 0. \tag{5}$$

We are looking for the solution of the problem (1)-(2) in the following form

$$u(x, y) = v(y)e^{ikx}.$$

Denote by A_σ the set of functions $f(z)$ which are holomorphic on the stripe

$$S_\sigma \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;:\; |\mathrm{Im}\, z| < \sigma\}, \tag{6}$$

and satisfy conditions:

$$f(z + 2\pi) = f(z), \quad z = x + iy \in S_\sigma, \tag{7}$$

and

$$\|f\|_\sigma^2 \;=\; \sup_{|y|\le\sigma} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x + iy)|^2 \, dx \;<\; +\infty. \tag{8}$$

Consider the Fourier series

$$f(x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}. \tag{9}$$

Theorem 1. *For any function $f \in A_\sigma$ the following inequalities*

$$\frac{1}{4\pi}\|f\|_\sigma^2 \;\le\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \cosh 2\sigma k \;\le\; \frac{1}{2\pi}\|f\|_\sigma^2 \tag{10}$$

are valid. (see [4])

The following statements are true.

Theorem 2. *Let the function ϕ belong to class A_σ for some $\sigma > h$. Then the solution of the problem A exists and is unique.*

Lemma 1. *Let the function ϕ belongs to class A_σ . Then the function $u(x, y)$ belongs to $C^4\left([-\pi, \pi] \times [0, \sigma)\right)$.*

Lemma 2. *Let ϕ belongs to class A_σ for some $\sigma > h$. Then for each $y \in [0,\ h]$ the function $u(x, y)$ belongs to $L_2[-\pi, \pi]$ and*

$$\lim_{y\to h} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|u(x, y) - u(x, h)\right|^2 dx \;=\; 0.$$

LITERATURE

1. M. A. Atakhodzhaev, Ill-posed internal boundary value problems for the biharmonic equation, Inverse and Ill-Posed Problems Series 35, De Gruyter, 2002.
2. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, Determination of temperature at the outer boundary of a body, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 2, August, 2023, pp.159-171.
3. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the determining of the stationar temperature in the unbounded stripe, Differential equations, Vol. 0, No. 8, 2024, pp.1049-1062.
4. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the solvability of the Cauchy Problem for Laplace equation, Uzbek Mathematical Journal, 2022, Volume 66, Issue 3, pp.5-14.

Ill-posed problems and their applications in modern science and engineering

Sheikhaleslami Z.[1], **Juraev D. A.**[2,3]
University of Tabriz, Tabriz, Iran
zahra.sheikhaleslami@gmail.com
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan; juraevdavron12@gmail.com
Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan; juraevdavron12@gmail.com

In classical mathematical analysis, a problem is considered *well-posed* in the sense of Hadamard if it satisfies three criteria: a solution exists, the solution is unique, and the solution depends continuously on the data. However, many real-world problems-especially those involving inverse modeling, image processing, or parameter estimation-fail to meet these criteria. Such problems are termed *ill-posed*. Rather than discarding these problems, scientists have developed techniques to regularize or stabilize them. Ill-posed problems are not only ubiquitous but also fundamental in fields ranging from geophysics to medicine. Understanding and solving them is essential for the advancement of both theoretical and applied sciences. Ill-posed problems have been a central topic of study since the pioneering work of Tikhonov and Arsenin, who introduced foundational concepts in regularization theory and emphasized the need for stabilizing ill-posed formulations in applied mathematics [1]. Their ideas were significantly extended by Engl, Hanke, and Neubauer through comprehensive analysis and the development of numerical methods suited to inverse problems [2]. Groetsch further contributed by bridging the gap between theoretical formulations and real-world applications, especially in the mathematical sciences [3]. Building on this groundwork, recent studies by Juraev and Gasimov have addressed the regularization of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in bounded multidimensional domains, offering robust techniques for dealing with instability in elliptic-type problems [4]. Additionally, Juraev has extended these results to unbounded spatial domains, demonstrating the broad applicability of regularized inverse methods in higher-dimensional settings [5].

A typical example of an ill-posed problem is the inverse heat conduction problem, where one seeks to determine the initial temperature distribution from later temperature measurements. Another is medical image reconstruction, such as computed tomography (CT), where internal body structures are inferred from projections.

Other prominent examples include:

1. Inverse scattering in quantum mechanics.
2. Deconvolution in signal processing.
3. Backward parabolic equations in mathematical physics.
4. Identification of material properties in elasticity.

In all these cases, small errors in the input data can lead to large deviations in the output unless special techniques are employed. To manage ill-posedness, the most commonly used approach is *regularization*, which involves replacing the original problem with a nearby well-posed one whose solution approximates that of the original.

Among the most widely used methods are:

1. Tikhonov Regularization: Adds a penalty term to stabilize the solution.

2. Truncated Singular Value Decomposition (TSVD): Limits the influence of small singular values.

3. Iterative Methods: Such as Landweber iteration and conjugate gradient methods adapted for inverse problems.

Selection of appropriate regularization parameters is critical and can be guided by methods such as the L-curve, cross-validation, or discrepancy principles.

Ill-posed problems have become a central focus in the following areas:

1. Geophysics: Determining subsurface structures using surface data.
2. Medical Imaging: MRI and CT scan data reconstruction.
3. Astronomy: Restoration of blurred astronomical images.
4. Machine Learning: Regularization in neural networks and regression models.
5. Non-destructive Testing: Identifying flaws in materials using surface wave analysis.

Advancements in computational power and algorithmic development have allowed scientists to solve large-scale ill-posed problems with increasing precision and reliability. Ill-posed problems, once viewed as an obstacle in mathematical modeling, are now integral to solving some of the most pressing and complex questions in science and technology. Through the development of sophisticated regularization techniques and computational algorithms, it has become possible to extract meaningful solutions from unstable data. Continued interdisciplinary research is crucial to extend these tools and address the challenges of increasingly complex systems.

Ill-posed problems, once seen as theoretical anomalies, have become essential tools in the modeling and solution of real-world scientific and technological challenges. Their presence in areas such as geophysics, medical imaging, and inverse heat conduction underscores their practical significance. With the development of regularization methods and computational algorithms, researchers can now obtain stable and meaningful solutions even from incomplete or noisy data. The works of classical scholars like Tikhonov and modern contributors like Juraev have collectively shaped a mature and dynamic field. Continued research in this area promises to advance both the theoretical understanding and practical applications of inverse and ill-posed problems across diverse disciplines.

LITERATURE

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-posed Problems. V.H. Winston, Washington, D.C., 1977.
2. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic Publishers, 1996.
3. Groetsch C.W. Inverse Problems in the Mathematical Sciences. Vieweg, 1993.
4. Juraev D.A., Gasimov Y.S. On the regularization Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2022 . Vol . 12, No. 1. P. 142–161.
5. Juraev D.A. On the solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional spatial domain. Global and Stochastic Analysis. 2022. Vol . 9, No. 2. P. 1–17.

The inverse problem for a fractional-order diffusion equation with involution involves several types of loads

Sobirjonov A. Q.

Alfraganus University, Tashkent Uzbekistan; avazbeksobirjonov1998@gmail.com

In this work, we consider an inverse problem for a fractional order heat equation with involution. We seek formal solution to this problem in a form of series expansions using orthogonal basis obtained by separation of variables and we also examine the convergence of the obtained series solution.

Definition 1. [1] The fractional derivatives ${}_C D^{\alpha}_{at} u$ of order $0 < \alpha < 1$ on $[a, b]$ defined as

$$ {}_C D^{\alpha}_{at} u(t) = D^{\alpha}_{at}[u(t) - u(a)] $$

is called the left-sided Caputo fractional derivatives of order α , where

$$D_{at}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}u(s)ds,\quad 0<\alpha<1.$$

Let us introduce the following operators:

$$A_1[u]=b_1u(x,t_0)+b_2u(\pi-x,t_0)+c_1u_{xx}(x,t_0)+c_2u_{xx}(\pi-x,t_0),$$

$$A_2[u]=d_1\int\limits_0^{t_0}u(x,s)ds+d_2\int\limits_0^{t_0}u(\pi-x,s)ds$$

$$+p_1\int\limits_0^{t_0}u_{xx}(x,s)ds+p_2\int\limits_0^{t_0}u_{xx}(\pi-x,s)ds,$$

$$A_3[u]=q_1u_t(x,t_0)+q_2u_t(\pi-x,t_0),$$

where $b_i,c_i,d_i,p_i,q_i\ \ (i=1,2)$ are real numbers.

The problem under investigation is formulated for the equation

$${}_CD_{0t}^{\alpha}u(x,t)-a_1u_{xx}(x,t)+a_2u_{xx}(\pi-x,t)+A_1[u]+A_2[u]+A_3[u]=$$

$$=f(x),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

where, ${}_CD_{0t}^{\alpha}$ is Caputo derivative, α, a_i, $(i=1,2)$ are nonzero real numbers such that, $0<\alpha\le 1$, $a_1>0$, $a_1\pm a_2>0$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega=\{0<x<\pi,0<t<T\}$, t_0 is any fixed number, and that $t_0\in(0,T)$.

The above equation with $b_i,c_i,d_i,p_i,q_i=0$, $(i=1,2)$ and $\alpha=1$ was studied in [3]. Moreover, in recent years, the study of equations with involution has attracted considerable interest among mathematicians. In particular, when the domain under consideration is a ball, the paper [5] by B. Turmetov et al. can be cited as an example of recent work on equations with involution. Our aim is to find a regular solution to the following inverse problem.

Problem IP_D**:** Find a pair of functions $\{u(x,t),\ f(x)\}$ in the domain Ω satisfying equation (1) and the conditions

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(x,T)=\psi(x),\quad x\in[0,\pi] \tag{2}$$

and the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given, sufficiently smooth functions.

The novelty of the stated problem mainly lies in the part loaded with respect to the time variable, and it is investigated under various types of loads. A problem close to this work was also studied in [2],[4].

Under certain conditions for the given functions, using Fourier series we prove uniqueness and existence of solution of the above formulated problem.

LITERATURE

1. A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations, NorthHolland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
2. A. K. Urinov, M.S.Azizov. A Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021 . Vol. 42, No. 3. P.621–631.
3. N. Al-Salti, M. Kirane, T.Berikbol. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation, arXiv:1612.01419v2 ,[math.AP] 2017
4. B.Turmetov, O.Abdullaev, A.Sobirjonov. On a class of inverse problems for a loaded diffusion equation fractional order with involution perturbation. Bulletin of the Institute of Mathematics.2025. Vol 8. 61-71. No. 1. P.61-71.
5. M.Koshanova, K.Nazarova, B.Turmetov,K.Usmanov. Solvability of Some Inverse Problems for a Pseudoparabolic Equation with Multiple Involution. Mathematics 2025, 13, 2587

The problem of determining the time function on the right-hand side of a hyperbolic equation with variable coefficient

Suyarov T.R.[1], **Aslonova Sh.S.**[2], **Mamatova N.H.**[3]
[1,2,3]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]tsuyarov007@gmail.com, [2]aslonovashohniso@gmail.com, n.h.mamatova@buxdu.uz [3]

In the domain $D := \{(t,x) : 0 < t \le T,\ 0 < x < l\}$, consider the initial-boundary value problem for a function $u(t,x)$, satisfying the equation [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(t,x), \tag{1}$$

with initial conditions

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(t,0) = u(t,\ell) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Assume that the following conditions are met for the coefficients of equation (1):

A1): $0 < p(x) \in C^2[0,\ell], \qquad 0 \le q(x) \in C^1[0,\ell]$,
and $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in (2) are given sufficiently smooth functions.

In the **direct problem**, we need to determine the function$u(t,x) \in C^{1,0}_{t,x}(\overline{D}) \cap C^2(D)$, which satisfies equations (1)-(3) for sufficiently smooth given functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(t,x)$, where $\overline{D} = \{(t,x) : 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \ell\}$.

In this work, we assume $F(t,x) = f(t)g(x)$ and investigate the following inverse problem [2]:

Inverse problem: Find $f(t) \in C[0,T]$, if with respect to the solution of the direct problem (1)-(3) an integral overdetermination condition is known:

$$\int_0^\ell g(x)u(t,x)dx = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $h(t)$ are given sufficiently smooth functions.

Theorem 1. *[Uniqueness Theorem] Assume that the coefficients $p(x)$ and $q(x)$ of equation (1) satisfy condition A1). Then the solution $u(t,x)$ of the initial-boundary value problem (1)-(3) in the class of functions $u(t,x) \in C^{1,0}_{t,x}(\overline{D}) \cap C^2(D)$ is unique.*

Theorem 2. *If conditions A1, and* $\varphi(x) \in C^3[0,l]$, $\varphi(0) = L(\varphi)(0) = \varphi(l) = L(\varphi)(l) = 0$, $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $F(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}[0,T]$, $F(t,0) = F(t,\ell) = 0$, *then a stable solution of problem (1)-(3) exists.*

Theorem 3. *Let the functions* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *and* $g(x)$ *satisfy the conditions of Theorem 2,* $g(x) \not\equiv 0$ *on* $(0,\ell)$, $h(t) \in C^2[0,T]$ *and the conditions*

$$\int_0^l \varphi(x)g(x)dx = h(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n,$$

$$\int_0^l \psi(x)g(x)dx = h'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\psi_n,$$

are fulfilled, then the inverse problem has a unique solution.

The stability of the solution of the inverse problem with respect to the given functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ is established by the following statement:

Theorem 4. *Let* $\{u(t,x),\, f(t)\}$ *and* $\left\{\tilde{u}(t,x),\, \tilde{f}(t)\right\}$ *be solutions of the problem (1)-(4) with data* $\{\varphi(x),\, \psi(x),\, h(t)\}$ *and* $\left\{\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\psi}(x), \tilde{h}(t)\right\}$, *respectively, and with the same functions* $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$. *Then the following stability estimates are valid:*

$$\left\|f - \tilde{f}\right\|_{C[0,T]} \leqslant M_1 \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^1[0,l]} + \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{C^1[0,l]} + \left\|h - \tilde{h}\right\|_{C^2[0,T]} \right),$$

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(\bar{D})} \leq M_2 \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^1[0,\ell]} + \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{C^1[0,l]} + \left\|h - \tilde{h}\right\|_{C^2[0,T]} \right),$$

where M_1 *and* M_2 *depend on the functions* $p(x), q(x), g(x)$.

LITERATURE

1. Petrovsky I.G. Lectures on partial differential equations. State Publishing House of Physics and Mathematics Literature, Moscow, Nauka, 1961.
2. K. B. Sabitov, A. R. Zainullov, Inverse problems for a two-dimensional heat equation with unknown right-hand side, Russian Math. (Iz. VUZ). 2021 Vol. 65. No. 3. P. 75–88.

Ikkinchi tartibli chiziqli yuklangan oddiy differensial tenglama uchun bir chegaraviy masala

Tillabaeva G.I.[1]**, Tillabaev B.Sh.**[2]
Farg‘ona davlat texnika universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
sobirjonovaguljahon1998@gmail.com
Farg‘ona davlat texnika universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
boburtillabayev@gmail.com

Bizga $[-1,1]$ kesmada quyidagi ikkinchi tartibli chiziqli yuklangan oddiy differensial tenglama berilgan bo’lsin:

$$\left[P(x)y'(x)\right]' + Q(x)y(x) = \sum_{j=1}^{n} y(x_j)f_j(x) + f_0(x), \qquad x \in (-1,1). \tag{1}$$

Faraz qilaylik, $P(x)$, $Q(x)$ va $f_j(x)$ $(j = \overline{0,n})$ berilgan uzluksiz funksiyalar bo’lib, $(-1,1)$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo’lsin. Shuningdek, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ berilgan haqiqiy sonlar bo’lib,

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1 \tag{2}$$

tengsizlik bajarilgan bo'lsin.

Masala. Tenglama (1) uchun quyidagi chegaraviy shartlar bajarilsin:

$$y(-1) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Yechish. Tenglama (1) va shartlar (2) ni qanoatlantiruvchi yechim quyidagicha yozilishi mumkin:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-1}^{1} G(x,s)\, y(x_j)\, f_j(s)\, ds \; + \; \widetilde{f}_0(x), \tag{3}$$

bu yerda $G(x,s)$ va (1), (2) masalaning Grin funksiyasi,

$$\widetilde{f}_0(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\, f_0(s)\, ds.$$

Agar $x = x_m$ $(m = \overline{1,n})$ desak, (3) dan quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$y(x_m) = \sum_{j=1}^{n} y(x_j) \int_{-1}^{1} G(x_m,s) f_j(s)\, ds \; + \; \widetilde{f}_0(x_m), \qquad m = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_{mj} = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-1}^{1} G(x_m,s) f_j(s)\, ds, & m \neq j, \\ \\ 1 - \displaystyle\int_{-1}^{1} G(x_m,s) f_m(s)\, ds, & m = j. \end{cases}$$

Shunda (4) tengliklar quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{mj}\, y(x_j) = \widetilde{f}_0(x_m), \qquad m = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Demak, (5) va $y(x_j)$ $(j = \overline{1,n})$ noma'lumlarga nisbatan n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.

Endi quyidagi holatlar mavjud:

1. Agar asosiy determinant $\Delta = \det \|A_{mj}\| \neq 0$ bo'lsa, unda sistema (5) yagona yechimga ega. Natijada $y(x_j)$ $(j = \overline{1,n})$ lar topilib, (3) orqali masalaning yagona yechimi aniqlanadi.

2. Agar $\Delta = 0$ va $\Delta_m = 0$ $(m = \overline{1,n})$, bu yerda Δ_m va Δ determinantida m-ustun elementlari $\widetilde{f}_0(x_m)$ lar bilan almashtirilgan bo'lsa, unda sistema (5) cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi. Bu holda $y(x_m)$ sifatida ixtiyoriy qiymatlarni olib, (3) formulaga qo'yib masalaning cheksiz ko'p yechimlarini topish mumkin.

3. Agar $\Delta = 0$ va biror $m = s$ uchun $\Delta_s \neq 0$ bo'lsa, unda sistema (5) yechimga ega emas. Demak, masala ham yechimga ega emas.

Shunday qilib, (1), (2) masala $\Delta \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga, $\Delta = 0$, $\Delta_m = 0$ $(m = \overline{1,n})$ holatda esa cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Boyquziev Q.B. Differensial tenglamalar. Toshkent: O'qituvchi, 1983. 192 bet.
2. Kurosh A.K. Kurs vysshey algebry. Moskva: Nauka, 1968. 732 s.

On the solvability of the inverse problem for the wave equation of memory type with acoustic boundary conditions

Totieva Zh.D.[1], Kinra K.[2], Mohan M.T.[3]

Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia;

Center for Mathematics and Applications (NovaMath), NOVA SST, Portugal;

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Roorkee-IIT Roorkee, Haridwar Highway, Roorkee, Uttarakhand 247667, INDIA ;

jannatuaeva@inbox.ru, kushkinra@gmail.com, maniltmohan@gmail.com

A wave equation of memory type with acoustic boundary conditions is presented:

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \int_0^t k(t-s)u_{xx}(x,s)\,ds = 0,\ (x,t) \in I \times (0,T)$$

$$u\big|_{x=0} \equiv 0, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$\left[u_x - \int_0^t k(t-s)u_x(x,s)\,ds\right]\Bigg|_{x=l} = y'(t), \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$u_t\big|_{x=l} = -py'(t) - qy(t), \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in I, \tag{5}$$

where $u(x,t)$ is the velocity potential; $k(t)$ is the memory kernel; $y(t)$ is the displacement at the boundary $x = l$; $T,\ p,\ q$ are fixed positive constants, and $I = (0,l) \subset \mathbb{R}$.

We assume that this extra information can be formulated as an integral overdetermination condition of the form:

$$\int_0^l (\varphi(x) - \beta\varphi''(x))u_x(x,t)dx = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

where $\varphi(x)$ is a prescribed function characterizing the sensing device used to detect the spatial derivative u_x, and $f(t)$, defined on $[0,T]$, represents the corresponding measurement data. Physically, φ may be interpreted as modeling a small internal sensor that captures the average velocity over a localized region of the domain, that is, over the support $I' := \operatorname{supp}(\varphi) \subset I$, which may be quite narrow. This formulation reflects the averaging nature of the measurement process.

If the function $k(t)$ is known, then the initial-boundary value problem (1)-(5) for determining $u(x,t)$ and $y(t)$ is called the **direct problem**. The **inverse problem** is to reconstruct $u(x,t),\ y(t)$ and $k(t)$ from the system (1)-(6).

A qualitative study of the direct problem (1)-(5) with $\beta = 0$ in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ with a C^2 boundary $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, was presented in [1]. Also for the case of $\beta = 0$, the result on local-in-time existence and uniqueness of the kernel determining problem (1)–(6) was obtained in [2]. In the monograph [3], it was noted that dispersive wave processes (when $k = 0$) are described by equation (1), which is the main motivation for this work. Equation (1) with $k = 0$ appears in elasticity theory to describe longitudinal waves in rods, water waves in the Boussinesq approximation for long waves, and waves in plasma. In some cases, the term u_{xxtt} can be replaced by u_{xxxx}. This depends on the dispersion relation. However, in order to describe wave processes in dispersive media more accurately, it is necessary to have an integral operator with a kernel k.

Below, we use the standard notation for Sobolev spaces [4]. It is assumed that:

(i1) $u_0(x), u_1(x) \in H^4(I), \varphi(x) \in H_0^3(I)$.
(i2) $\alpha^{-1} := \int_0^l \varphi'(x)u_0''(x)dx \neq 0$.
(i3) $g(t) \in H^2(0,T), f(t) \in H^4(0,T)$:
$y'(0) = u_0'(l),\ y''(0) = u_1'(l) - k(0)u_0'(l)$,
$k(0) = \alpha(f'''(0) - \int_0^l v_0(x)\varphi'''(x)dx)$,
$\int_0^l \varphi(x)u_0'(x)dx = -\int_0^l \varphi'(x)u_0(x)dx = f(0)$,
$\int_0^l \varphi(x)u_1'(x)dx = -\int_0^l \varphi'(x)u_1(x)dx = f'(0)$,
$\int_0^l \varphi(x)u_0''(x)dx = -\int_0^l \varphi'(x)u_0'(x)dx = f''(0)$.
$-\int_0^l \varphi'(x)[u_1''(x) - k(0)u_0''(x)]dx = f'''(0)$.

The theoretical significance of the study is to obtain the necessary and sufficient conditions for the local and global unique solvability of the one-dimensional inverse problem (1)-(6). It is more expedient to carry out the study of the solvability of the problem in terms of the functions $v := u_t + (py' + qy)\frac{x}{l}$.

Theorem 1[Local-in-time existence] *Suppose that assumptions* $(i1)$-$(i3)$ *are satisfied. Then, there exists* $\tau \in (0,T)$, *such that the inverse problem (1)–(6) possess a unique solution*

$$(v, k, y) \in H^3(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times H^1(0,\tau) \times H^3(0,\tau).$$

Theorem 2[Global-in-time uniqueness] *Let the assumptions* $(i1)$-$(i3)$ *hold. Then, if* $\tau \in (0,T]$, *and the inverse problem has two solutions*

$$v_j \in H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)),\ k_j \in H^1(0,\tau), y_j \in H^3(0,\tau),\ j \in 1,2,$$

then $(v_1, k_1, y_1) = (v_2, k_2, y_2)$.

Theorem 3[Global-in-time existence and uniqueness] *Let the assumptions* $(i1)$-$(i3)$ *hold and* $T > 0$. *Then the inverse problem has a unique solution*

$$(v, k, y) \in H^2(0,T; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times H^1(0,T) \times H^3(0,T).$$

LITERATURE

1. Park J. Y., Park S. H. Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions, Nonlinear Anal. 2011. Vol. 74, No 3. P. 993–998.
2. Totieva Z. D. and Durdiev D. K. Inverse problem for wave equation of memory type with acoustic boundary conditions, Eurasian Journal Of Mathematical and Computer Applications. 2024. Vol. 12, No. 3. P. 173–188.
3. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York: A Wiley-Interscience Publication, Wiley, 1999.
4. Evans L. C. Partial Differential Equations. Amer. Math. Soc., Grad. Stud. Math., vol. 19, Second Edition, Providence, RI, 2010. P. 749.

Asymptotic solution of a singularly perturbed boundary value problem with a singularity inside the domain

Tursunov D. A., Shakirov K. K.
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan;
dtursunov@ oshsu.kg; shakirov@oshsu.kg

We study the Dirichlet problem

$$\varepsilon\Delta u-((x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2)p(x_1,x_2)u=f(x_1,x_2,\varepsilon),\quad (x_1,x_2)\in D, \tag{1}$$

$$u(0,x_2,\varepsilon)=\varphi_0(x_2,\varepsilon),\ u(1,x_2,\varepsilon)=\varphi_1(x_2,\varepsilon),\ x_2\in[0,1], \tag{2}$$

$$u(x_1,0,\varepsilon)=\psi_0(x_1,\varepsilon),\ u(x_1,1,\varepsilon)=\psi_1(x_1,\varepsilon),\ x_1\in[0,1], \tag{3}$$

where $0<\varepsilon$ is a small parameter, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ is the Laplace operator, $(x_{10};x_{20})\in D$, $D=\{(x_1,x_2)|0<x_1<1;0<x_2<1\}$, $f(x_1,x_2,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x_1,x_2)\varepsilon^k$, p, $f_k\in C^\infty(\overline{D})$, $p>0$, $\varphi_0(0,\varepsilon)=\psi_0(0,\varepsilon)$, $\psi_0(1,\varepsilon)=\varphi_1(0,\varepsilon)$, $\psi_1(0,\varepsilon)=\varphi_0(1,\varepsilon)$, $\psi_1(1,\varepsilon)=\varphi_1(1,\varepsilon)$, $\psi_j(x_1,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_{j,k}(x_1)\varepsilon^k$, $\varphi_j(x_2,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_{j,k}(x_2)\varepsilon^k$, $\psi_{j,k}$, $\varphi_{j,k}\in C^\infty[0,1]$, $j=0,1$, $u=u(x_1,x_2,\varepsilon)$.

All asymptotic series in the sense of Poincare are given here.

The solution to problem (1)-(2) exists and is unique [1]. We are interested in the asymptotic behavior of the solution to problem (1)-(2) as $\varepsilon\to 0$.

The first singularity is obvious: the solution of the limiting equation as $\varepsilon=0$:

$$-((x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2)p(x_1,x_2)u(x_1,x_2,0)=f_0(x_1,x_2)$$

does not satisfy boundary conditions (2)-(3).

In order to show the second singularity, we consider the structure of the external expansion of solution to problem (1)-(3), which we seek as [2]

$$U(x_1,x_2,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x_1,x_2),\ \varepsilon\to 0. \tag{4}$$

Substituting (4) into (1) and equating the coefficients at the like powers of ε, we obtain, [3]:

$$U(x_1,x_2,\varepsilon)=\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\rho^2}\right)^k\widetilde{u}_k(x_1,x_2),$$

where $\rho=(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2$, $\widetilde{u}_k\in C^\infty(\overline{D})$.

We have proven the following theorem

Theorem As $\varepsilon\to 0$ the solution of boundary problem (1)-(3) has the asymptotic expansion:

$$u(x_1,x_2,\varepsilon)=V(x_1,x_2,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{4}Z_k+\sum_{k=1}^{4}\Pi_k+W(t_1,t_2,\lambda),$$

where

$$V(x_1,x_2,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x_1,x_2),\ v_k\in C^\infty(\overline{D});$$

$$Z_1 = Z_1(y_1, x_2, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_{1,k}(y_1, x_2),\ y_1 = x_1/\mu,\ \mu = \sqrt{\varepsilon},$$

$$Z_2 = Z_2(x_1, y_2, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_{2,k}(x_1, y_2),\ y_2 = x_2/\mu,$$

$$Z_3 = Z_3(y_3, x_2, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_{3,k}(y_3, x_2),\ y_3 = (1-x_1)/\mu,$$

$$Z_4 = Z_4(x_1, y_4, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_{4,k}(x_1, y_4),\ y_4 = (1-x_2)/\mu,$$

$$\Pi_1 = \Pi_1(y_1, y_2, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{1,k}(y_1, y_2),$$

$$\Pi_2 = \Pi_2(y_3, y_2, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{2,k}(y_3, y_2),$$

$$\Pi_3 = \Pi_3(y_3, y_4, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{3,k}(y_3, y_4),$$

$$\Pi_4 = \Pi_4(y_1, y_4, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{4,k}(y_1, y_4),$$

$$W(t_1, t_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(t_1, t_2),$$

$$t_1 = (x_1 - x_{10})/\lambda,\ t_2 = (x_2 - x_{20})/\lambda,\ \lambda = \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

$$\lim_{y_j\to\infty} z_{j,k} = 0,\ \forall x_j \in [0,1];\ \lim_{y_j\to\infty} \pi_{j,k} = 0,\ \lim_{t_1+t_2\to\infty} w_k = 0.$$

LITERATURE

1. D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Springer, Berlin, 1983.
2. A.M. IlЎin. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Nauka, Moscow (1989). Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992).
3. D. I. Uzunov (Ed.). Recent Studies in Perturbation Theory. InTech. (2017). doi: 10.5772/65624 (1. Perturbed Differential Equations with Singular Points).

Initial - boundary value problem for a degenerate higher even - order equation involving an integro-differential operator with Bessel function in the kernel

Usmonov D. A.[1]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
dusmonov909@gmail.com

In this paper, in the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ we consider the following degenerate higher even order equation

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) + bu(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^\alpha (1-x)^\beta \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right] = f(x,t), \tag{1}$$

where $T,\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma,\ b,\ n$ are given real numbers, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $1 < \delta < 2$, $n \in \mathbb{N}$, $u(x,t)$ - is an unknown function, $f(x,t)$- is a given function, ${}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t)$ - is an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel [1] of the function $u(x,t)$ with respect to the argument t:

$$
{}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int\limits_0^t (t-z)^{1-\delta}\, \bar{J}_{\frac{1-\delta}{2}}[\gamma(t-z)] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2\right) u(x,z)\, dz,
$$

$\Gamma(x)$ - is Euler's gamma - function, $\overline{J}_\nu(z)$ - is the Bessel Clifford function defined by $\overline{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$ - is Bessel function of the first kind of order ν.

Let us study the following initial-boundary value problem for equation (1).

Problem A. Find a function $u(x,t)$ with the following properties:

1) $\left(\partial^j/\partial x^j\right) u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^\alpha (1-x)^\beta \left(\partial^n/\partial x^n\right) u(x,t)\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0,n-1}$; $u_t(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\left(\partial^n/\partial x^n\right)\left[x^\alpha (1-x)^\beta \left(\partial^n/\partial x^n\right) u(x,t)\right] \in C(\Omega)$, ${}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) \in C(\Omega)$;

2) in the domain Ω satisfies equation (1)

3) On the boundary of the domain Ω, the following boundary and initial conditions are satisfied:

$$
\left.\begin{array}{c}
\left(\partial^j/\partial x^j\right) u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0,n-1}, \quad t \in [0,T]; \\
\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^\alpha (1-x)^\beta \left(\partial^n/\partial x^n\right) u(x,t)\right]\Big|_{x=1} = 0,\ j = \overline{0,n-1},\ t \in [0,T];
\end{array}\right\}
$$

$$
u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_t(x,0) = \varphi_2(x)\ x \in [0,1];
$$

where $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - is a given continuous functions.

References

1. Urinov A., Usmonov D. On the Cauchy problem for an ordinary differential equation containing integro differential operator with function Bessel in the kernel. Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, No 1, pp. 138-153.

Problem with integral condition for hyperbolic equation with singular coefficients

Usmonov D. A.[1], Jurayeva D. U.[2]

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; dusmonov909@gmail.com

Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan; diljora587@gmail.com

Let us denote by D the domain bounded by lines $t - x = 0$, $t + x = 1$ and $t = 0$. Let us consider the following hyperbolic equation with singular coefficient in the domain D:

$$
u_{tt}(x,t) + \frac{2\beta}{t} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \tag{1}
$$

where $u(x,t)$ -unknown function, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1/2$.

For this equation, we consider the following non-local problem:

Problem I_α. Find a function $u(x,t)$ with the following properties:

1) It satisfies equation (1) in the domain D;

2) $u(x,t) \in C\left(\overline{D}\right)$, $t^{2\beta} u_t(x,t) \in C\left(\overline{D}\right)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{xx}(x,t) \in C(D)$;

3) It satisfies the following conditions:

$$u\left(x,\,0\right)+\alpha\int\limits_0^x u\left(1-\xi,0\right)d\xi=\varphi\left(x\right),\ 0\leq x\leq 1, \tag{2}$$

$$\left[t^{2\beta}u_t\left(x,t\right)\right]_{t=0}=\nu\left(x\right),\ 0\leq x\leq 1,$$

where $\varphi\left(x\right),\ \nu\left(x\right)$ are given functions, α - is a given nonzero real number.

Theorem. If $\nu\left(x\right)\in C[0,1]\cap C^2\left(0,1\right)$, $\varphi\left(x\right)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $|\alpha|<1$, then the solution to the problem I_α exists and is unique, and it is represented as

$$u\left(x,t\right)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau\left(z\right)\left[y\left(1-y\right)\right]^{\beta-1}dy+\gamma_2 t^{1-2\beta}\int\limits_0^1\nu\left(z\right)\left[y\left(1-y\right)\right]^{-\beta}dy,$$

$$\tau\left(x\right)=\varphi(x)+\frac{\alpha[\cos\left(\alpha-\alpha x\right)-\sin\left(\alpha x\right)]}{\cos\alpha}\int\limits_0^1\sin\left(\alpha s\right)\varphi(s)ds-$$

$$-\frac{\alpha\cos\left(\alpha-\alpha x\right)}{\cos\alpha}\int\limits_x^1\sin\left(\alpha s\right)\varphi(s)ds+\frac{\alpha\sin\left(\alpha x\right)}{\cos\alpha}\int\limits_x^1\cos\left(\alpha-\alpha s\right)\varphi(s)ds-$$

$$-\frac{\alpha\sin\left(\alpha x\right)}{\cos\alpha}\int\limits_{1-x}^1\sin\left(\alpha s\right)\varphi(s)ds-\frac{\alpha\cos\left(\alpha-\alpha x\right)}{\cos\alpha}\int\limits_{1-x}^1\cos\left(\alpha-\alpha s\right)\varphi(s)ds,$$

is determined by the formulas, where $z=x+(2y-1)\,s$, $\gamma_1=\Gamma\left(2\beta\right)/\Gamma^2\left(\beta\right)$, $\gamma_2=\Gamma\left(1-2\beta\right)/\Gamma^2\left(1-\beta\right)$.

Qator manbali Liuvill tenglamasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida integrallash

Xasanov A. B.[1], Xudayorov U. O.[1]

[1] Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston.
ahasanov2002@mail.ru, ulugbekxudayorov@gmail.com

Ushbu ishda

$$q_{xt}=e^q+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k s_1(\pi,\lambda_k,t)(\psi_1^2(x,\lambda_k,t)-\psi_2^2(x,\lambda_k,t)),\quad x\in\mathbb{R},t>0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi qator manbali Liuvill tenglamasining

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(\mathbb{R})\\ q(x,t)|_{x=0}=q_1(t),q_1(t)\in\mathbb{C}^1(t>0)\cap C(t\geq 0),\\ |q_1(t)|\leq M,\quad M>0,\quad q_0(0)=q_1(0)\end{cases} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy cheksiz zonali hamda

$$q(x+\pi,t)=q(x,t)\in C^{1,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0) \tag{3}$$

silliqlik shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi qaralgan.
Bu yerda $\psi^{\pm}(x,\lambda,t) = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t), \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$, $\psi^{+}(x,\lambda_k,t) = \psi^{-}(x,\lambda_k,t) = \psi(x,\lambda_k,t)$ vektor-funksiya ushbu

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q'(x+\tau,t) \\ q'(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$x,\tau \in \mathbb{R}, t > 0$ Dirak tenglamalar sistemasining ($\tau = 0$) Floke yechimlari, $\beta_k, k \in \mathbb{Z}$ esa $\beta_k = O(k^{-2}), k \to \pm\infty$ asimptotikani qanoatlantiruvchi sonli ketma-ketlik.

(1)-(3) aralash masala yechimini (4) Dirak operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalalar usuli yordamida topamiz.
$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ vektor-funksiyalar orqali (4) tenglamaning $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ Рч $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi belgilab olamiz. Bular orqali tuzilgan $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,t) + s_2(\pi,\lambda,t)$ funksiyaga (4) operatorning Lyapunov funksiyasi deyiladi va u τ parametrga bog'liq emas. $\lambda_k(t), k \in \mathbb{Z}$ lar orqali (4) tenglamaga qo'yilgan davriy va yarimdavriy $(y_i(0,\tau,t) = \pm y(\pi,\tau,t), i = 1,2)$ chegaraviy masalaning xos qiymatlarini belgilasak, ular $\Delta(\lambda,t) \mp 2 = 0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi. $\xi_k(\tau,t), k \in \mathbb{Z}$ lar orqali esa (4) tenglamaga qo'yilgan Dirixle chegaraviy masalasining xos qiymatlarini belgilasak, ular $s_1(\pi,\lambda,t) = 0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi.

1-ta'rif. $\{\xi_k(\tau,t), \sigma_k(\tau,t) = sgn(s_2(\pi,\xi_k(\tau,t),t) - c_1(\pi,\xi_k(\tau,t),t)\}$ to'plamga (4) operatorning spektral parametrlari deyiladi.

2-ta'rif. $\{\lambda_k(t), \xi_k(\tau,t), \sigma_k(\tau,t) = sgn(s_2(\pi,\xi_k(\tau,t),t) - c_1(\pi,\xi_k(\tau,t),t)\}$ to'plamga (4) operatorning spektral berilganlari deyiladi.

Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teorema orqali bayon qilingan.

Теорема Agar $q_0(x)$ va $q_1(t)$ funksiyalar mos ravishda

$$q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$$

va

$$q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \quad |q_1(t)| \leq M, M > 0, q_1(0) = q_0(0)$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1)-(3) aralash masalaning

$$q(\tau,t) = q_1(t) + 2\int_0^{\tau} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t) h_k(\xi(s,t)) \right) ds,$$

$$\psi^{\pm}(\tau,\lambda,t) = c(\tau,\lambda,t) + \frac{s_2(\pi,\lambda,t) - c_1(\pi,\lambda,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda,t)} s(\tau,\lambda,t)$$

formulalar orqali aniqlangan yagona $\big(q(\tau,t), \psi_i(\tau,\lambda,t)\big), i = 1,2, \tau \in \mathbb{R}, t > 0$ cheksiz zonali global yechimi mavjud bo'ladi.
Bu yerda $\xi = \xi(\tau,t) = (...\xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), ...)$, $\sigma = \sigma(\tau,t) = (...\sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), ...)$, $\lambda = \lambda(t) = (...\lambda_{-1}(t), \lambda_1(t), ...)$ vektorlarning koordinatalari quyidagi Koshi masalasani qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial \lambda_n(t)}{\partial t} = 0, \;\; n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)), \;\; n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Bu yerda $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1, \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ - $L(\tau,0)$ operatorning spektral parametrlari, $h_n(\xi)$ Рч $g_n(\xi), \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, lar esa quyidagicha aniqlanadi:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{2\xi_n(\tau,t)} q(\tau,t) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau,t)\beta_k s_1(\pi,\lambda_k,\tau,t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}$$

Adabiyotlar

1. J. Liouville, Surle equation aux differences partielles $\frac{d^2 log\lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 18 (1853), 71–72.

2. A.B. Khasanov, Kh. N. Normurodov, U. O. Khudayorov Cauchy problem for the nonlinear Liouville equation in the class of periodic infinite-gap functions. Differ. Equ. 59:10 (2023), 1413–1426.

R^3 fazodagi muntazam ko'pyoqlik qirralarida quvish-qochish o'yini

Xolboyev A. G'.[1], Sodatova D.[2]

Nizomiy nomidagi O'MPU, Toshkent, O'zbekiston;
azamatholboyev@gmail.com, sodatovadilbar25@gmail.com

Bizga R^3 fazoda Γ chekli geometrik graf berilgan bo'lsin. Grafning qirralarida harakatlanadigan $P_1, P_2, ..., P_m$ nuqtalar harakatini boshqaradigan $\mathbf{P}$ quvuvchi va Q nuqtaning harakatini boshqaradigan Q qochuvchi ishtirokidagi o'yinni qaraylik.$P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t), Q(t) \in \Gamma, t \geq 0$ nuqtalarning traektoriyalari. $P_{10}, P_{20}, ..., P_{m0}, Q_0$ esa, nuqtalarning boshlang'ich vaziyatlari. $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m, \sigma$ o'yinchilarning maksimal tezliklari bo'lib, ular quyidagi munosabatni qanoatlantirsin $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq ... \leq \rho_m \leq \sigma = 1$.

O'yinda quvuvchining maqsadi qochuvchini tutish, qochuvchining maqsadi esa quvuvchiga tutilmaslik. Quvuvchi qochuvchini tutdi deyiladi agar biror chekli vaqtda biror quvuvchi nuqta qochuvchi bilan Γ grafning biror qirrasida (qirraning chetki nuqtalari ham kiradi) bo'lsa. Qochuvchi quvuvchiga tutilmadi deyiladi agar ixtiyoriy vaqtda ixtiyoriy quvuvchi nuqta bilan Γ grafning hech qaysi qirrasida bo'lmasa. Bu o'yinlar o'z navbatida quvish o'yini va qochish o'yini deb nomlanadi. O'yinchilarning maqsadi o'yinning boshlang'ich vaziyati va ular tanlaydigan strategiyalarga bog'liq bo'ladi. O'yinchilarning strategiyasi, quvish va qochish masalasi haqidagi asosiy ta'rif va tushunchalar [1], [3], [5], [6] ishlardagi kabi kiritiladi.

Aytaylik o'yinchilarning maksimal tezliklari $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = \sigma = 1$ va Γ grafning barcha qirralari uzunliklari 1 birlikga teng bo'lsin [1], [2], [6], [7].

Γ grafda qochuvchini tutadigan quvuvchilarning eng kam soni $N(\Gamma)$ bo'lsin.

U holda quyidagilar o'rinli:

agar $m \geq N(\Gamma)$ bo'lsa, o'yin $\mathbf{P}$ quvuvchi jamoa foydasiga hal bo'ladi;

agar $m < N(\Gamma)$ bo'lsa, o'yin Q qochuvchi foydasiga hal bo'ladi.

Aytaylik Γ graf R^3 fazodagi muntazam ko'pyoqning qirralaridan tashkil topgan graf bo'lsin: T – tetraedr, O – oktaedr, K – kub, I – ikosaedr va D – dodekaedr [4]. Bu graflarning qirralarida $\mathbf{P}$ va Q ishtirokidagi quvish-qochish o'yinini qaraylik T, O, K, I, D

graflarda o'yinchilarning maksimal tezliklari $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = \sigma = 1$ teng bo'lganda $N(T), N(O), N(K), N(I), N(D)$ sonlarni topaylik.

Teorema. $N(T) = N(O) = N(K) = N(D) = N(I) = 2$.

Adabiyotlar

1. Azamov A. A., Kuchkarov A. Sh., Holboyev A. G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. Automation and Remote Control, (78) 4, 2017. pp. 754-761.
2. Azamov A. A., Kuchkarov A. Sh., Holboyev A. G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II. Automation and Remote Control, (80) 1, 2019. pp. 164-170.
3. Bonato A., Nowakowski R. J. The game of cops and robbers on graphs. In Student Mathematical Library; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2011; Volume 61, p. 276.
4. Malkevitch J. Shaping space: a polyhedral approach. Senechal M., Flenk G. – Boston: Birkhauser, 1988. pp. 80–92.
5. Nowakowski R.J. Unsolved problems in combinatorial games. In Games of No Chance; Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA, 2019; Volume 5, pp. 125-168.
6. Азамов А.А., Ибойдуллаев Т.Т.Дифференциалная игра сближения-уклонения с медленными преследователями на графе рчбер симплекса. I Математическая теория игр и еҷ приложения 2020.-Т.12,є 4.-С.7-23.
7. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш.,Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на рчберном остове правильных многогранников. III Математическая теория игр и еҷ приложения 2020.-Т.11,є 4.-С.5-23.

Geometrik graflarda quvish-qochish o'yini

Xolboyev A. G'.[1], **Abdullayeva Sh. H.**[2]

Nizomiy nomidagi O'zMPU, Toshkent, O'zbekiston;
M. Ulug'bek nomidagi O'zMU, Toshkent, O'zbekiston;
azamatholboyev@gmail.com, shahnozabdullayeva2002@gmail.com

Ushbu ish chekli geometrik grafning qirralarini ketma-ket olishdan hosil bo'lgan yangi grafdagi quvish-qochish o'yinida qochuvchini tutadigan quvuvchilarning eng kam sonining o'zgarishiga oid masala qaralgan.

Bizga Γ – geometrik graf berilgan bo'lsin. Γ grafning qirralari to'plami $V(\Gamma)$ bo'lsin. Grafning qirralarida harakatlanadigan $P_1, P_2, ..., P_m$ nuqtalar harakatini boshqaradigan **P** quvuvchi va Q nuqtaning harakatini boshqaradigan Q qochuvchi ishtirokidagi o'yinni qaraylik. $P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t), Q(t) \in \Gamma, t \geq 0$ nuqtalarning trayektoriyalari. $P_{10}, P_{20}, ..., P_{m0}, Q_0$ esa, nuqtalarning boshlang'ich vaziyatlari. $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m, \sigma$ o'yinchilarning maksimal tezliklari bo'lib, ular quyidagi munosabatni qanoatlantirsin:

$$0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq ... \leq \rho_m \leq \sigma = 1.$$

O'yinda quvuvchining maqsadi qochuvchini tutish, qochuvchining maqsadi esa quvuvchiga tutilmaslik. Quvuvchi qochuvchini tutdi deyiladi, agar biror chekli vaqtda biror quvuvchi nuqta qochuvchi bilan ustma-ust tushan bo'lsa. Qochuvchi quvuvchiga tutilmadi deyiladi, agar ixtiyoriy vaqtda ixtiyoriy quvuvchi nuqta bilan ustma-ust tushmasa. Bu o'yinlar o'z navbatida quvish o'yini va qochish o'yini deb nomlanadi. O'yinchilarning maqsadi o'yinning boshlang'ich vaziyati va ular tanlaydigan strategiyalarga bog'liq bo'ladi.

O'yinchilarning strategiyasi, quvish va qochish masalasi haqidagi asosiy ta'rif va tushunchalar [1], [3], [5], [6] ishlardagi kabi kiritiladi.

Aytaylik, o'yinchilarning maksimal tezliklari $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = \sigma = 1$ va Γ grafning barcha qirralari uzunliklari 1 birlikga teng bo'lsin [1], [2], [6], [7].

Γ grafda qochuvchini tutadigan quvuvchilarning eng kam soni $N(\Gamma)$ bo'lsin.

U holda quyidagilar o'rinli:

agar $m \geq N(\Gamma)$ bo'lsa, o'yin **P** quvuvchi jamoa foydasiga hal bo'ladi;

agar $m < N(\Gamma)$ bo'lsa, o'yin Q qochuvchi foydasiga hal bo'ladi.

Grafning ixtiyoriy $v \in V(\Gamma)$ qirrasini olib yangi Γ_v graf hosil qilaylik va Γ_v grafda $N(\Gamma_v)$ sonni topaylik. $V(\Gamma)$ to'plamning har bir elementi uchun $N(\Gamma_v)$ mavjud. U holda quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Γ va Γ_v graflardagi quvish-qochish o'yini uchun $|N(\Gamma)-N(\Gamma_v)| \leq 1$ munosabat o'rinli bo'ladi.

LITERATURE

1. Azamov A. A., Kuchkarov A. Sh., Holboyev A. G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. Automation and Remote Control, (78) 4, 2017. pp. 754–761.
2. Azamov A. A., Kuchkarov A. Sh., Holboyev A. G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II. Automation and Remote Control, (80) 1, 2019. pp. 164–170.
3. Bonato A., Nowakowski R. J. The game of cops and robbers on graphs. In Student Mathematical Library; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2011; Volume 61, p. 276.
4. Malkevitch J. Shaping space: a polyhedral approach. Senechal M., Flenk G. – Boston: Birkhauser, 1988. pp. 80–92.
5. Nowakowski R.J. Unsolved problems in combinatorial games. In Games of No Chance; Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA, 2019; Volume 5, pp. 125–168.
6. Азамов А. А., Ибайдуллаев Т. Т. Дифференциальная игра сближения-уклонения с медленными преследователями на графе ребер симплекса. I. Математическая Теория Игр и ее Приложения, (12) 4, 2020. стр. 7-23.
7. Азамов А. А., Кучкаров, А. Ш., Холбоев А. Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников III. Математическая Теория Игр и ее Приложения, (11) 4, 2019. С. 5-23.

$(\omega, c)-$ periodic solution for a nonlinear impulsive system of fredholm functional-differential-integral equations

Yuldashev T. K.[1], Abduvahobov T. A.[2], Artykova Zh. A.[3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
[2]Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan
[3]Osh State University, Osh, Kyrgyzstan;
tursun.k.yuldashev@gmail.com, tohirjonabduvahopov2603@gmail.com, jartykova@oshsu.kg

Differential equations, the solution of which is functions with first kind discontinuities at times, are called differential equations with impulsive effects. One can see a lot of publications of studying differential equations with impulsive effects, describing many natural and practical processes [1-8]. Some problems with impulsive effects appear in biophysics at micro- and nanoscales. Today there is a huge interest in studying impulsive functional-differential equations.

A continuous function $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{X}$ is $(\omega,c)-$ periodic, if there exists a real number $c\in(0,1)\cup(1,\infty)$, that $f(t+\omega)=c\cdot f(t)$ for all $t\in\mathbb{R}$, where $0<\omega<\infty$, $\mathbb{X}\in\mathbb{R}^n$ is closed set.

On the interval $\Omega\equiv[0,\omega]\setminus\{t_i\}$ for $i=1,2,...,p$ we consider the questions of existence of the $(\omega,c)-$periodic solutions of nonlinear impulsive system of Fredholm functional-differential-integral equations with product of three nonlinear functions and mixed maxima

$$x'(t)=a\left(t,x(t)\right)\int_0^\omega l\left(s,x(s),\max\left\{x(\tau)\Big|\tau\in[s-h_1,s]\right\}\right)ds+$$

$$+r\left(t,x(t)\right)g\left(t,x(t)\right)f\left(t,x(t),\max\left\{x(\tau)\Big|\tau\in[t,\,t+h_2]\right\}\right),\tag{1}$$

where $0<h_\kappa=\text{const},\ \kappa=1,2,\ r,g\in C\big([0,\omega]\times\mathbb{X},\mathbb{R}^n\big),\ l,f\in C\big([0,\omega]\times\mathbb{X}\times\mathbb{X},\mathbb{R}^n\big)$, $\mathbb{X}$ is closed set in $\mathbb{R}^n$.

The functional-differential-integral equation (1) we study with $(\omega,c)-$periodic condition:

$$x(\omega)=c\cdot x(0),\quad c\in(0,1)\cup(1,\infty)\tag{2}$$

and

$$\left[\begin{array}{ll} x(\eta)=\varphi_0(\eta), & \varphi_0(\eta)\in C[-h_1,0],\\ x(\xi)=\varphi_1(\xi), & \varphi_1(\xi)\in C[\omega,\omega+h_2].\end{array}\right.\tag{3}$$

Hence, implies that $\varphi_1(\omega)=c\cdot\varphi_0(0)$. Consequently, the problem (1), (2) we study with nonlinear impulsive effects

$$x\left(t_i^+\right)-x\left(t_i^-\right)=F_i\left(x\left(t_i\right)\right),\qquad i=1,2,...,p,\tag{4}$$

where $0=t_0<t_1<...<t_p<t_{p+1}=\omega$, $x\left(t_i^+\right)$ and $x\left(t_i^-\right)$ right and left-hand side limits, $F_i(x)\in C(X,\mathrm{R}^n)$, $F_i=c\cdot F_{i+p},\ t_{i+p}=c\cdot\big(t_i+\omega\big)$.

We recall that by $C\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$ is denoted the Banach space with continuous vector functions $x(t)$ on the segment $[0,\omega]$ and this space is equipped with the norm

$$\|\,x(t)\,\|_{C[0,\omega]}=\sqrt{\sum_{j=1}^n\max_{0\le t\le\omega}|\,x_j(t)\,|}.$$

By $PC\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$ is denoted the following linear vector space

$$PC\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)=\big\{x:[0,\omega]\to\mathbb{R}^n;\ x(t)\in C\big(\big(t_i,t_{i+1}\big],\mathbb{R}^n\big),\ i=1,...,p\big\},$$

where limits $x\big(t_i^+\big)$ and $x\big(t_i^-\big)$ $(i=0,1,...,p)$ exist and bounded; $x\big(t_i^-\big)=x\big(t_i\big)$. Note, that the linear vector space $PC\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$ is Banach space, if we equip it with the norm

$$\|\,x(t)\,\|_{PC[0,\omega]}=\max\left\{\|\,x(t)\,\|_{C(t_i,t_{i+1}]},\ i=1,2,...,p\right\}.$$

We use also consider the vector space $BD\left([0,\omega],\mathbb{R}^n\right)$, which is Banach space with introducing the following norm

$$\|\,x(t)\,\|_{BD[0,\omega]}=\|\,x(t)\,\|_{PC[0,\omega]}+h\cdot\|\,x'(t)\,\|_{PC[0,\omega]},$$

where $0<h=\text{const}$.

So, existence and uniqueness of $(\omega,c)-$periodic solution of impulsive system of ordinary Fredholm functional-differential-integral equations with product of three nonlinear functions and mixed maxima are investigated. This problem is reduced to the investigation of solvability of the system of nonlinear functional-integral equations with product of three nonlinear functions. A technique has been developed for applying the method of successive approximations with respect to the product of three nonlinear functions in a complex system of functional-integral equations. The method of contracted mapping is used in the proof of unique solvability of nonlinear Fredholm functional-integral equations in the space $BD\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$. Obtained some estimates for the $(\omega,c)-$periodic solution of the studying problem.

LITERATURE

1. Bainov D. D., Simeonov P. S. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications. New York, NY, USA, Wiley, 1993.
2. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. New York, Hindawi Publishing Corporation, 2006.
3. Halanay A., Veksler D. Qualitative theory of impulsive systems. Moscow, Mir, 1971. (Russian)
4. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of impulsive differential equations. Singapore, World Scientific, 1989.
5. Perestyk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential equations with impulse effect: multivalued righthand sides with discontinuities. DeGruyter Stud. Vol. 40, Mathematics, Berlin, Walter de Gruter Co., 2011.
6. Samoilenko A. M., Perestyk N. A. Impulsive differential equations. Singapore, World Sci., 1995.
7. Stamova I., Stamov G. Impulsive biological models. In: Applied impulsive mathematical models, CMS Books in Mathematics, 2016, Springer, Cham.
8. Catlla J., Schaeffer D. G., Witelski Th. P., Monson E. E., Lin A. L. On spiking models for synaptic activity and impulsive differential equations. SIAM Review, 2008 Vol. 50 No. 3, P. 553–569 (2008).

Periodic solutions of impulsive systems of equations with a nonlinear function under the sign of a first-order differential and maxima

Yuldashev T. K.[1], Fayziyev A. K.[2], Tankeyea A. K.[3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
[2]Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
[3]K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan;
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com, fayziev.a@inbox.ru, aigerimtankeyeva@gmail.com

The theory of functional differential equations has applications in different sciences. Functional differential equations containing a nonlinear function under the derivative sign arise when solving problems of nonlinear mechanics and nonlinear optimal control. Of theoretical interest is the study of periodic solutions when the solutions of functional differential equations at given points have a discontinuity of the first kind. By today a lot of publications of studying on differential equations with impulsive effects, describing many natural and practical processes, are appeared [1-8].

In this paper the periodic solutions of impulsive systems of differential equations with a nonlinear function under the sign of the first-order differential and with maxima are investigated. The problem is reduced to a system of nonlinear functional integral equations in a Banach space. On the interval $[0,T]$ for $t \neq t_i,\ i=1,2,...,p$ the issues of existence and uniqueness of the solution of impulse systems of first-order differential equations are considered

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)+H(x(t))\right]=F\left(t,x(t),\max\left\{x(\tau)\middle|\tau\in[t-h,t]\right\}\right), \tag{1}$$

where $0=t_0<t_1<...<t_p<t_{p+1}=T,\ x\in\bar{\mathbb{X}},\ \bar{\mathbb{X}}$ is closed set in bounded space $\mathbb{R}^n$, $F(t,u,\vartheta)\in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\ H(u)\in C\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right),\ 0<h=\text{const}$. The function F is $T-$periodic, $V_{\kappa,i}=V_{\kappa,i+p},\ \kappa=1,2,\ t_{i+p}=t_i+T$.

The system (1) is studied under periodic conditions

$$x(0)=x(T),\ \ H(x(0))=H(x(T)), \tag{2}$$

$$x(\xi)=\varphi(\xi),\ \ \xi\in[-h,0^-] \tag{3}$$

and under conditions with given impulses

$$x\left(t_i^+\right)-x\left(t_i^-\right)=V_{1,i}\left(x\left(t_i\right)\right),\ \ i=1,2,...,p, \tag{4}$$

$$H\left(x\left(t_i^+\right)\right)-H\left(x\left(t_i^-\right)\right)=V_{2,i}\left(x\left(t_i\right)\right),\ \ i=1,2,...,p, \tag{5}$$

where $V_\kappa\in C\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\big),\ \kappa=1,2,\ x\left(t_i^+\right),\ x\left(t_i^-\right)$ are right and left-hand limits.

We use the Banach space $C\big([0,T],\mathbb{R}^n\big)$, which contains a $T-$periodic vector function $u(t)$, defined and continuous on the segment $[0,T]$, with the norm

$$\|\,u(t)\,\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\max_{0\le t\le T}|\,u_j(t)\,|}.$$

Let us also consider the following Banach space

$$PC\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)=\left\{u:[0,T]\to\mathbb{R}^n;\ u(t)\in C\left(\left(t_i,t_{i+1}\right],\mathbb{R}^n\right),\ i=1,...,p\right\},$$

in which $u\left(t_i^+\right)$ and $u\left(t_i^-\right)$ $(i=0,1,...,p)$ exist and are bounded, with norm

$$\|\,u(t)\,\|_{PC[0,T]}=\max\Big\{\|\,u(t)\,\|_{C[t_i,t_{i+1}]},\ \ i=1,2,...,p\Big\}.$$

Problem statement. Find a $T-$periodic function $x(t)\in PC\big([0,T],\mathbb{R}^n\big)$ that for all $t\in[0,T],\ t\neq t_i,\ \ i=1,2,...,p$ satisfies the given system (1), the periodic conditions (2) together with the condition (3) and for $t=t_i,\ i=1,2,...,p\ \big(0<t_1<t_2<...<t_p<T\big)$ satisfies the impulse conditions (4) and (5).

So, in this paper periodic solutions of impulsive systems of differential equations with a nonlinear function under the sign of the first-order differential and with maxima are investigated. The problem is reduced to a system of nonlinear functional integral equations in a Banach space. By the method of successive approximations in combination with the method of contracted mappings proves the existence and uniqueness of a periodic solution of nonlinear systems of functional integral equations with maxima. Practical calculation of periodic solutions of the system is reduced to calculating of the nonzero index of an isolated singular point, i.e., to calculating the rotation of homotopic vector fields on a compact.

LITERATURE

1. Bainov D. D., Simeonov P. S. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications. New York, NY, USA, Wiley, 1993.
2. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. New York, Hindawi Publishing Corporation, 2006.
3. Halanay A., Veksler D. Qualitative theory of impulsive systems. Moscow, Mir, 1971. (Russian)
4. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of impulsive differential equations. Singapore, World Scientific, 1989.
5. Perestyk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential equations with impulse effect: multivalued righthand sides with discontinuities. DeGruyter Stud. Vol. 40, Mathematics, Berlin, Walter de Gruter Co., 2011.
6. Samoilenko A. M., Perestyk N. A. Impulsive differential equations. Singapore, World Sci., 1995.
7. Stamova I., Stamov G. Impulsive biological models. In: Applied impulsive mathematical models, CMS Books in Mathematics, 2016, Springer, Cham.
8. Catlla J., Schaeffer D. G., Witelski Th. P., Monson E. E., Lin A. L. On spiking models for synaptic activity and impulsive differential equations. SIAM Review, 2008 Vol. 50 No. 3, P. 553–569 (2008).

Nonlinear inverse problem for a differential equations with square of the Hilfer type fractional pseudoparabolic operator

Yuldashev T. K.[1], Madatova Z. A.[2], Pirmatov A. Z.[3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent University of Information Technology, Tashkent, Uzbekistan;
[3]Osh State University, Osh, Kyrgyzstan;
tursun.k.yuldashev@gmail.com, zuhra_madatova@mail.ru, pirmatov@oshsu.kg

Fractional calculus we need in mathematical modeling of many applied problems (see, [1-5]). To study the solvability of fractional differential equations are devoted many publications (see, for example the works [6-11]).

In this work, we study an inverse boundary value problem for a linear partial differential equation with redefinition function at the end of the point of the given segment. The questions of the existence and uniqueness of a solution to an inverse boundary value problem are investigated. This work is further development of the work [12].

In the domain $\Omega \equiv (0,T)\times(0,l)\times(0,l)$ we consider the equation

$$\Bigg[D_{0t}^{\alpha,\gamma} - D_{0t}^{\alpha,\gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Bigg]^2 U(t,x,y) = F(t,x,y) \tag{1}$$

with boundary conditions

$$\lim_{t\to+0} I_{0t}^{1-\gamma}\, u(t,x,y) = \varphi_1(x,y)\,, \quad u(T,x,y) = \varphi_2(x,y), \tag{2}$$

$$u(t,0,y) = u(t,l,y) = u_{xx}(t,0,y) = u_{xx}(t,l,y) = u_{yy}(t,0,y) = u_{yy}(t,l,y) =$$
$$= u(t,x,0) = u(t,x,l) = u_{xx}(t,x,0)$$

$$= u_{xx}(t,x,l) = u_{yy}(t,x,0) = u_{yy}(t,x,l) = 0, \tag{3}$$

where $\varphi_\kappa(x,y) \in C\left(\Omega_l^2\right)$, $D_{0t}^{\alpha,\gamma} = I_{0t}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} I_{0t}^{1-\gamma}$ is Hilfer fractional operator, $0 < \alpha \le \gamma \le 1$, $F(t,x,y) \in C\left(\Omega_T \times \Omega_l^2\right)$, $\kappa = 1, 2$,

$$\varphi_\kappa(0,y) = \varphi_\kappa(l,y) = \varphi''_{xx,\kappa}(0,y) = \varphi''_{xx,\kappa}(l,y) = \varphi''_{yy,\kappa}(0,y) = \varphi''_{yy,\kappa}(l,y) =$$

$$= \varphi_\kappa(x,0) = \varphi_\kappa(x,l) = \varphi''_{xx,\kappa}(x,0)$$

$$= \varphi''_{xx,\kappa}(x,l) = \varphi''_{yy,\kappa}(x,0) = \varphi''_{yy,\kappa}(x,l) = 0,$$

$$F(t,0,y) = F(t,l,y) = F_{xx}(t,0,y)$$

$$= F_{xx}(t,l,y) = F_{yy}(t,0,y) = F_{yy}(t,l,y) =$$

$$= F(t,x,0) = F(t,x,l) = F_{xx}(t,x,0)$$

$$= F_{xx}(t,x,l) = F_{yy}(t,x,0) = F_{yy}(t,x,l) = 0,$$

$I_{0t}^{\alpha}\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\psi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$ is Riemann–Liouville integral operator, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l^2 = \Omega_l \times \Omega_l$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Problem 1. It is required to find a function $U(t,x,y)$, that satisfies the fractional differential equation (1), the two-point boundary value conditions (2), the Dirichlet type conditions (3) and belongs to the class of functions

$$\begin{array}{l} t^2 D^{\alpha,\gamma} U \in C(\overline{\Omega}), \quad t^2 D^{\alpha,\gamma} U_{xxxx} \in C(\Omega), \quad t^2 U_{xxxx} \in C(\Omega), \\ t^2 D^{\alpha,\gamma} U_{yyyy} \in C(\Omega), \quad t^2 U_{yyyy} \in C(\Omega), \end{array} \tag{4}$$

where $\bar{\Omega} \equiv \Omega_T \times \Omega_l^2$.

We suppose that in the conditions (2) the function $\varphi_2(x,y)$ is redefinition function and we study the following problem.

Problem 2. It is required to find a pair of functions $\left\{U(t,x,y),\ \varphi_2(x,y)\right\}$, that first of them satisfies the differential equation (1), the boundary value conditions (2), the Dirichlet type conditions (3) and belongs to the class (4). Moreover, to find the redefinition function $\varphi_2(x,y)$ is given the following additional condition in nonlinear form

$$U(\bar{t},x,y) = \psi(x,y)$$

$$+G\left(x, y, \int_0^T \int_0^l \int_0^l R(s,\eta,\xi,U(s,\eta,\xi))\,d\eta\, d\xi\, ds\right), \quad 0 < \bar{t} < T.$$

For the function $\psi(x,y)$ is fulfilled the conditions

$$\psi(0,y) = \psi(l,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi_{xx}(l,y) = \psi_{yy}(0,y) = \psi_{yy}(l,y) =$$

$$= \psi(x,0) = \psi(x,l) = \psi_{xx}(x,0) = \psi_{xx}(x,l) = \psi_{yy}(x,0) = \psi_{yy}(x,l) = 0.$$

LITERATURE

1. KabanikhiS I. N, Shishlenin M. A. Recovery of the time-dependent diffusion coefficient by known nonlocal data. Num. Anal. Appl. 2018; 11: 38–44.
2. Kostin A. B. The inverse problem of recovering the source in a parabolic equation under a condition of nonlocal observation. Sbornik Math. 2013; 204: 1391–1434.
3. Prilepko A. I., Tkachenko D. S. Well-posedness of the inverse source problem for parabolic systems. Differ. Equ. 2004; 40 (11): 1619–1626.

4. Romanov V. G. Phaseless inverse problems that use wave interference. Siberian Math. J. 2018; 59 (3): 494–504.
5. Yuldashev T. K. Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem. Lobachevskii J. Math. 2020; 41 (1): 124–136.
6. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag–Leffler Functions. Related Topics and Applications. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2014.
7. Handbook of Fractional Calculus with Applications in 8 volumes (ed. by J. A. Tenreiro Machado). Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2019.
8. D. Kumar, and D. Baleanu, Editorial: fractional calculus and its applications in physics. Frontiers of Physics 2019; 7 (6).
9. Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications. Fractional Calculus and Applied Analysis 2019; 22 (1): 27–59.
10. Abdullaev O. Kh., Salmanov O. Sh., Yuldashev T. K. Direct and inverse problems for a parabolichyperbolic equation involving Riemann–Liouville derivatives. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. — Mathematics 2023; 43 (1): 21–33.
11. Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation, Quaestiones Mathematicae 2017; 40 (2): 151–160.
12. Yuldashev T. K., Mamedov Kh. R., Kosmakova M. T., Matchanova A. A. Inverse problem for an inhomogeneous fractional equation with the quadrat of pseudoparabolic operator. J. Contemporary Appl. Math. 2025; 15 (2): 159–175.

Nonlinear optimal control problem for an ordinary functional-differential equations

Yuldashev T. K.[1], Molybaikyzy A.[2], Mamanov M. K.[3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan;
[3]Osh State University, Osh, Kyrgyzstan;
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com, altynaimolybai@gmail.com,
mamanovmuhametali@gmail.com

Let the input $u(t) = \sum_{i=1}^{n(t)} u_i(t) \in C[0,1]$ be a continuous function representing the number of students who have paid the tuition fee by time t. The output function $y(t) = \sum_{i=1}^{n(t)} y_i(t)$ is a function of income from contractual receipts at a given time t and is written as follows

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m(t)} p_{ij}(t)\, u_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n(t), \tag{1}$$

where $p_{ij}(t)$ is a continuous function on the interval $[0,1]$ showing the amount of money paid by students for tuition at time t, $m(t)$ is a positive integer function — the number of students studying in the i-th specialty. From equation (1) it is clear that if the number of students studying under a contract increases, then the income of the university also increases. Similarly, if the cost of a training contract increases, then the income of the given university also increases. Differentiating formula (1) with respect to time t, we find a function that denotes the speed of receipt of contractual amounts

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{m(t)} \dot{p}_{ij}(t)\, u_i(t) + \sum_{j=1}^{m(t)} p_{ij}(t)\, \dot{u}_i(t), \tag{2}$$

where $\dot{p}_{ij}(t)$ is a function showing the trends in the formation of the cost of education. We are interested in the case when $\dot{y}_i(t) > 0$, i.e. we are interested in the growth of income from contractual receipts for each certain period of time t. From equation (2) it is clear that this depends on the trend in the formation of the cost of contractual amounts $\dot{p}_{ij}(t)$ and the rate of increase in the number of students $\dot{u}_i(t)$ who paid a certain amount at time t. But, the dynamics of the formation of the cost of contractual amounts $\dot{p}_{ij}(t)$ is generally determined from the balance of supply and demand in the education market at time t. By demand we mean the degree of solvency of parents educating their children on a fee-paying basis. The growth rate of the number of students $\dot{u}_i(t)$ who paid a certain amount at time t is determined from the following relationship:

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t)\, z_i\left(t - \tau_i(t)\right), \tag{3}$$

where $z_i(t) \in C[0,1]$ is the investment function aimed at improving the quality of education, in particular, expanding the material and technical base of the university, $\alpha_i(t) \in C[0,1]$ is the coefficient-function of the efficiency of investment use, $\tau_i(t)$ is the time delay (lag), $0 < \alpha_i(t) < 1,\ 0 < \tau_i(t) < t$. The amount of investment $z_i(t)$ is part of the income $z_i(t) = q_i(t)\, y_i(t)$, where $q_i(t) \in C[0,1]$ is the share of profit in income, $0 < q_i(t) < 1$. In our work, the investment function $z(t)$ is monotonous increases. If the delay function $\tau(t)$ decreases, then there will be more investment and this contributes to the fact that the rate of growth of the number of students $\dot{u}_i(t)$ who have paid a certain amount by this time t becomes greater. If $\tau_i(t) = t$, then the investment process will stop $z_i(0) = 0$. Obviously, the delay $\tau_i(t)$ depends on the number of students who have paid for their education under the contract by the time t and on the speed of payment of the contract.

As stated above, the sum of investments $z_i(t)$ is a part of income

$$z_i(t) = q_i(t)\, y_i(t), \tag{4}$$

where $q_i(t)$ is the share of profit in income, $0 < q_i(t) < 1$. The value $q_i(t)$ characterizes the profitability of the economic process. Substituting representation (4) into equation (3), we obtain

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t)\, q_i(t - \tau(t))\, y_i(t - \tau(t)). \tag{5}$$

From formula (5) it follows that the value of the growth rate of the number of students $\dot{u}_i(t)$ who paid a certain amount at time t is interconnected with the value of the profitability of the educational process. The delay τ is characterized by the number of students who are unable to pay the contract amount by a given time t. Substituting equation (5) into equation (2), we obtain the following differential equation:

$$\dot{y}_i(t) = \beta_i(t)\, q_i(t - \tau(t))\, y_i(t - \tau(t)) + \sum_{j=1}^{m(t)} \dot{p}_{ij}(t)\, u_i(t), \tag{6}$$

where $\beta_i(t) = \sum_{j=1}^{m(t)} p_{ij}(t)\, \alpha_i(t)$. In equation (6) we take into account the external influence factor. This factor is primarily associated with government regulation of the educational process. If we do not take into account small and random external factors, then the differential equation (6) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= \beta_i(t)\, q_i(t - \tau(t))\, y_i(t - \tau(t)) \\ &+ \gamma_i(t)\, u_i(t) + f_i(t, y(t), u(t)),\ \ i = 1, 2, ..., n(t), \end{aligned} \tag{7}$$

where $\gamma_i(t) = \sum_{j=1}^{m(t)} \dot{p}_{ij}(t)$. The function $f_i(t, y, u) \in C\big([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ can greatly change the properties of the solutions of the differential equation (7).

Let the delay function be zero: $\tau_i = 0$. In this case, equation (7) holds:

$$\dot{y}_i(t) = \gamma_i(t)\, u_i(t) + \eta_i(t)\, y_i(t) + f_i(t, y(t), u(t)), \;\; i = 1, 2, ..., n(t), \tag{8}$$

where $\eta_i(t) = \sum_{j=1}^{m(t)} p_{ij}(t)\, \alpha_i(t)\, q_i(t)$.
Problem. Find such a control function

$$u_i^*(t) \in \Big\{ u_i^* : \,|\, u_i^*(t) \,|\, \leq M_{i0}, \; t \in [0,1] \Big\}$$

and the corresponding state $y_i^*(t)$ that provides a minimum for the functional:

$$J\,[u_i] = \int_0^1 \varepsilon(t)\, u_i^2(t) dt.$$

The Pontryagin maximum principle was applied and an optimality criterion was obtained. The input function and output function were determined by solving a system of three functional-integral equations.

Optimal control problem in inverse two-point boundary regime for a pseudoparabolic equation

Yuldashev T. K.[1]**, Rakhmonov F. D.**[2]**, Shermamatov Zh. Zh.**[3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Nizamii Tashkent State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan;
[3]Osh State University, Osh, Kyrgyzstan;
tursun.k.yuldashev@gmail.com, farxod-frd@bk.ru, jshermamatov@oshsu.kg

Optimal control theory is a vital and active branch of mathematical sciences, with numerous practical applications. Many real-world problems reduce to finding an optimal control function along with the corresponding state and redefinition functions. A wide range of analytical and numerical methods have been developed to effectively solve such problems in various disciplines of science and engineering (see, [1-12]).

In this study, we study an inverse optimal control problem for a pseudoparabolic equation involving a nonlinear control function in a two-point boundary condition. The control function depends on the time variable t, while the spatial domain is subject to Samarskii–Ionkin-type boundary conditions. We derive the necessary optimality conditions and solve the resulting equations to uniquely determine the control, redefinition, and state functions.

In the domain $\Omega \equiv (0,T) \times (0,1)$ we consider the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial\, t} + \frac{\partial^5}{\partial\, t\, \partial\, x^4} + \frac{\partial^4}{\partial\, x^4} \right) U(t,x) = b(t)\, g(x) + f(t,x) \tag{1}$$

with boundary value conditions

$$\alpha(t) U(0,x) + \omega \beta(t) U(T,x) = \delta\big(x - \eta(t)\big)\, \varphi(t,x,p(t)), \tag{2}$$

$$U(t,1) = 0, \quad U_{xx}(t,0) = 0, \tag{3}$$

$$U_x(t,0) = U_x(t,1), \quad U_{xxx}(t,0) = U_{xxx}(t,1), \;\; 0 \leq t \leq T \tag{4}$$

and additional condition

$$U(t_1, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \;\; 0 < t_1 < T,$$

where $\varphi(t,x,p(t))$ is nonlinear function depending from control function $p(t)$, $f(t,x)$ is given function, $g(x)$ is redefinition function, $\alpha(t)\neq 0$, $\beta(t)\neq 0$ are given real functions, ω is real nonzero parameter.

The function $\eta(t)\in C[0,T]$ describes the change in the position of a moving point source in the range from zero to 1 and is defined as the solution to the following Cauchy problem

$$\eta'(t)=\tau(t,\eta(t)),\ \ \eta(0)=\eta_0=\text{const},$$

where $\tau(t,\eta)\in C^{0,1}(\Omega)$.

We consider control function $p(t)\in\big\{p:\,|\,p(t)\,|\leq M^*,\ t\in[0,T],\ 0<M^*=\text{const}\big\}$ and following functional of quality

$$J[p]=\int\limits_0^1\left[U(T,y)-\xi(y)\right]^2dy+\gamma_1\int\limits_0^T p^2(t)dt+\gamma_2\int\limits_0^T\eta^2(t)dt, \tag{5}$$

where $0<\gamma_\kappa=\text{const}$, $\kappa=1,2$ and $\xi(x)$ is given continuous function.

Problem. We find a triple of functions $\big\{U(t,x),\,g(x),\,p(t)\big\}$, first of which satisfies the differential equation (1), the two-point boundary condition (2), the Samarskii–Ionkin type boundary conditions (3), (4), belongs to the class of functions

$$U\in C^{1,3}_{t,x}(\overline{\Omega}),\quad U_{txxxx}\in C(\Omega),\quad U_{xxxx}\in C(\Omega),$$

and the function $p(t)\in\big\{p:\,|\,p(t)\,|\leq M^*\big\}$ delivers a minimum to functional (5).

So, in this paper investigates an inverse optimal control problem for a pseudoparabolic equation governed by nonlinear control function in a two-point boundary condition. The differential equation is considered under Samarskii–Ionkin type boundary value conditions with respect to the spatial variable x. Necessary optimality conditions are derived, and the associated nonlinear functional equations are analyzed. Using the contraction mapping principle, the existence and uniqueness of the control function are established. Subsequently, the redefinition function and the state function are determined. The convergence of their respective Fourier series representations is rigorously proven.

LITERATURE

1. Abdullayev V. M. Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions. Proc. of the Inst. of Math. and Mech. 2018; 44 (2): 171–186.
2. Albeverio S., Alimov Sh. A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process. Applied Math. and Optimiz. 2008; 57 (1): 58–68.
3. Ashirbaev B. Y., Yuldashev T. K. Derivation of a controllability criteria for a linear singularly perturbed discrete system with small step. Lobachevskii J. Math. 2024; 45 (3): 938–948.
4. Azamov A. A., Ibragimov G. I., Mamayusupov K., Ruzibaev M. B. On the stability and null controllability of an infinite system of linear differential equations. J. Dynam. and Contr. Syst. 2021. 5. Butkovsky A. G., Pustylnikov L. M. Theory of mobile control of systems with distributed parameters. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)
6. Deineka V. S. Optimal control of the dynamic state of a thin compound plate. Cybernetics and Systems Analysis 2006; 42 (4): 151–157.
7. Deumlich R, Elster K. H. Duality theorems and optimality, conditions for nonconvex optimization problems. Math. Operations Forsch. Statist. Ser. Optimiz. 1980; 11 (2): 181–219.

8. Kerimbekov A. K., Nametkulova R. J., Kadirimbetova A. K. Optimality conditions in the problem of thermal control with integral-differential equation. Vestnik Irkutsk Gos. Univers., Matematika 2016; 15: 50–61. (in Russian)
9. Mahmudov E. N. Infimal convolution and duality in convex optimal control problems with second order evolution differential inclusions. Evol. Equ. Contr. Theory 2021; 10 (1): 37–59.
10. Mardanov M. J., Melikov T. K. A method for studying the optimality of controls in discrete systems. Proc. Inst. Math. Mech. 2014; 40 (2): 5–13.
11. Ramazanova A. T., Abdullozhonova A. N., Yuldashev T. K. Optimal mobile control in inverse problem for Barenblatt–Zheltov–Kochina type fractional order equation. Lobachevskii J. Math. 2025; 46 (1): 488–501.
12. Yuldashev T. K., Ashirbaev B. Y. Optimal feedback control problem for a singularly perturbed discrete system. Lobachevskii J. Math. 2023; 44 (2): 661–668.

Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Certain Classes of Differential Equations with Indefinite Evolution Direction

Zikirov B.Z.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
a.zikirovbobur7@gmail.com

The thesis studies solvability of local and nonlocal boundary value problems for parabolic equations with sign-changing coefficients and discontinuous leading terms. Uniqueness and existence theorems are established in anisotropic Sobolev spaces. Consider

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}\big(h(x)u_x\big) + c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_1 \cup Q_2,$$

with conditions

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad \alpha(x)u(x,0) + \beta(x)u(x,T) = 0,$$

and interface conditions at $x = 0$.

Theorem 1 (Uniqueness). Under sign restrictions on $h(x), c(x,t), \alpha(x), \beta(x)$, Problem I has at most one solution in Sobolev space V. *Proof idea:* Energy inequality forces $u \equiv 0$ when $f \equiv 0$.

Theorem 3 (Existence). If α, β are piecewise constant, then for any $f \in L^2(Q)$, a solution exists. *Proof idea:* Continuation in parameter λ with a priori estimates.

Same PDE, but interface conditions are linear relations between u and u_x at $x = 0$.

Theorem 2 (Uniqueness). With coefficient constraints (a_1, b_1, a_2, b_2), Problem II admits at most one solution. *Proof idea:* Quadratic form from interface conditions is nonnegative, hence only trivial solution if $f = 0$.

Theorem 4 (Existence). Under the same assumptions, Problem II is solvable.

Both local and nonlocal parabolic boundary problems with indefinite evolution direction were shown to be well-posed. The results generalize classical theory to equations with discontinuous coefficients.

LITERATURE

1. Fichera G. (1960). On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Univ. Wisconsin Press.
2. Oleinik O.A., Radkevich E.V. (2010). Equations with non-negative characteristic form. Moscow State University.
3. Vragov V.N. (1983). Boundary value problems for non-classical equations of mathematical

physics. Novosibirsk: NSU.
4. Gevrey M. (1913). On parabolic-type partial differential equations. J. Math. Appl.
5. Kozhanov A.I., Potapova S.V. (2018). Boundary problems for higher-order differential equations with changing evolution direction. Siberian Mathematical Journal.

Integration of the loaded hirota equation via the inverse scattering method

Hoitmetov U. A.[1], Musoyeva F.K.[2].
Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan;
x_umid1@mail.ru, Musayevaferuza5952@gmail.com

In this study, we focus on analyzing the loaded Hirota equation. Specifically, we consider the following equation:

$$iu_t + P_0(|u(x_0,t)|)(u_{xx} + 2u|u|^2) + iP_1(|u(x_1,t)|)(6|u|^2u_x + u_{xxx}) + P_2(|u(x_2,t)|)u_x = 0 \quad (1)$$

where the functions $P_i(|u(x_i,t)|)$, $i = 0,1,2$, are assumed to be polynomials in $u(x_i,t)$ and some of its partial derivatives with respect to and Additionally, equation (1) is studied under the following initial condition:

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (2)$$

The following constraints must be satisfied:

1. There exists a positive constant $\varepsilon > 0$ such that the inequality

$$e^{\varepsilon|x|}|u_0(x)| \leq \frac{\varrho}{(1+|x|)^{1+\zeta}}, \quad \zeta > 0, \quad (3)$$

holds, where $\varrho > 0$ is a given constant.

2. The operator $\mathcal{L}(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0^*(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ has exactly N distinct eigenvalues, denoted by $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$, all of which lie strictly in the upper half-plane $\operatorname{Im}\lambda > 0$. It is assumed that the solution $u(x,t)$ belongs to the class of rapidly decreasing functions, specified by the following properties:

$$M = \left\{ u(x,t): \ \sum_{j=0}^{3} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| e^{\varepsilon|x|} \right.$$

$$\left. \leq \frac{\varrho}{(1+|x|)^{1+\zeta}}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varrho > 0, \quad \zeta > 0 \right\}. \quad (4)$$

The main result of this problem is the following theorem.

Theorem. If the function $u(x,t)$ is a solution to problem (1)-(4), then the time evolution of the scattering data for the non-self-adjoint operator $\mathcal{L}(t)$ with potential $u(x,t)$ is governed by the differential equations

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(0), \quad n = \overline{1,N}.$$

,

$$\frac{dr^+(\lambda,t)}{dt} = \Big(4i\lambda^2 P_0(|u(x_0,t)|)$$

$$+8i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|) - 2i\lambda P_2(|u(x_2,t)|) \Big) r^+(\lambda,t),$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(4i\lambda^2 P_0(|u(x_0,t)|) + 8i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|) + 2i\lambda_n P_2(|u(x_2,t)|)\right) C_n.$$

Example. Let us consider the initial value problem for a Hirota-type equation with variable coefficients:

$$iu_t + (2t+1)\left(u_{xx} + 2u|u|^2\right) + i\beta(t)u(1,t)\left(u_{xxx} + 6|u|^2 u_x\right) + itu_x = 0,$$

$$u(x,0) = -\frac{2ib(C_0)^* e^{-2iax}}{|C_0|\cosh 2(bx-\varphi)},$$

where

$$\beta(t) = \frac{t\exp(12a^2bt^2 - 4b^3t^2 + 8abt + 8abt^2 - bt^2 + 2b)}{2\,|C_0|}$$

$$+\frac{t\,|C_0|\exp(-12a^2bt^2 + 4b^3t^2 - 8abt - 8abt^2 + bt^2 - 2b)}{8b^2},$$

$$\lambda_0 = a+ib, \quad b>0, \qquad C_0 = |C_0|\,e^{i\psi}, \qquad \frac{|C_0|^2}{4b^2} = e^{4\varphi}.$$

(7) Solution:

$$u(x,t) =$$

$$-\frac{2ib\exp\left\{(-4ia^3+12iab^2)t^2 + (-4ia^2+4ib^2)(t^2+t) + iat^2 - 2iax - i\psi\right\}}{\cosh\left(2bx - 2\varphi - 4b(-3a^2+b^2)t^2 + 8ab(t^2+t) - bt^2\right)}.$$

LITERATURE

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett., 1967,. Vol.19, 1095–1097.

2. Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media., Soviet Phys. JETP, 1972, Vol. 34, Issue 1, 62–69.

3. Hirota R. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, J. Math. Phys.. 1973, Vol. 14, 805-809.

4. Khasanov A.B., Reyimberganov A.A. On the Hirota equation with a self-consistent source, Theoret. and Math. Phys., 2024, Vol. 221, Issue 2, 1852–1866.

5. Hoitmetov U.A. Integration of the Hirota equation with time-dependent coefficients, Theoret. and Math. Phys., 2023, Vol. 214, Issue 1, 24–35.

The potential method for Cauchy problem for the airy-type equation with different fractional derivatives on the star-shaped graph

Rakhimov K.U.

University of exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
kamoliddin.ru1@gmail.com

We have the graph Γ with k incoming and m outgoing bonds. In the incoming edges, the coordinates are set from $-\infty$ to 0 , and in the outgoing bonds, the coordinates are set from

0 to $+\infty$. The bonds of the graph are denoted by $b_j, j=\overline{1,k+m}$. We consider next Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_n} u_n(x,t) - u_{n,xxx}(x,t) = f_n(x,t), \quad x\in b_n, \quad t\in(0,T], \\ u_n(x,0)=u_{0,n}(x), \quad x\in b_n, \\ Au(0,t)=0, \quad t\in(0,T], \\ u_x^+(0,t) = Bu_x^-(0,t), \quad t\in(0,T], \\ C^- \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u^-(x,t)\Big|_{x=0} = C^+ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u^+(x,t)\Big|_{x=0}, \quad t\in(0,T]. \end{cases} \tag{1}$$

Here $0<a_n<1$, $u^-=(u_1,u_2,...,u_k)^T$, $u^+=(u_{k+1},u_{k+2},...,u_{k+m})^T$, A is the constant matrix on the form

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_{k+m} \end{pmatrix},$$

$C^-=(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_k})$, $C^+=(\frac{1}{a_{k+1}},...,\frac{1}{a_{k+m}})$, $a_1=1$, $a_n\neq 0$ and B is the matrix of the dimension $m\times k$ on the form

$$B=\begin{pmatrix} b_{k+1,1} & ... & b_{k+1,k} \\ ... & ... & ... \\ b_{k+m,1} & ... & b_{k+m,k} \end{pmatrix}.$$

Here $\partial_{0t}^{\rho} g(t)$ stands for the Caputo fractional derivative.

The uniqueness of this problem was proved using the method in [1]. To prove the existence of a solution, the potential method was applied. Based on the gluing conditions was formulated Generalized Abel Integral Equation, which was solved by Professor A. V. Pskhu in work [3].

LITERATURE

1. Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M. The time-fractional Airy equation on the metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2021, 14 (3), 376-388.
2. Sobirov Z.A., Uecker H., Akhmedov M.I. Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uzbek Mathematical Journal, Vol.3, 143-154 (2015).
3. A.V. On Solution Representation of Generalized Abel Integral Equation, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics Volume 2013, Article ID 106251, 5.

Uchinchi tartibli tenglama uchun chegaralanmagan sohada chegaraviy masala

Ro'ziyeva Z.O.[1]

Farg'ona davlat texnika universiteti;
zroziyeva462@gmail.com

Hozirgi kunda ikkinchi, uchinchi va yuqori tartibli tenglamalar uchun M.S.Salohiddinov [2], T.D.Jo'rayev [1], A.Q.O'rinov va ularning shogirdlari tomonidan ko'plab chegaraviy masalalar qo'yilib, ularni o'rganish nazariyalari yaratilgan. Ushbu maqolada chegaralanmagan sohada uchinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala oÇrganilgan.

Masalaning qo'yilishi. Ushbu

$$D = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$$

sohada

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta U(x,y) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta U(x,y) = 0$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - Laplas operatori. (1) tenglamaning $\overline{D}$ sohada uzluksiz shunday $U(x,y)$ yechimini topingki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$U(x,y)|_{x=0} = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y < \infty, \tag{2}$$

$$U(x,y)|_{y=0} = \varphi_2(x), \qquad 0 \le x < \infty, \tag{3}$$

$$U_x(x,y)|_{x=0} = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y < \infty, \tag{4}$$

$$\lim_{R\to\infty} U_x(x,y) = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad x > 0,\, y > 0. \tag{5}$$

Bu yerda: $\varphi_i(i = \overline{1,3})$ - berilgan funksiyalar va

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \tag{6}$$

kelishuv sharti o'rinli.
Berilgan tenglamada

$$\frac{\partial}{\partial x}U = V \tag{7}$$

belgilash kiritsak, u holda (1) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\Delta V = 0 \tag{8}$$

(7) ga asosan quyidagi chegaraviy shartlarni olamiz:

$$V(x,y)|_{y=0} = \varphi_2'(x), \qquad V(x,y)|_{x=0} = \varphi_3(y), \tag{9}$$

$$\lim_{R\to\infty} V(x,y) = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad x > 0,\, y > 0. \tag{10}$$

Masala yechimining yagonaligi.
Teorema. Agar masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u holda yagona bo'ladi.
Isbot. Masala yechimining yagonaligini isbotlash uchun (1) - (5) masalaga mos bir jinsli, ya'ni

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right) = 0,$$

$$U(x,y)|_{x=0} = 0, \quad U(x,y)|_{y=0} = 0,, \quad U_x(x,y)|_{x=0} = 0. \tag{11}$$

masalani qaraymiz. U holda (8) Џ (10) masalaning bir jinsli masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta V = 0$$

$$V(x,y)|_{x=0}=0, \qquad V(x,y)|_{y=0}=0, \tag{12}$$

$$\lim_{R\to\infty} V(x,y)=0, \quad R^2=x^2+y^2, \quad x>0,\, y>0.$$

Ushbu

$$D_R=\left\{(x,y): x^2+y^2<R^2,\, x>0,\, y>0\right\},$$

$$\partial D_R=\{(x,y):(x=0)\cup(y=0)\cup\sigma_R\},$$

$$\sigma_R=\left\{(x,y): x^2+y^2=R^2,\, x>0,\, y>0\right\}$$

sohani qaraymiz. D_R sohada ushbu integralni tahlil qilamiz:

$$\iint\limits_{D_R} V(V_{xx}+V_{yy})dxdy=0. \tag{13}$$

(13) da ba'zi shakl almashtirishlarni bajarib, (10), (12) chegaraviy shartlardan foydalansak, (13) tenglik quyidagi

$$\iint\limits_{D_R} \left[(V_x)^2+(V_y)^2\right]dxdy=0 \tag{14}$$

ko'rinishga keladi. Bundan

$$V_x=V_y=0$$

tenglikni olamiz, bu tengliklardan $V=const$ ekanligi kelib chiqadi. Ammo bir jinsli (12) shartga asosan $\overline{D}$ sohada $V=0$ va (7) ga asosan $V=U_x=0$ boÇladi. Ma'lumki, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$U=\overline{\phi}(y) \tag{15}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $\overline{\phi}(y)$ - ixtiyoriy noma'lum funksiya. (11) chegaraviy shartlarning biridan foydalansak, (15) tenglikdagi $\overline{\phi}(y)$ funksiya aynan nolga teng bo'lib $U(x,y)=0, \quad (x,y)\in\overline{D}$ da $U_x=0$ tenglama trivial yechimga ega ekanligini topamiz.

Adabiyotlar

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения и смешанного и смешанно составного типов. Ташкент. Фан. 1979. -240 с.
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент. Фан. 1974. 156 с.

Применение свойств функции лауричелла к исследованию поведения фундаментальных решений сингулярного эллиптического уравнения

Аббасова М. О.

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
abbasovamunira21@gmail.com

Гипергеометрическая функция Лауричелла $F_A^{(n)}$ от $n\in N$ переменных имеет вид

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix} a, b_1, ..., b_n; \\ c_1, ..., c_n; \end{matrix}\; x_1, ..., x_n\right)=$$

$$\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}(a)_{k_1+...+k_n}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}}\frac{x_j^{k_j}}{k_j!}\right]\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j|<1,$$

Среди случаев приводимости при частных значениях числовых параметров гипергеометрической функции Лауричелла важные приложения имеет случай, когда сумма числовых параметров числителя равна сумме числовых параметров знаменателя. В таком случае говорят о логарифмической приводимости. Суммы числовых параметров числителя и знаменателя обозначим через $|\mathbf{b}|$ и $|\mathbf{c}|$, соответственно, а через X – сумму положительных переменных гипергеометрической функции:

$$|\mathbf{b}|=b_1+...+b_n,\ \ |\mathbf{c}|=c_1+...+c_n,\ \ X=x_1+...+x_n,\ \ x_1\geq 0,...,x_n\geq 0.$$

Если при $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$ сумма положительных переменных X стремится к 1, оставаясь сама меньше 1, то гипергеометрическая функция имеет логарифмическую особенность на гиперплоскости $x_1+...+x_n=1$.

Теорема 1. Пусть $x_1>0$,..., $x_n>0$. Если $c_1>b_1>0$, ..., $c_n>b_n>0$ и $a+|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$, то при $X\to 1-0$ гипергеометрическая функция Лауричелла $F_A^{(n)}$ имеет логарифмическую особенность

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}a,b_1,...,b_n;\\ c_1,...,c_n;\end{matrix}\ x_1,...,x_n\right)\sim-\frac{1}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\right]\cdot\ln(1-X); \tag{1}$$

если же $c_1>b_1>0$, ..., $c_n>b_n>0$ и $a+|\mathbf{b}|>|\mathbf{c}|$, то

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}a,b_1,...,b_n;\\ c_1,...,c_n;\end{matrix}\ x_1,...,x_n\right)$$

$$\sim\frac{\Gamma\left(a+|\mathbf{b}|-|\mathbf{c}|\right)}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\right]\cdot(1-X)^{|\mathbf{c}|-|\mathbf{b}|-a}. \tag{2}$$

Покажем применения Теоремы 1. Одно из фундаментальных решений эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y=0,\ \ 0<\alpha,\beta<\frac{1}{2},\ x>0,\ y>0$$

в окрестности начала координат имеет вид

$$q_1(x,y;\xi,\eta)=\gamma_1\frac{x^{2\alpha}y^{2\beta}}{r^{2\alpha+2\beta}}F_2\left(\begin{matrix}\alpha+\beta,\alpha,\beta;\\ 2\alpha,\ \ 2\beta;\end{matrix}\ -\frac{4x\xi}{r^2},-\frac{4y\eta}{r^2}\right),$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

где $F_2\equiv F_A^{(2)}$ – функция Аппеля (двумерный аналог функции Лауричелла).

Теперь воспользовавшись утверждением (1) Теоремы 1 можно заключить, что функция $q_1(x,y;\xi,\eta)$ при $r\to 0$ имеет логарифмическую особенность вида $\ln(1-X)$, где

$$X=\frac{r_1^2-r^2}{r_{12}^2}+\frac{r_2^2-r^2}{r_{12}^2}\equiv 1-\frac{r^2}{r_{12}^2},$$

$$r_1=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2},\ r_2=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}$$
$$r_{12}=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}.$$

Для фундаментальных решений сингулярных эллиптических уравнений с размерностью 3 и более логарифмическая особенность не наблюдается, а происходит степенная особенность фундаментальных решений (такое утверждение для уравнения Лапласа известно из курса математической физики). Действительно, m-мерное эллиптическое уравнение с n сингулярными коэффициентами ($1 \leq n \leq m$, $m > 2$)

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \;\; 0 < \alpha_1, ..., \alpha_n < \frac{1}{2} \tag{3}$$

в $1/2^n$-ой части евклидова пространства R_m имеет 2^n фундаментальных решения [1], одно из которых имеет вид

$$q(x_1, ..., x_n; \xi_1, ..., \xi_n) = \gamma \frac{x_1^{2\alpha_1} ... x_n^{2\alpha_n}}{r_{1,...,n}^{2\beta}} F_A^{(n)} \left(\begin{matrix} \beta, \alpha_1, ..., \alpha_n; \\ 2\alpha_1, ..., 2\alpha_n; \end{matrix} \; \frac{r_1^2 - r^2}{r_{1,...,n}^2}, ..., \frac{r_n^2 - r^2}{r_{1,...,n}^2} \right),$$

где

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j)^2},$$

$$r_k = \sqrt{(x_k + \xi_k)^2 + \sum\nolimits_{j=1, j \neq k}^{m} (x_j - \xi_j)^2}, \;\; 1 \leq k \leq n,$$

$$r_{1,...,n} = \sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^{n} (x_j + \xi_j)^2 + \sum\nolimits_{j=n+1}^{m} (x_j - \xi_j)^2},$$

$$\beta = \frac{m-2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_j, \;\; \gamma = 2^{2\beta - m} \frac{\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(2\alpha_i)} \right].$$

В силу утверждения (2) Теоремы 1, получим

$$q \sim \frac{\Gamma((m-2)/2)}{2^{m-2\beta} \pi^{m/2} r_{1,...,n}^{m-2}} \prod_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{x_j}{\xi_j} \right)^{\alpha_j} \right] \cdot (1 - X_n)^{(2-m)/2},$$

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^2 - r^2}{r_{1,...,n}^2} \equiv 1 - \frac{r^2}{r_{1,...,n}^2}.$$

Отсюда вытекает, что при $m > 2$

$$q \sim \frac{\Gamma((m-2)/2)}{2^{m-2\beta} \pi^{m/2}} \prod_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{x_j}{\xi_j} \right)^{\alpha_j} \right] \cdot \frac{1}{r^{m-2}}, \;\; r \to 0.$$

Аналогичным образом установливается справедливость утверждения (2) Теоремы 1 для остальных фундаментальных решений сингулярного эллиптического уравнения (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ergashev T.G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 13: (1), 48– 57, 2020.

Обратные задачи для уравнения гиперболического типа с нелинейной нагрузкой

Абдуллаев О. Х.
Alfraganus University, Ташкент, Узбекистан;
obidjon.mth@gmail.com

Работа посвящена к трем обратным задачам для нагруженного уравнения гипеболического типа поставленное в характеристичесой области.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + h(x)p(x, u(x,0)) = f(x), \tag{1}$$

где $p(x,z)$ — заданная функция, причем $p(x,z) \neq 0$, для всех $(x,z) \in ([0,1] \times R)$.

Пусть Ω - характеристический треугольник, ограниченная характеристиками:

$$AC : x + y = 0; \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}; \;\; y \le 0,$$

$$BC : x - y = 1; \quad \frac{1}{2} \le x \le 1; \;\; y \le 0,$$

уравнения (1) при $y < 0$, и прямой $y = 0$, где $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие обратные задачи:

Задача 1. Пусть $h(x)$ - заданная функция, $h(x) \in C[0,1]$. Требуется найти пару функций $\{u(x,y), f(x)\}$ со следующими свойствами:
1.$u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ и $f(x) \in C[0,1]$, удовлетворяют уравнению (1) в области Ω;
2.$u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u_y(x,0) = \nu(x); \;\; x \in (0,1), \tag{2}$$

$$u_x(x,-x) + u_y(x,-x) = \psi_1(x), \quad x \in \left[, \tfrac{1}{2}\right], \tag{3}$$

$$u_y(x,x-1) - u_x(x,x-1) = \psi_2(x), \quad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \tag{4}$$

$$u(x,-x) = \varphi(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \tag{5}$$

где $\nu(x), \varphi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ - заданные функции, причем $\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Следуеть отметит, что обратные коэффициентные задачи исследовались в работах Д.Дурдиева [1], Х.Х Турдиева [2] и дрг, а обратная задача определения граничного значения решения задачи типа Трикоми в первые было исследовано в работе Р.Р.Ашурова и Р.Зуннунова [3].

Пусть $f(x)$ - заданная функция, $f(x) \in C[0,1]$.

Задача II. Тогда, требуется найти пару функций $\{u(x,y), h(x)\}$ со следующими свойствами:
1. $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \; h(x) \in C[0,1]$ удовлетворяют уравнению (1) в области Ω;
2. $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (2)-(5).

Задача III. Найти тройку функций $\{u(x,y), h(x), \varphi(x)\}$, если пара функций $\{u(x,y), h(x)\}$ удовлетворяет уравнению (1) в области Ω, условиям (2)-(4) и

$$u_{yy}(x,-0) = \mu(x), \quad x \in (0,1), \tag{6}$$

а функция$\{\varphi(x)\}$ удовлетворяет условие (5), где $\mu(x)$ - заданная достаточно гладкая функция.

При определенных условиях на заданные функции, доказано однозначная разрешимость поставленных задач.

Литература

1. Дурдиев Д.К., Об определении коэффициента уравнения смешанного парабологиперболического типа с нехарактеристической линией изменения, Дифференц.уравнения, 58:12, 1633Ц1644, 2022.
2. Турдиев Х.Х., Обратные коэффициентные задачи для временно-дробного волнового уравнения с обобщенной производной Римана-Лиувилля по времени, Изв.вузов. Матем., 10, 46Ц59, 2023.
3. R. R. Ashurov and R. T. Zunnunov. An Analog of the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Fractional Derivative. Inverse Problems, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44, No. 8, pp. 3225Ц3240, 2023.

Об одной задачи со смещением на внутренних характеристиках для одного класса вырождаюшихся гиперболических уравнения.

Аллакова Ш. И., [1] **Эсанова Д. Х.**[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
shaxnoza.allakova@mail.ru
Университет экономики и сервиса Термеза, Термез, Узбекистан;
dilyaesonova@gmail.com

Постановка задачи Жегалов -Нахушев (JN).

Пусть D^- -конечная односвязная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, и характеристиками AC и BC уравнения.

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0,\ A = A(-1, 0),\ B = B(1, 0)$.

На отрезке AB рассмотрим точку $E = E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$, и введем линейную функции $y = p(x) = ax - b$, и $y = q(x) = a - bx$ отображающее отрезок $[-1.1]$ на соответственно отрезки $[-1, c]$ и $[c, 1]$, где $a = (1 + c)/2,\ b = (1 - c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = c,\ q(1) = 1$, а через C_0 и C_1 соответственно обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходяшей из точки E(c, 0), где $c \in I = (-1, 1)$ интервал оси $y = 0$.

Введем обозначения

$$\theta_k^*(p(x)) = \frac{p(x) + kc}{1 + k} - i\left[\frac{(c - p(x))(m + 2)}{2(k + 1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_0^*(q(x)) = \frac{q(x) + c}{2} - i\left[\frac{(q(x) - c)(m + 2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

соответственно аффиксы точек пересечения характеристики EC_0 и EC_1 с характеристиками исходяшими из точки $M_0(p(x_0,)0)$ и $M_1(q(x_0), 0)$, где $1 < k < +\infty$.

Задача JN. Требуется найти в области D^- функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}^-)$ удовлетворяюшее следуюшим условиям:

1) $u(x, y)$ -обобщенное решение уравнения (1) из класса R_1 [1, с.104], [2, с.35].

2) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x),\ x \in [-1, 1], \tag{2}$$

$$\nu(q(x)) = \mu\nu(p(x)) + f_0(x),\ x \in (-1,1), \tag{3}$$

$$a_0 u[\theta_k^*(p(x))] + b_0 u[\theta_0^*(q(x))] = f_1(x),\ x \in [-1,1], \tag{4}$$

где

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-\frac{m}{2}} = \nu(x),$$

$1 < k < +\infty$, μ, a_0, b_0− некоторые положительные постоянные, $\tau(x)$, $f_0(x), f_1(x) \in C^2(\bar{I})$− заданные функции.

Теорема 1. *Задача JN при выполнении условия*

$$|\lambda| = \left|\frac{2a_0 a}{(k+1)\mu b b_0}\right| < 1, \tag{5}$$

однозначна разрешима.

Теорема 1 доказывается методом работ [3, 4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985. 304 с.
2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент.: Университет, 2005. - 224 с.
3. Нахушев А.М. К теории краевых задач для вырождаюшихся гиперболических уравнений. "Сообщения АН.ГССР". 77(3). 1975. С. 545-548.
4. Мирсабурова Г.М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений. Известия вузов. Математика. 2022, No 6, с.54-59.
5. Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского на отрезке вырождения и параллельном ему внутреннем отрезке области для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений. Известия вузов. Математика. 2025, No 3, с.25-29.

Применение дробных степеней эллиптического оператора с сингулярным коэффициентом к исследованию дифференциального уравнения в классе Соболева

Аликулов Т. Н.[1], Косимов Ж. А.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
tolibaka@mail.ru, q_jamshid@mail.ru 2

Свойства дробных степеней дифференциальных операторов играют важную роль при решении разных математических задач. Этой тематикой занимался целый ряд авторов (см., например, [1–6]).

Рассмотрим в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n эллиптический дифференциальный оператор с сингулярным коэффициентом вида

$$L(x,D) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha D^\alpha + q(x), \tag{1}$$

с областью определения $\mathbb{D}(L) = C_0^\infty(R^n)$, $l = 2s$, $s \in N$, $1 < p < m$, $a_\alpha = const$, где потенциал $q(x) \in C^\infty(R^n \backslash S)$ оператора $L(x,D)$ допускает особенность вида

$$|D^{\beta}q(x)| \leq \frac{const}{[\rho(x)]^{1+|\beta|}}\Big\{1+\frac{1}{[\rho(x)]^{\tau}}\Big\}. \tag{2}$$

Здесь $0 \leq \tau < s$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$– мультииндексы, $0 < |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = l$, $0 \leq |\beta| = \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i \leq n$. Пусть для всех $x \in R^n$ и $\xi \in R^n$ при $\xi \neq 0$ символ оператора (1), имеет место неравенство $C_1|\xi|^l \leq \sum\limits_{|\alpha|=l} a_\alpha|\xi^\alpha| \leq C_2|\xi|^l$, где $C_1 = const > 0$, $C_2 = const > 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Lu(t) = f(t), \tag{3}$$

где t изменяется на промежутке $[0,T]$. Решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0, \tag{4}$$

может быть записано в виде

$$u(t) = cos(L^{\frac{1}{2}}t)u_0 + L^{-\frac{1}{2}}sin(L^{\frac{1}{2}}t)v_0 + L^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^t sin(L^{\frac{1}{2}}t - L^{\frac{1}{2}}s)f(s)ds, \tag{5}$$

где $cos(L^{\frac{1}{2}}t)u_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}cos(t\sqrt{\lambda_i})(u,e_i)e_i$, $sin(L^{\frac{1}{2}}t)v_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}sin(t\sqrt{\lambda_i})(u,e_i)e_i$.

Для решения (3) часто применяют метод Фурье. В этом методе решение (5) заменяется последовательностью приближенных решений

$$u_N(t) = P_N[cos(L^{\frac{1}{2}}t)u_0 + L^{-\frac{1}{2}}sin(L^{\frac{1}{2}}t)v_0 + L^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^t sin(L^{\frac{1}{2}}t - L^{\frac{1}{2}}s)f(s)ds], \tag{6}$$

где $P_Nu = \sum\limits_{i=1}^{N}(u,e_i)e_i \quad (u \in L_2(R^n))$.

В работе получены следующее основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \frac{m}{2+\tau}$, $0 \leq \tau < min(m-2, s)$. *Тогда*

$$\|(L+lI)^{-1}\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+l} \quad (l \geq 0).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mu \geq \mu_0$, $0 \leq \sigma \leq l$. *Тогда*

$$\|L_\mu^{-\frac{\sigma}{2}}f\|_{H^\sigma(R^n)} \leq C_\sigma\|f\|_{L_2(R^n)} \quad (f \in L_2(R^n)).$$

Теорема 3. *Пусть* $0 \leq \sigma \leq l$, $0 < \alpha < 1$, $\nu \in R$, $u_0 \in D(L^{\nu-\alpha})$, $v_0 \in D(L^{\nu-\alpha-\frac{1}{2}})$ *и* $f(t) \in D(L^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}})$ *при всех* $t \in [0,T]$, *причем функция* $\varphi(t) = L^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}f(t)$ *непрерывна по норме пространства* $L_2(R^n)$ *на* $[0,T]$. *Тогда приближения Фурье (6) сходятся к решению задачи (3), (4) по норме пространства* $H^\sigma(R^n)$ *равномерно относительно* $t \in [0,T]$. *Скорость сходимости характеризуется неравенством*

$$\|u(t) - u_N(t)\|_{H^\sigma(R^n} = o(\lambda_N^{-\nu})$$

.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. Ядра дробного порядка,Мат. сб. 1957. Т. 4, № 41. С.459–480.
2. Алимов Ш.А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций, Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 9, № 8. С. 1609–1626.
3. Халмухамедов А.Р. Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шрёдингера и сходимость спектральных разложений, Мат. заметки. 1996. № 59(3). С. 428–436.
4. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка, ДАН. 2009. № 428(1). С. 20–22.
5. Алимов Ш.А., Барновский М. О спектральных разложений , связанных с оператором Шрёдингера, Czechoslovak Math. Jour. Praha. 1990. V. 40 (115), № 2. P. 177- 181.
6. Alimov S. S., Joo I. On the convergence of eigenfunction expansions in H^s- norm, Acta. Sci. Math. 1985. № 48. P. 5- 12.

О единственности решения задачи геллерстедта с данным на частях граничных характеристик для уравнения эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения

Амонов Б. Б.[1], Бутаерова С. Н.[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;

Термезский университет экаиомики и сервиса, Термез, Узбекистан;
amonovbobur91@mail.ru, amonovbobur91@mail.ru

1. Постановка задачи GK (Геллерстед, Крикунов)

Пусть D- конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ заданной уравнением $x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{(m+2)} = 1$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, & \text{при } x > 0; \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

где l, m- положительные постоянные, $\delta_0 \in (-l/2, 1)$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежашие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точки пересечения граничных характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходяшими из точки $E(c, 0)$, где c- некоторое число, принадлежаше интервалу $J = (-1, 1)-$ оси $y = 0$.

Заметим, что уравнение (1) в верхней полуплоскосты $y > 0$ является уравнением эллиптического типа, а при $y < 0$ является уравнением гиперболического типа, причем порядок параболического вырождения этих уравнений на оси $y = 0$ разные [1].

Настояшая работа посвяшена исследованию первой задачи Геллерстедта [2,с.201] с данными на специально подобранных частях граничных характеристик для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения и с сингулярными коэффициентом (1).

Задача GK . Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$ удевлетворяюшую следующим условиям:

1. Функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2. Функция $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1[3, c.35]$ в области D^-;

3. На отрезке вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in J/\{c\}, \tag{2}$$

причем при $x=\pm 1$, $x\to c$ предел $\lim\limits_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$ может иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$, а предел $\lim\limits_{y\to +0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$ можеть иметь особенность порядка ниже $1-2\delta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $\delta=(l+2\delta_0)/2(l+2)$;

4. для любых $x\in\overline{J}$ выпольняются равенства

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in[-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0}=\psi_0(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{BC_1}=\psi_1(x),\quad x\in[(c+1)/2,1], \tag{5}$$

где $\varphi(x),\ \psi_0(x),\ \psi_1(x)$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(x)=(1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$ $\psi_0(-1)=0,\ \ \psi_1(1)=0$, где $\widetilde{\varphi}(x)$– непрерывная функция.

2. Единственность решения задачи БС. С помощью формулы Дарбу из краевых условий (4) и (5) нетрудно получить соответственно систему уравнений

$$\nu(x)=\gamma D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x)+\Psi_0(x),\ x\in(-1,c), \tag{6}$$

$$\nu(x)=\gamma D^{1-2\beta}_{x,1}\tau(x)+\Psi_1(x),\ x\in(c,1), \tag{7}$$

где

$$\gamma=\frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta},$$

$$\Psi_0(x)=-\gamma\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1,x}\psi\left((x-1)/2\right),$$

$$\Psi_1(x)=-\gamma\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}(1-x)^{\beta}D^{1-\beta}_{x,1}\psi\left((x+1)/2\right)$$

-известные функции.

Равенства (6) и (7) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Для задачи GK аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе [4, с.301] является

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи GK, при выполнении условий $\psi_0(x)\equiv 0,\ \psi_1(x)\equiv 0$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\bar{D}^+$ может принимать только в точках нормальной кривой $\bar{\sigma}_0$.*

Теорема 1 доказывается методом работы [1].

Из теорема 1 следует следуюшее

Следствие. Задача GK имеет не более одного решения.

LITERATURE

1. Крикунов Ю.М. Задача Геллерстедта для одного частного случая уравнение $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$. // Труды семинара но краевым задачам. —1970. Вып 7.—С. 183–187.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985. 304 с.
3. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент.: Университет. 2005. 224 с. 4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. 1981. 448с.

О решении краевой задачи для вязко-трансзвукового уравнения в полуограниченной области

Апаков Ю. П.[1,2], Иброхимов Х. К.[2]
[1]Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан;
yusupjonapakov@gmail.com
[2]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
xusniddin571@mail.ru

Abstract. This work investigates on solving a boundary value problem for the viscous transonic equation in a semi-unbounded region. The uniqueness of the solution is proven using the energy integral method. The existence of solution is established via the method of separation of variables.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx}, \quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

В области $D^-=\{(x,y):\,-\infty<x<0,\ 0<y<q\}$ рассмотрим уравнение:

$$L\,[u]\equiv u_{xxx}+u_{yy}+\mu u=0, \tag{1}$$

где $q\in R$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача B**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^- из класса $C^{3,2}_{x,y}(D^-)\cap C^{2,1}_{x,y}(D^-\cup\Gamma_1)$, имеющего ограниченные первой производной по переменной y равномерно по x и второй производной по x, при $x\to-\infty$ и $u_y\in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u\,(x,0)=u_y\,(x,q)=0, \quad -\infty<x\leq 0, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} au\,(0,y)+bu_{xx}\,(0,y)=\psi_1\,(y)\,, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}u\,(x,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}u_x\,(x,y)=0, \end{array}\right. \quad 0\leq y\leq q, \tag{3}$$

где $\Gamma_1=\partial D^-$ - граница области D^-, $a,b\in R$ а также $a^2+b^2\neq 0$, а $\psi_1\,(y)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi_{1n}\,(0)=\psi'_{1n}\,(q)=0. \tag{4}$$

Теорема 1. Если задача B имеет решение, то при выполнении условий $ab \geq 0$, $\mu \leq 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача B имеет два различных решений: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области D^-.

В области D^- справедливо тождество

$$u\,L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right) - u_y^2 + \mu u^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области $D_l^- = \{(x,y) : -l < x < 0,\ 0 < y < q\ \}$, учитывая однородные краевые условии и требуя $a \neq 0$ получим

$$\frac{b}{a}\int\limits_0^q u_{xx}^2(0,y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^q u_x^2(0,y)\,dy + \iint\limits_{D^-} u_y^2(x,y)\,dxdy - \mu\iint\limits_{D^-} u^2 dxdy = 0.$$

Пусть $\mu = 0$, тогда по условия теоремы 1, т.е. $ab \geq 0$, получим $u_y(x,y) = 0$, отсюда имеем $u(x,y) = f(x)$. Пологая $y = 0$ и учитывая что $u(x,0) = 0$, имеем $f(x) = 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D^-$. Если $\mu < 0$, то из пятого слагаемого, получим $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in D^-$.

В случае $b \neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x,y) \equiv 0$ в D^-.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если функции $\psi_1(y) \in C^2(0 \leq y \leq q)$ и выполняется условия (4), то решение задачи B существует.

Теорема 2 была доказана с применением метода разделения переменных. Решение рассматриваемой задачи получено в форме бесконечного ряда, при этом установлена равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования при выполнении определенных условий на заданные функции. В процессе обоснования равномерной сходимости доказано отсутствие проблемы "малого знаменателя".

ЛИТЕРАТУРА

1. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - No 1(34). - С.56-65.

2. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа, Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения, Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - No 5. - С. 1265-1279.

О свойствах функции Карлемана

Ашурова З. Р.[1], Жураева Н. Ю.[2], Жураева У. Ю.[1], Маллаева Ф. У.[1]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan;
zeb1957niso@gmail.com, nodira1981@mail.ru, umida_9202@mail.ru

В данной работы строится функции Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области $D \subset R^3, D = \{y = (y_1, y_2, y_3) : y_3 > 0\}$ и изучается eӌ свойства.

In this work, we construct the Carleman function for second-order polyharmonic functions (i.e., for biharmonic functions) defined in the domain $D \subset R^3$,
$D = \{y = (y_1, y_2, y_3) : y_3 > 0\}$.

Дана бесконечная область D трехмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывных вплоть до границы области со своими производными первого порядка гласить: Требуется показать, что если функция и ее нормальная производная ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \to \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Эта задача была предметом исследования работ М.А.Евграфова, И.А.Чегис и А. Ф. Леонтьевевым, И.С.Аршоном и др. В 1960 году М.А.Евграфов и И.А.Чегис доказали следующую теорему

Теорема 1. Пусть $u(r, \varphi, x)$ гармоническая функция в цилиндре $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < x < \infty$. Если выполнены условия

$$u(a, \varphi, x) = 0, \left|\frac{\partial u}{\partial r}(a, \varphi, x)\right| < c,$$

$$\underset{(r,\varphi)}{max} |u(r, \varphi, x)| < c\exp\exp\frac{\pi\,|x|}{2\,(a+\varepsilon)}\ , \varepsilon > 0$$

тогда $u(r, \varphi, x) \equiv 0$.

В данной работе строится функция Карлемана для бигармонических функций второго порядка определенных в области $D \subset R^3$, $D = \{y :\ y = (y_1, y_2, y_3)\} \subset R^3$.

Функции $\varphi_\sigma(y, x)$ и $\Phi_\sigma(y, x)$, при $s > 0, \sigma \ge 0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi_\sigma\,(y, x)$$

$$= c_0 \int_0^\infty Im\left[\frac{exp\left[-\sigma\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+1\right)^{\rho_1}\right]}{\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3-x_3\right)\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+x_3\right)^2}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}},$$

$\Phi_\sigma(y,x) = {}_0r^2\varphi_\sigma(y,x)$, где $A_3 = 2^{-1}\pi\omega_3$, ω_3-площадь единичного шара в $R^3, \omega = i\sqrt{u^2+s}+y_3$, $\sigma > 0$, $y_3 > 0$, $0 < \rho_1 < 1$, ${}_0 \in R$.

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma\,(y, x)$ является гармонической функцией по переменной y при $\alpha > 0$.

Теорема 2. Функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ можно представит в виде $\Phi_\sigma(y,x) = c_0r + c_0r^2G_\sigma(y,x)$ и имеет место равенство

$$\Phi_\sigma(y,x) =$$

$$c_0r^2\int_0^\infty \frac{((y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-(u^2+s))-2(y_3+x_3)(u^2+s))\sin(\sigma\lambda)du}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2\exp(\sigma A_1)\sqrt{u^2+s}}$$

$$+c_0r^2\int_0^\infty \frac{(((y_3+x_3)^2-(u^2+s)+2(y_3-x_3)(y_3+x_3)))\cos(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)\exp(\sigma A_1)}du,$$

где $c_0=\frac{8\pi x_3^2}{\exp(\sigma(x_3+1)^{\rho_1})}$, $_1=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}\cos(\sigma\rho_1 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)})$,

$$\lambda=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}sin(\sigma\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}),$$

в дальнейшем обозначим через c_0 - постоянные числа.

Теорема 2. Для функция, $\Phi_\sigma(y,x)$ справедлива оценка

$$|\Phi_\sigma(y,x)|\le \frac{c_0r^2}{\alpha r_1^2\exp{(\sigma A)}}$$

где $=\left|(y_3+1)^2+s\right|^{\frac{\rho_1}{2}}cos\sigma\ \rho_1 arctg\frac{s^{\frac{1}{2}}}{(y_3+1)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршон И. С. Евграфов М. А. О росте функций гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности с нормальной производной, ДАН СССР. 1962. Т.142, No. 4. С.762-765.
2. Ярмухамедов.Ш,Я. Задача Коши для полигармонического уравнения, Доклады РАН. 2003. Т. 388. С. 162-165.
3. Евграфов М.А., Чегис И.А. Обобшение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве, Доклады Академии наук СССР. 1960. No. 134. С. 252–262.
4. Жураева Н.Ю, Жураева У.Ю, Саидов У.М Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве, Uzbek Mathematical Journal. 2011. є3. С. 108-115.
5. Жураева У.Ю. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных, Известия вузов. Математика. 2022,No.10. С.42-65.
6. Jurayeva. U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems, Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol. 66. No. 3. C. 54-61, DOI:10. 29229/uzmj.

Задача Коши для уравнения пантографа

Акылбаев М. И., Аширбаев Н. К., Корокбаев А. У., Аманжолова А. Е.

[1] Университет дружбы народов им.академика А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан
abdisalam@mail.ru, ank_56@mail.ru

Рассмотрим в пространстве $H=L^2(0,1)$ задачу Коши

$$y'=\lambda y(x^\alpha), \tag{1}$$

$$y(0)=0, \tag{2}$$

где $0<\alpha<2$ - фиксированная постоянная, λ - спектральный параметр. Нетрудно убедиться, что обратный оператор задачи $(1)-(2)$ существует и является оператором Гильберта-Шмидта, поэтому его квадрат будет ядерным оператором, обладающим конечным следом. С помощью формулы Гаала [1] нам удалось вычислить этот след.

Теорема 1.

а) Если $0<\lambda<1$, то $trK^2=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, б) Если $1 < \lambda < 2$ то $trK^2 = 0$.

Замечание 1. При $\alpha \geq 2$ обратный оператор K не является оператором класса Гильберта - Шмидта, поэтому наши методы бессильны.

Замечание 2. Функция $y(x) = x^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$ является собственной для задачи Коши (1) – (2).

Такие уравнения, как уравнение пантографа, начиная с 1970 годов, изучались в работах Т.Като [1], А.Изерлеса [2] и других авторов. Уравнение пантографа возникает в самых разных областях: астрофизике (В.А.Амбарцумян, поглащение света межзвездной материей), технике (Дж.Окендон, А.Б.Тайлер, 1971, математическая модель кантактного провода электроснабжения подвижного состава), биология (А.Дж.Холл, Г.С.Уэйк, 1989, моделирование процесса роста и деления клеток). В этих работах рассматривались вопросы разрешимости национальной задачи, асимптотического поведения решения на бесконечности, существования периодических и почтипериодических решений, в основном для уравнения первого порядка уравнения пантографа $\dot{y} = ay(t) + by(t)$ и различные обобщения.

В настоящей работе методами работ [1],[3] исследована задача Коши

$$\dot{y}(x) = \lambda y(\alpha x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

$$y(0) = 0, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ - фиксированная постоянная, λ - спектральный параметр. Обратный оператор t задачи (3) – (4) является оператором Гильберта-Шмидта, поэтому его квадрат будет ядерным, обладающим конечным следом. Имеет место следующая

Теорема 2.

а) если $0 < \alpha \leq 1$, то $trA^2 = 0$,

б) если $\alpha > 1$, то $trA^2 = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Если ядерный оператор Вольтерров, то по теореме Лидского [5] его след равен нулю, поэтому имеет место неравенство $0 < \alpha \leq 1$. Достаточность этого условия следует из теоремы Нерсесяна [3].

Литература

1. Brislawn C. Kernels of trace class operators C. Brislawn, American Mathematical Socicty. -vol.104, no. 4. -Desember 1988-P. 1181-1190

2. Iserbess A. On the generalized functional-differential equation, A.Iserbess, Europian J/Appl. Math-1993.N4-P.1-38.

3. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнении типа Вольтерра, А.В.Нерсесян, ДАН СССР-1964-Г.155, N5-С. 1006-1009

4. Kato T., Mcleod J.B., Functional-differential equation, Bull.Amer. Math Soc-1971-Vol.77, N6-P.891-937

5. Лидский В.Б. Несамосопреженные операторы. Имеющие след, В.Б. Лидский, ДАН СССР-1959-Г.125, N3-с.485

Интегрирование уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе функций конечной плотности

Балтаева И.И[1]**, Хасанов М.М** [1]**, Азимов Д.Б.**[1]

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;

iroda-b@mail.ru, hmuzaffar@mail.ru, doniyor.azimov.97@bk.ru

В данной работе рассматривается применение обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе функций конечной плотности.

Модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ) отрицательного порядка представляет собой важный объект исследования в теории интегрируемых систем. Оно возникает как часть негативной иерархии мКдФ и характеризуется наличием кубической нелинейности, что отличает его от классического уравнения КдФ. Особый интерес данный класс уравнений представляет в связи с их интегрируемостью, существованием бесконечного числа законов сохранения и применением метода обратной задачи рассеяния.

В данной работе рассматривается следующее уравнение мКдФ отрицательного порядка

$$\begin{cases} \rho_{xx} = -u^2 \\ u_{xt} + \alpha u + 2\rho_{xt} u = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{1}$$

При начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $u_0(x) \to c$ при $x \to \pm\infty$, $c \in R$. Здесь начальная функция обладает следующими свойствами: 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u_0(x) - c|\,dx < \infty$$

.

2. Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно 2N простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ...\xi_{2N}(0)$.

Предполагаем, что функции $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$ обладают достаточной гладкостью и достаточно быстро стремятся к своим пределам при $x \to \pm\infty$ так, что

$$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty)), \qquad \rho \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times (0,\infty)),$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \rho_{xt}(x,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\big(|u(x,t) - c| + |u_x(x,t)| + |u_t(x,t)| + |u_{xx}(x,t)|\big)\,dx < \infty, \; t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

В данной работе получены представления для решений $u(x,t)$,$\rho(x,t)$ задачи (1)-(3) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$

Отметим, что аналогичная задача для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ), а также для уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе быстро убывающих функций рассматривались в работах [1], [2]. В классе периодических функций указанные уравнения исследовались в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Wadati, The exact solution of the modified Korteweg-deVries equation, J. Phys. Soc. Japan, 32 (1972), 1681.
2. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Atanazarova Sh. E. Soliton solutions of the negative order modified Korteweg–de Vries equation, Известия Иркутско го государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 63–77. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.63
3. Уразбоев Г. У., Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М.. Интегрирование модифи цированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций, Теоретическая и математическая физика. 2023. Т. 217, 2. С. 317–328

Об однозначной разрешимости одной периодической краевой задаче для трехмерного уравнения чаплыгина в неограниченном параллелепипеде

Джамалов С. З.[1],Туракулов Х. Ш.[2]
Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
Кокандский государственный университет;
siroj63@mail.ru, hamidtsh87@gmail.com

В данной работе с использованием результатов работ [1-4] изучаются однозначная разрешимость обобщенного решения одной периодической краевой задаче для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области $G = (-1,1) \times (0,T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим уравнения Чаплыгина:

$$Lu = \mathrm{K(x)}u_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \tag{1}$$

Здесь $xK(x) > 0$ при $x \neq 0$, где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Периодическая краевая задача. Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \tag{3}$$

Далее будем считать, что

$$u(x,t,z) \to 0 \text{ и } \quad u_z(x,t,z) \to 0 \quad \text{при}$$

$$|z| \to \infty. \tag{4}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$,

Теорема *Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1):* $2a(x,t) + \mu K(x) \geq \delta_1 > 0, \mu\ c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu - const > 0$, $c(x,0) = c(x,T)$ *для всех* $x \in [-1,1]$. *Тогда для любой функции* $f \in W_2^{1,3}(G)$ *такой, что* $f(x,0,z) = f(x,T,z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(4) из пространства* $W_2^{2,3}(G)$ *и для решения задачи (1)-(4) справедливы следующие оценки:*

I) $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} \leq c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}$

II) $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} \leq c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}$

где через $c_i\, i = 0, 2-$ обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропная пространство Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda, \qquad (A)$$

здесь $W_2^2(Q)$ пространства Соболева, где $\hat{u}(x,t,\lambda)$ есть преобразование Фурье, функции $u(x,t,z)$ по переменным z.

Литература

1. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. Казахский математ. журнал. 2018. Т. 18, N.2. С. 59–70.
2. Джамалов С.З.,Ашуров Р.Р.,Туракулов Х.Ш. Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области. Вестник КРАУНЦ. 2021, Т. 32, N.2, С.18-27.
3. Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh. and Sultanov M.S. On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain. Lobachevskii journal of mathematics. 2022. Vol. 43(11), P. 3104-3111.
4. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа: Монография. Ташкент.2021, с.176.

Об одной линейной обратной задаче с полунелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в параллелепипеде

Джамалов С. З.[1], Халхаджаев Б. Б.[2], Юсупов Ш. Б. [1]

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;

Ташкентский институт менеджмента и экономики;

siroj63@mail.ru, xalxadjaev@timeedu.uz, sherzod.yusupov.2020@inbox.ru

Как нам известно, к настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов второго порядка [1]. Линейные обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка в плоскости изучены в работе [2]. Такие задачи для трехмерных и многомерных уравнений смешанного типа второго порядка как первого, так и второго рода с локальными и нелокальными условиями в ограниченных областях, изучены и развивались в работе [3].

Для уравнений смешанного типа высокого порядка линейные обратные задачи практические не исследовались. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, четвертого порядка в параллелепипеде. Для этой задачи методами Фурье, “$\varepsilon-$ регуляризации”, априорных оценок, последовательности приближений и сжимающихся отображений доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения линейной обратной задачи в анизотропном пространстве Соболева.

В области $G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t); 0 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty\,; 0 < y < \ell; \}$ рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x,t,y). \tag{1}$$

Здесь $Pu = \sum\limits_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u; \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}\,; \quad Nu = u_{yyyy}$

где $K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $a, b, c - const > 0$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $(i = 0,1,2,3,4)$. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0,T]$ не налагается никаких ограничений [4].

В дальнейшем будем предположить, $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$, где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)-$ заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит к определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,y),\ h(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующими полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^q u\big|_{t=0} = D_t^q u\big|_{t=T};\ \ q = 0,1,2, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0;\, u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0;\, u_{yy}\big|_{y=0} = u_{yy}\big|_{y=\ell} = 0 \tag{4}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \tag{5}$$

и вместе с функцией $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{\,(u,h)|\ u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}.$$

Здесь через $W_2^{4,3}(G)$ обозначено анизотропная пространства Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{4,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \mu_k^4\right)^3 \|u_k(x,t)\|^2_{W_2^4(Q)}\,,$$

где функции $u_k(x,t)$; $k = 1, 2, 3, ...$ являются коэффициентами Фурье функции $u(x,t,y)$, по системам $Y_k(y) = \{\sqrt{2\ell^{-1}} \sin \mu_k y\}$, $\mu_k = \pi k \ell^{-1}$, $k = 1,2,3,...$,
через $W_2^l(Q)$ обозначено пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^4(Q)} = \sum_{|\alpha| \le 4} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt,$$

где $\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$ есть обобщенная производная по переменным x и t.

Литература

1. Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.с-67.
2. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. Изв. вузов. Математика.2011, No 2, с.71-85.
3. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021г, с.176.
4. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ,1983.

Обратная коэффициентная задача для уравнения диффузии с кусочно-временным переменным

Дурдиев Д. К.[1], Холиков С. Х.[2]

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, ул. Университетская, д. 46, Ташкент, 100170, Узбекистан;

Навоийский государственный университет, ул. Ибн Сино, д. 45, Навои, 210100,Узбекистан;

d.durdiev@mathinst.uz[1], xamroqul@nspi.uz[2]

Пусть $D := \{(x,\ t)\ \in [0,1]\times[0,\ \infty)\}$ – прямоугольная область. В этой статье мы рассмотрим следующую обратную задачу определения пары функций $\{u(x,t), q(t)\}$, удовлетворяющих уравнению диффузии с кусочно-непрерывным временным переменным

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - bu(x,[t]) + q(t)u(x,t) + f(x,[t]), \qquad (1)$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \qquad (2)$$

граничным условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \qquad (3)$$

и условию переопределению

$$\int\limits_0^1 \omega(x)u(x,t)dx = h(t), \quad t \geq 0, \qquad (4)$$

где $a > 0$ и b – заданные постоянные, а f, φ, ω и h – достаточно гладкие функции; $[\cdot]$ обозначает наибольшую целую функцию.

Определение 1. Функция $u(x,t)$ называется решением прямой задачи (1) - (3), если она удовлетворяет следующим условиям:
(i). $u(x,t)$ непрерывна в области D;
(ii). Производные u_t и u_{xx} существуют и непрерывны в D, за исключением, возможно, точек (x,n), где $n = 0,1,2,\ldots$, в которых существуют односторонние производные;
(iii). $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в D, за исключением точек (x,n), а также удовлетворяет условиям (2) и (3).

В работах [1], [2] изучены обратные задачи определения коэффициента для уравнения (1) при $b = 0$ и $f(x,[t]) = f(x,t)$. Обратные задачи определения коэффициента и ядра памяти в уравнении диффузии целого и дробного порядков были изучены в [3]-[5].

Предположим, что заданные функции $\varphi(x)$, $f(x,t)$, $\omega(x)$ и $h(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

E1) $\varphi(x) \in C^2(0,1)$, $\varphi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$,

E2) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ и для $t \in [0,T]$, $f(\cdot,t) \in C^2[0,1]$, $f_{xxx}(\cdot,t) \in L_2(0,1)$, $f(0,t) = f(1,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0$;

B1) $\omega(x) \in C^1[0,1]$, $\omega''(x) \in L_2[0,1]$, $\omega(0) = \omega(1) = 0$;

B2) $h(t) \in C^1[0,T]$ и $|h(t)| \geq h_0 > 0$, h_0– заданное число, $\int\limits_0^1 \omega(x)\varphi(x)dx = h(0)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия E1)-E2) и $-a^2\pi^2 < b < a^2\pi^2\left(\frac{e^{a^2\pi^2}+1}{e^{a^2\pi^2}-1}\right)$. Тогда существует единственное решение прямой задачи (1)-(3) в области D.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия B1), B2). Тогда для достаточно малого числа $T^* \in (0,T)$, существует единственное решение обратной задачи (1)-(4) такое, что $q(x) \in C[0,T^*]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kanca F. The inverse coefficient problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions, J. In equal. and Appl., 1–12 (2013).
2. Kanca F. Inverse Coefficient Problem of the Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Overdetermination Conditions, Abstract and Applied Analysis 5, 1–7 (2013).
3. Дурдиев Д.К., Нуриддинов Ж.З. Единственность задачи определения ядра в интегро-дифференциальном параболическом уравнении с переменными коэффициентами, Изв. вузов. Матем. 11, 3–14 (2023).
4. Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. Обратная задача определения ядра интегро дифференциального уравнения дробной диффузии в ограниченной области, Изв. вузов. Матем. 10, 22–35 (2023).
5. Jumaev J. J., Durdiev D. K. On determination of the coefficient and kernel in an integro-differential equation of parabolic type, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications 11 (1), 49–65 (2023).

О существовании решения задачи коши для уравнения поперечных колебаний балки

Дурдиев У.Д.[1,2]

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

Бухарское отделение института Математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан;

umidjan93@list.ru

Рассмотрим бесконечную балку, под действием внешней силы

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t) \in D = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, t > 0\}$.

Начальные условия для него зададим следующим образом:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Через $\Omega_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t \le T\}$ обозначим полосу толщиной T, где T>0 Ц произвольное фиксированное число.

Задача. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую соотношениям (1), (2) и условию

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\Omega_T) \cap C^{0,1}_{x,t}(\bar{\Omega}_T),$$

при заданных числах a, T и достаточно гладких функциях $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Пусть $C^m_b(\mathbb{R})$ Ц класс функций, ограниченных вместе с их производными вплоть до m-ого порядка в $\mathbb{R}$ функций, а $C^{m,k}_{bx,t}(\Omega_T)$ Цкласс функций, ограниченных вместе с их производными по x вплоть до m-ого порядка и k раз по t непрерывно дифференцируемых и ограниченных при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ в области Ω_T функций.

Имеет место следующая теорема существования.

Теорема. Если $\varphi(x) \in C^4_b(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^2_b(\mathbb{R})$, $f(x,t) \in C^{2,0}_{bx,t}(\Omega_T)$, кроме того функции $\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, $x^4\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$, $\psi(x)$, $x^2\psi(x)$, $x^4\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, $f(x,t)$, $x^2 f(x,t)$, $x^4 f(x,t)$, $f_x(x,t)$, $f_{xx}(x,t)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty,\infty)$, то существует классическое решение задачи Коши (1), (2) из класса $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\Omega_T) \cap C^{0,1}_{x,t}(\bar{\Omega}_T)$.

LITERATURE

1. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A., Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1966
2. Sabitov K.B., Cauchy problem for the beam vibration equation, Differential Equations, 2017, Vol. 53, No. 5. P. 658–664.

Краевая задача для уравнения четвертого порядка смешанно-составного типа

Гозиев К. С.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
goziyevqobiljon@gmail.com

В области рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(U_{xx}+U_{yy})+C(x,y)U=0, & (x,y)\in D_1, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(U_{xx}-U_{yy})=0, & (x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $C(x,y)$ – заданная функция, D_1 – область ограниченная нормальным контуром и отрезком $[A(0,0),\, B(1,0)]$ оси x. Через D_2 обозначим область ограниченную отрезком (AB) и характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$ уравнение $U_{xx}-U_{yy}=0$. Совокупность областей D_1 и D_2 вместе открытом отрезком (AB) обозначим через D. Пусть

$$U|_{\Gamma}=f_1(x,y), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f_2(x,y), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_1(x), \quad 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_{AC}=\psi_3(x), \quad 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x), \quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_4(x), \quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{7}$$

здесь n – внешняя нормаль к границе области D, $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$, $\psi_j(x)$ $(j=\overline{1,4})$ – заданные функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, обеспечивающим ниже требуемую гладкость решения.

Задача D. Требуется определить функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1^0. Она является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y\neq 0$.

2^0. Непрерывна в $\bar{D}$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

3^0. Удовлетворяет краевым условиям (2) – (7).

4^0. Функция $U(x,y)$ и ее производные до второго порядка включительно удовлетворяют на отрезке AB непрерывным условиям склеивания.

Отметим, что различные краевые задачи для уравнения (1) были изучен в работе [1] и уравнения составного типа рассмотрено в работе [2].

Доказано теорема единственности методом интегралов энергии, а существования решения доказывается с использованием методов интегральных уравнении [3,4].

LITERATURE

1. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-состав-ного типов. Ташкент: Фан, 1979.
2. Газиев К. С. Задача Дирихле для уравнения четвертого порядка составного типа // ДАН РУ. 1995, No. 11-12. С. 4–7.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1988.
4. Мусхелешвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: ГИФМЛ, 1962.

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа второго рода в области - эллиптическая часть которой горизонтальная полоса Зуннунов Р. Т.[1], Бектошева Ш. А.[2]

[1]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[2]Кокандский Государственный Универститет, Коканд, Узбекистан;
zunnunov@mail.ru, shohsanambektosheva5@gmail.com

В данной работе рассматривается нелокальная задача для уравнения смешанного типа второго рода в области эллиптическая часть которой горизонтальная полоса. Задачи такого рода возникают при изучении вопроса о бесконечно малых изгибаниях поверхностей вращения и винтовых поверхностей, Гауссова кривизна которых меняет знак в рассматриваемой области [1,2]. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + signy|y|^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где
$\Omega_1 = \{(x,y):\ -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox а также характеристиками

$$AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, \quad BC:\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1) выходящих из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$.

Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad l_1 = \{(x,y) : y = 0, 1 < x < +\infty\},$$

$$l_2 = \{(x,y) : y = 0, -\infty < x < 0\}, \quad l_3 = \{(x,y) : y = 1, -\infty < x < +\infty\}.$$

Задача T^{∞}. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup \overline{l_1} \cup \overline{l_2} \cup l_3 \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) удовлетворяет условиям

$$u(x,0) = \varphi_1\,(x)\,, -\infty < x \le 0; u(x,0) = \varphi_2\,(x)\,, 1 \le x < +\infty,$$

$$u(x,1) = \varphi_3\,(x)\,, -\infty < x < +\infty$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u\,(x,y) = 0,\ \text{равномерно по } y \in [0,1]\,,$$

$$u\,[\theta_0\,(x)] = au\,(x,0) + \omega\,(x)\,, 0 \le x \le 1,$$

где $a \leq 1$, а $\varphi_i(x)$, $(i = 1, 2, 3)$, $\omega(x)$ - заданные функции, причем $\omega(x) = x \cdot \omega^*(x)$, $\omega^*(x) \in C^1\left(\overline{l_0}\right) \cap C^2(l_0)$, $\varphi_i(x) \in \left(\overline{l_i}\right)$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi_i(x) = 0, \theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{1}{1-2\beta} \cdot \frac{x}{2}\right]^{1-2\beta}\right)$.

На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания которые появляются при решении прямой задачи теории сопла Лаваля:

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad u_y(x, -0) = -u_y(x, +0). \tag{2}$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. Севостьянов Г.Д. Обтекание профиля звуковой струей газа, ИАН СССР. Серия мех. и жид. газа. 1966. Т 30. *No* 2. − С. 53-59.
2. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва. Наука. 1973. −712 с.

Существование решений обратных задач для эллиптических уравнений второго порядка

Исламов Е.А.[1], Худойкулов Ш.Ш.[2]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
72islamov@gmail.com, xudoykulov1194@gmail.com

В данной работе рассматривается существование решений многомерных обратных задач о восстановлении правой часты эллиптического уравнения с частными производными второго порядка.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

с коэффициентами a^{jk}, a^j, a классе $\mathrm{C}^{\lambda}(R^n)$, удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \varepsilon_0 |\xi|^2$$

для всех $\xi \in R^n$ и $\mathrm{x} \in \Omega$.

Пусть Ω' - область в $\mathrm{R}^{\text{n-1}}$ с границей $\partial\Omega'$ класса $\mathrm{C}^{2+\lambda}$. Расмотрим область

$$\Omega = \{\mathrm{x,x'} \in \Omega', \quad \gamma_1(x') < \gamma_0(x')\}$$

где γ_0, γ_1 функции класса $C^{2+\lambda}(\overline{\Omega'})$ удовлетворящие следующем условиям:

$\gamma_1 < \gamma_0$ на $\overline{\Omega'}$, $\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial x_j} = 0, \quad (\tau = 0, 1)$ на $\overline{\Omega'}$, $j = 1, ..., n-1$.

Обозначим через Γ_0 часть $\partial\Omega$ являющуюся графиком γ_0. Зафиксируем весовую функция ρ, такую что

$0 < \varepsilon_0 < \rho$ на Γ_0, $|\rho|^{\lambda}(\Omega) \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$,

где $|\rho|^{\lambda}(\Omega)$-норма функции ρ в $\mathrm{C}^{\lambda}(\Omega)$.

Рассмотрим задачу об отыскании пары функций (u, q) удовлетворяющих условиям:

$$\mathrm{Au + qu} = 0 \text{ на } \Omega, \tag{1}$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{g} \text{ на } \partial\Omega, \quad \mathrm{u}_{x_n} = h \text{ на } \Gamma_0, \tag{2}$$

Получени оценки шаудеровского типа и теоремы единственности решения задачи (1), (2). Такие же рузултати поличени в обратной задачи об определении (u, q) из условий

$$\mathrm{Au} = \mathrm{pq} + \mathrm{f} \text{ на } \Omega, \tag{3}$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{g} \ \text{ на } \partial\Omega, \quad \mathrm{u}_{x_n} = h \text{ на } \Gamma_0, \tag{4}$$

В работе [1] получени оценки шаудеровского типа и теремы единственности решения задачи (3)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений. Дифференциальные уравнения. 1987. Т-23. N7 С/1376-1383

Краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа третьего порядка в бесконечной трехмерной области

Исломов Б.И.[1], Аликулов Е.К.[2]

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
islomovbozor@yandex.com, yolqinqodirovich@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x,0,z) & \text{в } \Omega_1, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x,0,z) & \text{в } \Omega_2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \left(\bar{\Omega}_1 \bigcap \bar{\Omega}_2\right)$ - область трехмерного пространства (x, y, z), ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_0 : x = 0, \ \ 0 \le y \le h, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\Gamma_1 : x = 1, \ \ 0 \le y \le h, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\Gamma_2 : y = h, \ 0 \le x \le 1, \ z \in (-\infty, +\infty),$$

$$S_1 : \ x + y = 0, \ y \le 0, \ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ z \in (-\infty, +\infty),$$

$$S_2 : \ \ x - y = 1, \quad y \le 0, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

где

$$\mu = const < 0. \tag{2}$$

Уравнения (1) является параболическим и гиперболическим в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Введем обозначения: $A(0,0,z) = \overline{\Gamma}_0 \cap \bar{S}_1$, $\ !(\frac{1}{2},0,z) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$, $B(1,0,z) = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{S}_2$, $\Omega_1 = \Omega \bigcap \left\{ \ (x,y,z) : x > 0, \ \ y > 0, \ \ z \in (-\infty, +\infty) \right\}$, $\Omega_2 = \Delta ABC$, $I = \left\{(x,y,z) : \ \ 0 < x < 1, \ \ y = 0, \ \ z \in (-\infty, +\infty)\right\}$, $l_0 = \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{S}_1$, $\ l_1 = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{S}_4$, $l_2 = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$, $\ D = \Omega \ \bigcap \ \{z = 0\}$, $\ D_i = \Omega_i \bigcap \{z = 0\}$, $\ (i = 1, 2)$, $\sigma_j = S_j \bigcap \{z = 0\}$, $(j = 1, 2)$, $\gamma_i = \Gamma_i \bigcap \{z = 0\}$, $\ (i = \overline{0, 2})$, $J = I \bigcap \ \{z = 0\}$.

Определение 1. $L\,(-\infty,+\infty)$ −множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $U(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})\cap\cap L(-\infty,+\infty)$; 2)$U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$, кроме того, функции $U_x\,(x,y,z)$ и $U_y\,(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях l_0, l_1 и l_2; 3) U_{xxx}, $U_{xzz}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2)\cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xy}\in C(\Omega_1)\cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xyy}\in C(\Omega_2)\cap L(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1).

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача AT. Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),\qquad U|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\;\;0\le y\le h,\;\;z\in(-\infty,+\infty),\tag{3}$$

$$U_x|_{\Gamma_0}=\Phi_3\,(y,z)\,,\quad 0\le y\le h,\;\;z\in(-\infty,+\infty),\tag{4}$$

$$U|_{S_1}=\Psi_1(x,z),\qquad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_1}=\Psi_2(x,z),\;\;0\le x\le\frac{1}{2},\;\;z\in(-\infty,+\infty),\tag{5}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=0,\tag{6}$$

где n - внутренняя нормаль, $\Phi_0(y,z)$, $\Phi_1(y,z)$, $\Psi_j(x,z)$, $(j=\overline{1,3})$− заданные функции, причем $\Phi_0\,(0,z)=\Psi_1\,(0,z)=0$, $\Phi_j(y,z)\in C\,([0;h]\times R)\cap L(-\infty,+\infty)$, $\Phi'_{jy}(y,z)\in C\,((0;h)\times R)\cap L(-\infty,+\infty)$, $(j=0,1)$, $\Phi_3(y,z)\in C\,([0,h]\times R)\cap C^2\,((0,h)\times R)\cap L(-\infty,+\infty)$, $\Psi_1(x,z)\in C^2\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty)$, $\Psi_2(x,z)\in C^1\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{|z|\to\infty}\;\Phi_i(y,z)=0,\;\;\forall y\in[0,h]\,,\,(i=\overline{1,3}),\tag{7}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Psi_k(x,z)=0,\;\;\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\,(k=1,2).\tag{8}$$

О предположениях относительно поведения функций $U(x,y,z)$ мы можем ввести следующие преобразования Фурье по переменной z:

$$u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y;z)\,e^{i\lambda z}dz.\tag{9}$$

Если функция

$$U\,(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\,(x,y;\lambda)\;e^{-i\lambda z}d\lambda\tag{10}$$

является решением задачи AT, то функция $u(x,y;\lambda)$ должна быть регулярным решением задачи AT_λ.

Применяя преобразование Фурье (10) к уравнению (1) и задачу AT, получим следующее уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{array}{lll} u_y-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\,u(x,0,\lambda), & x>0,\quad y>0, & \lambda\in(-\infty,+\infty)\,,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\,u(x,0,\lambda), & x>0,\quad y<0, & \lambda\in(-\infty,+\infty)\end{array}\right.\tag{11}$$

и **задаче** AT_λ**:** Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что

1) $u(x,y,\lambda)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\right)$; 2) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (11) в областях $D_k,\ (k=1,2)$; 3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{\gamma_0}=\varphi_0(y,\lambda),\quad u|_{\gamma_1}=\varphi_1(y,\lambda),\qquad 0\le y\le h,\quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \tag{12}$$

$$u_x|_{\gamma_0}=\varphi_2(y,\ \lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \tag{13}$$

$$u|_{\sigma_1}=\psi_1(x,\lambda),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=\psi_2(x,\lambda),\qquad 0\le x\le\frac{1}{2},\quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \tag{14}$$

где $\varphi_0(y,\lambda)$, $\varphi_1(y,\lambda)$, $\varphi_2(y,\lambda)$, $\psi_j(x,\lambda)$, $(j=1,2)-$ заданные функции, причем $\varphi_1(0,\lambda)=\psi_1(0,\lambda)$,

$$\varphi_i(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_i(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ (i=\overline{0,2}),$$

$$\psi_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)e^{i\lambda z}dz, \tag{15}$$

и

$$\varphi_i(y,\lambda)\in C\,[0;h]\cap C^1(0,h),\ (i=\overline{0,3}), \tag{16}$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\psi_2(x,\lambda)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2), (16), (17), то решение задачи AT_λ в области D существует и единственно.

Теорема 2. Пусть решение $u(x,y,\lambda)$ задачи AT_λ для уравнения (11) существует единственное решение и при больших значениях $|\lambda|$ допускает оценку $u(x,y;\lambda)=O\left(1\Big/|\lambda|^k\right)$, $k>3$. Тогда в области Ω решение задачи AT для уравнения (1) существует и находится формулой (10).

Теорема 2 доказывается с использованием свойства преобразований Фурье и леммы Римана[4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа .Ташкент: кФанъ. 1986. 220 с.
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: кФанъ. 1974. 156 с.
3. Islomov B.I., Alikulov Y.K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain International journal of applied mathematics, 2021, Vol.34, No.2, pp.158-170.
4. Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и Техника, 1987. 668 с.

Скорость детонационной волны в одномерной модели с учётом потерь импульса

Жабборов Н.М. [1], Рауфов Х.Р. [2]
[1]Tashkent Financial Institute, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
jabborov61@mail.ru humoyunmath1999@gmail.com

В данном тезисе исследована скорость детонационной волны в одномерной модели с учетом потерь импульса. Процесс газовой детонации рассмотрен на основе классической модели ZND с добавлением сил трения в уравнения Эйлера. Химическая реакция описана законом Аррениуса. Решение управляющих уравнений в виде бегущей волны ищется как $U = U(\xi) = (\rho, u, p, \lambda)^T(\xi)$, где $\xi = x - Dt$.

$$(\rho(u - D))' = 0,$$

$$(p + \rho(u - D)u)' = -\frac{f}{\phi},$$

$$(\rho(u - D)e + pu)' = 0,$$

$$(u - D)\lambda' = \omega.$$

Эту систему уравнений необходимо рещать с учетом условий на скачке $\xi = 0$

$$\rho(0) = \rho_s(D), u(0) = u_s(D), p(0) = p_s(D), \lambda(0) = 0,$$

условиям на бесконечности при $\xi = -\infty$, то есть $u = 0$ и $\lambda = 1$.

Методы численного решения Для интегрирования системы уравнений в новых переменных r, s, z, λ переменялся метод событий(event method), позволяющий автоматически фиксировать выполнение ключевых условий Контролировались условия типа $r - \mu s = 0$ и асимптотическое приближение к равновесию($u \to \infty, \lambda \to 1$).Такой подход обеспечивает устойчивое численное определение режимов детонацииподи различных значениях скорости и параметров потерь.

Потери на трение существенно изменяют характер детонационной волны: появляется критическая скорость D_s ограничивающая область существования решений.

При $D_s < D < D_{CJ}$ решения проходят через звуковую точку; при $c_a < D < D_s$ реализуются слабые детонации без звуковой точки.

Увеличение коэффициента потерь c_f ведчт к снижению скорости детонации и при критическом значении полностью подавляет еч существование.

Использование метода событий в численных расччтах позволяет эффективно и устойчиво определять стационарные профили и исследовать границы существования детонационных режимов.

References

1. R.E.Semenko, L.M.Faria, A.R.Kasimov,B.S.Ermolayev.Set -valued solutions for non-ideal detonation. Shock-waves,2016.Vol.26.No.2.P.141-160

2. Зелдович Я.Б.Б Компанец А.С.ТЕОРИЯ ДЕТОНАЦИИ, Москва, Книга по требованию,2013.

3. J.B.Bdzil and D.S.Stewart.Theory of detonation shock dynamics.Vol, 6.

4. I.Bralovskiy,G.Sivashinskiy.Hydraulic resistance and multiplicity of detonation regims,Combustion and flame.122(1):130-138,2000.

Об одном методе решения краевой задачи с несимметричными условиями для уравнения с младшим членом в R^3

Жамалов Б. И., Хамитов А. А.

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
b-i-jamalov@mail.ru, azizbek.khamitov.93@mail.ru

Abstract. In this paper, a boundary value problem with asymmetric conditions for an equation with one junior term in three-dimensional space is considered. The uniqueness of the solution to the problem is proved using the method of energy integrals, and the existence is proved using separation of variables.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1-2].

В работах [3-4] исследованы краевые задачи с несимметричными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] = u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} + \mu u = 0, \tag{1}$$

где $p, q, r, \mu \in R$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D из класса

$$u\,(x, y, z) \in C^{3,2,2}_{x,y,z}\,(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\left(\overline{D}\right),$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} u\,(x,0,z) = u_y\,(x,q,z) = 0, \\ u\,(x,y,0) = u_z\,(x,y,r) = 0, \end{cases} \quad x \in [0,p]\,,\ y \in [0,q]\,,\ z \in [0,r]\,, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u\,(0,y,z) = \psi_1\,(y,z)\,,\ u\,(p,y,z) = \psi_2\,(y,z)\,, \\ u_x\,(p,y,z) = \psi_3\,(y,z)\,, \end{gathered} \quad y \in [0,q]\,,\ z \in [0,r]\,, \tag{3}$$

где $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции в области $\overline{D}$.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условия $\mu \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеют два различных решения: $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда функция $u\,(x, y, z) = u_1\,(x, y, z) - u_2\,(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u\,(x, y, z) \equiv 0$ в области $\overline{D}$. Для этого предположим, что $u\,(x, y, z) \neq 0$ и обе части уравнения (1) умножим на $u\,(x, y, z)$, тогда получим

$$u\,L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\,(u\,u_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z}\,(u\,u_z) + u_z^2 + \mu u^2 = 0. \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_0^q\int\limits_0^r u_x^2\,(0,y,z)\,dydz + \iiint\limits_D u_y^2\,(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_D u_z^2\,(x,y,z)\,dxdydz + \\ + \iiint\limits_D \mu u^2\,(x,y,z)\,dxdydz = 0. \end{gathered}$$

Пусть $\mu = 0$, тогда $u_y(x,y,z) = 0$ и $u_z(x,y,z) = 0$. Отсюда имеем $u(x,y,z) = f(x)$, здесь $f(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей уравнению (1) и условиям задачи A. Подставляя в уравнение (1), имеем $f'''(x) = 0$. Решение дифференциального уравнения имеет в виде $f(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$. Из однородных условий (3), т.е. $f(0) = f(p) = f'(p) = 0$, получим $f(x) = 0$. Следовательно, $u(x,y,z) \equiv 0$, в $\overline{D}$. Если $\mu > 0$, то из четвертого слагаемого, получим $u(x,y,z) \equiv 0$, в $\overline{D}$. Тогда в силу последнего, получим $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3} \in C\left(0 \le y \le q, 0 \le z \le r\right), i = \overline{1,3}$;

2) $$\begin{cases} \psi_i(0,z) = 0, \ \dfrac{\partial\psi_i(q,z)}{\partial y} = 0, \ \dfrac{\partial^2\psi_i(0,z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y,0) = 0, \ \dfrac{\partial\psi_i(y,r)}{\partial z} = 0, \ \dfrac{\partial^2\psi_i(y,0)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1,3},$$

то решение задачи A существует.

Теорема 2 существование решения задачи доказана методом разделения переменных. Решение построено явно в виде бесконечного ряда. Доказано, что ряд и его производные, входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014.-No 1(34). -С.56–65.

2. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах, Дифф.урав. 1982. -Т.18, No 4. -С.689–699.

3. Apakov Yu.P., Umarov R.A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43:3. -pp. 738–748.

4. Apakov Yu.P., Hamitov A.A. Third Boundary Value Problem for an Equation with the Third Order Multiple Characteristics in Three Dimensional Space, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, No 2. -pp. 523–532.

Об одном способе регуляризации некорректных краевых задач для гиперболических уравнений

Жиенбаева Г. А.[1]

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; jienbaevagauhar1905@gmail.com

Рассмотрим в области Q с границей ∂Q следующую краевую задачу

$$L(x,D)u(x) = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \tag{2}$$

где $L(x,D)$ - линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Положим для любого $\delta > 0$

$$\Gamma_\delta = \{x \in Q: \quad dist\{\,x,\ \partial Q\} \le \delta\} \tag{3}$$

Будем говорить, что $u(x) \in L_p^0(Q)$, $p \geq 1$, если $u(x) \in L_p(Q)$ и выполняется соотношение

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} |u(x)|^p \, dx = o(\delta), \ \ \delta \to 0. \tag{4}$$

Определение. Назовем L_p- решением краевой задачи (1)-(2) функцию $u(x) \in L_p^0(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле теории распределений.

Далее будем предполагать, что область Q является прямоугольником

$$Q = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x < a, \ \ 0 < t < T\right\},$$

а L является волновым оператором. Краевая задача (1)-(2) при этом записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{5}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial Q. \tag{6}$$

Как впервые отметили Д. Боржин и Р. Даффин [1] (см. также [2]), разрешимость задачи (5)-(6) зависит от того, является ли число $\theta = \frac{T}{a}$ рациональным или нет.

Из теоремы 1 работы [3] следует, что если $\theta = \frac{T}{a}$ не является рациональным числом, то L_p - решение краевой задачи (5)-(6) является единственным. В работе [4] доказывается, что если θ является алгебраическим (иррациональным) числом и правая часть уравнения (5) принадлежит некоторому классу Никольского, то L_p - решение краевой задачи (5)-(6) существует.

Исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. Рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{7}$$

из класса $C^2(\bar{Q})$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(x,T) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq a, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, при этом

$$\varphi(0) = \varphi(a) = \psi(0) = \psi(a) = 0.$$

Теорема 1. Если существует решение задачи (7) - (9), то оно единственно только тогда, когда $\sin a\pi m \neq 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$, т.е. когда отношение сторон $\theta = \frac{T}{a}$ прямоугольника Q является иррациональным числом. Это решение можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) \sin \mu_m x, \tag{10}$$

где

$$u_m(t) = \varphi_m \cos \mu_m t + \frac{\psi_m - \varphi_m \cos \alpha\pi m}{\sin \alpha\pi m} \sin \mu_m t, \quad \mu_m = \frac{\pi m}{a}, \ m = 1, 2, ... \tag{11}$$

Теорема 2. Если число $\theta = \frac{T}{a}$ является алгебраическим числом степени $n > 2$, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^5[0, \ l]$ и при $j = 0, \ 2, \ 4,$

$\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = 0$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = 0$ то существует единственное решение задачи (7) - (9) и оно определяется рядом (10).

Обозначим через $u_\alpha(x,t)$ решение для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}, \quad (x,t) \in Q \tag{12}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0,t) = u(a,t) = \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(a,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le t \le T; \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le a, \tag{14}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$- заданные достаточно гладкие функции, при этом

$$\varphi(0) = \varphi(a) = \psi(0) = \psi(a) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(a) = \psi''(0) = \psi''(a) = 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Если число $\theta = \frac{T}{a}$ является алгебраическим числом степени $n > 2$, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^5[0,\ l]$ и при $j = 0,\ 2,\ 4$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = 0$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = 0$ то существует единственное решение задачи (7) - (9) и оно определяется равенством $u(x,t) = \lim\limits_{\alpha\to+0} u_\alpha(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.G. Bourgin, R. Duffin, The Dirichlet problem for the vibrating string equation. Bull. Amer. Math. Soc. 1939, 45, No. 12, pp. 851–858.
2. Б.И. Пташник, Некоторые граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, Киев, Наукова думка, 1984.
3. Ш.А. Алимов, Об - решениях одной краевой задачи. Узбекский математический журнал, 1999, №1, стр. 3–9.

Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа, вирождающегося внутри области

Жураев Ф. М[1]

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М.Нахушева [1], В.М.Казиева [2], Р.Р.Ашурова и С.З.Жамалова [3], Б.Исломова и Ф.Жураева [4].

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y, ограниченная кривыми:

$$S_j:\ |x| = 1,\ 0 < y < 1,\ S_3:\ \ 0 < x < 1,\ y = 1,\ S_4:\ -1 < x < 0,\ y = 1,$$

$$\Gamma_j:\ |x| - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad \Gamma_{j+2}:\ |x| + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \quad y \le 0,$$

здесь и далее $x \ge 0$, при $j = 1$, $x \le 0$, при $j = 2$, причем $m < 0$.

Введем обозначения $\Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x,y):\ x > 0,\ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x,y):\ x < 0,\ y > 0\},\ \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x,y):\ x > 0,\ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x,y): \ x<0, \ y<0\}, \quad I_1 = \{(x,y): \ 0<x<1, \ y=0\},$$
$$I_2 = \{(x,y): \ -1<x<0, \ y=0\}, \ I_3 = \{(x,y): \ x=0, \ 0<y<1\},$$
$$\Omega_j = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^- \cup J_j, \ \Omega_3 = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup J_3, \quad A_j((-1)^{j+1},0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j,$$
$$C_j \left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2}; \quad -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4} \right)^{2/(2-m)} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, \ (j=1,2),$$
$$O(0,0) = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \ B_1(1,1) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3,$$
$$B_2(-1,1) = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, \ B_0(0,1) = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u\,(x,0)\,, & (x,y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u\,(x,0)\,, & (x,y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \quad p, \quad \rho_j, \quad \mu_j$ $(j=1,2)$−любые действительные числа, причем

$$m<0, \quad p>1, \quad \rho_j>0, \quad \mu_j>0, \ (j=1,2). \tag{2}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

Задача 1(2). Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3\right) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+\right) \cap C^2\left(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-\right)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j=1,2)$;

3) $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left(u|_{\Gamma_2} = f_1(x), \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0, \qquad u|_{\Gamma_3} = f_2(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \right), \tag{5}$$

где $\varphi_1(y), \ \varphi_2(y), \ g_1\,(x)\,, \ g_2\,(x)\,, \ (f_1\,(x)\,, \ f_2\,(x))$ − заданные функции, причем $g_1(-1) = \varphi_2(0), \ (f_2(1) = \varphi_2(0))\,,$

$$\varphi_j(y) \in C\,[0,1] \cap C^1\,(0,1)\,, \ (j=1,2), \tag{6}$$

$$g_1(x) \in C^1\left[0, \ \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \ \frac{1}{2}\right),$$
$$g_2(x) \in C^1\left[-1, \ -\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1, \ -\frac{1}{2}\right) \tag{7}$$
$$\Bigg(f_1(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2}, \ 0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$
$$f_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, \ 1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2}, 1\right) \Bigg). \tag{8}$$

Теорема. *Если выполнены условия (2), (6), (7), то в области* Ω *решение задачи 1 существует и единственно.*

При доказательство единствености решения задачи 1 важную роль играет следующая лемма.

Леммы. *Если* $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0, \quad \forall y \in [0,1]$, $g_1(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *и* $g_2(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, *то*

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j = 1, 2). \tag{9}$$

Лемма доказывается с помощью метода интегральной энергии.

Доказательства теоремы существования решения задачи 1 основана на теории вольтерских и фредгольмских интегральных уравнений.

Замечанме. Точно также как выше изложено, можно доказать теоремы единственность и существования решения задачи (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1976. 12(1). С. 103-108.
2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1978. 14(1). С.181-184.
3. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle, Uzbek Mathematical Journal. 2018. 3. pp. 63-72.
4. Исломов Б., Джураев Ф. Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области, "Уфимский математический журнал". 2022. 14(1). С. 41-56.

Об обратной задаче теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений дирака на полуоси в случае конечной плотности

Маматов А. Э.
Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
aemamatov@mail.ru

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2^2(0,\infty)$ вектор-функций, самосопряженный оператор Дирака D, порожденный дифференциальным выражением вида

$$dy = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix}0 & -\overline{q(x)}\\ q(x) & 0\end{pmatrix} y = \lambda y,$$

$$y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}, \ 0 \le x < \infty, \tag{1}$$

с граничным условием

$$y_1(0) = y_2(0), \tag{2}$$

где $m-$ масса, а функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x) - m| dx < \infty. \tag{3}$$

В качестве области определения этого оператора мы принимаем множество D_D всех вектор-функций f абсолютно непрерывных в каждом интервале $[0,a]$, $a>0$, таких, что $f, d(f)\in L_2^2(0,+\infty)$ и $f_1(0)=f_2(0)$. При $f\in D_D$ мы полагаем $Df=D(f)$. Обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) на полупрямой с граничным условием $y_1(0)=0$ рассматривалась в статье [1]. Обобщение на случай $2n-$компонентных векторов было получено в работе [2]. Для системы уравнений (1) с массой $m=0$ обратная задача решена в работе [3]. Прямая задача рассеяния для системы уравнений (1) с граничным условием (2) рассматривалась в работе [4].

В настоящей работе решается обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) с граничным условием (2). Если выполняется условие (3), то система уравнений (1) при действительных λ и $|\lambda|>m$ имеет специальные решения

$$f^+(x,\lambda)=\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1\end{pmatrix}e^{ikx}+\int_x^\infty \Gamma(x,y)\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1\end{pmatrix}e^{iky}dy,$$

$$f^-(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ i(k-\lambda)/m\end{pmatrix}e^{-ikx}+\int_x^\infty \Gamma(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ i(k-\lambda)/m\end{pmatrix}e^{-iky}dy$$

где $k=\sqrt{\lambda^2-m^2}$, $signk(\lambda)=sign\lambda$, ядро $\Gamma(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,y)+\sigma_3\frac{\partial}{\partial y}\Gamma(x,y)\sigma_3-U_0(x)\Gamma(x,y)+\sigma_3\Gamma(x,y)\sigma_3U=0,$$

и условиям

$$\Gamma(x,x)-\sigma_3\Gamma(x,x)\sigma_3=U-U_0,\quad \lim_{y\to\infty}\Gamma(x,y)=0,$$

где $\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $U_0=\begin{pmatrix}0 & \overline{q(x)}\\ q(x) & 0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}0 & m\\ m & 0\end{pmatrix}$, причем для элементов матрицы $\Gamma(x,y)$ справедливы оценки

$$|\Gamma_{ij}|\le\frac{C_1}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}},\;\; i\ne j;\;\; |\Gamma_{ii}|\le\frac{C_1}{(1+t)^{1+\varepsilon}},$$

C_1 и $\varepsilon-$положительные постоянные числа.

Под обратными задачами спектрального анализа понимается восстановление линейного оператора по тем или иным спектральными данными. Набор $(S(z),z_j,c_j)$ называется спектральными данными оператора D, где $S(\lambda)=\dfrac{f_2^- - f_1^-}{f_1^+ - f_2^+}$ функцией рассеяния задачи (1), (2),при этом

$$z_j=z(\lambda_j)=\lambda_j+i\sqrt{m^2-\lambda_j},\; j=\overline{1,n},\; c_j=\left[\frac{m^2}{z_j}\right]\frac{\gamma_j}{\dot f_1^+ - \dot f_2^+},\; j=\overline{1,n},$$

$\lambda_j\in(-m,m)-$собственные значение оператора D, $\gamma_j^{-1}=f_1^+=f_2^+-$ коэффициенты перехода дискретного спектра λ_j, $j=\overline{1,n}$.

Теорема. Уравнения Гельфанда-Левитана -Марченко

$$\Gamma(x,y)+\Omega(x+y)+\int_0^\infty\Gamma(x,s)\Omega(x+s)ds=0,$$

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix}\xi(x) & \overline{\eta(x)}\\ \eta(x) & \xi(x)\end{pmatrix}$$

где $y \geq x$ и

$$\xi(x) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} S(z)exp\left\{\frac{ix}{2}\left(z-\frac{m^2}{z}\right)\right\}\frac{dz}{z}$$
$$+\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{m}{iz_j} exp\left\{\frac{ix}{2}\left(z_j-\frac{m^2}{z_j}\right)\right\},$$

$$\eta(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(z)exp\left\{\frac{ix}{2}\left(z-\frac{m^2}{z}\right)\right\}\frac{dz}{z} + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n} c_j exp\left\{\frac{ix}{2}\left(z_j-\frac{m^2}{z_j}\right)\right\}$$

однозначно разрешимо в пространстве $L_1^{2,2}(x,+\infty)$. При этом решения-матрица $\Gamma(x,y)$ является, функция типа Шварца при $x,y \to +\infty$.

Литература

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния, Докл. АН СССР. - 1966. - Т.167, no 6. - С.1219-1222.
2. Гасымов М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнения Дирака порядка 2n, Тр. Моск. мат. об-ва. - 1968. - Т.19.- С.41-190.
3. Фам Л. В. Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака на полуоси// Линейные краевые задачи математической физики. Киев: Институт математики АН УССР, 1973.- С.174-207.
4. Маматов А.Э. Прямая задача теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений Дирака на полуоси в случае конечной плотности, Дифференциальные уравнения - 2024. - Т.60, no 3. - С. 298-311.

Построение решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка с младшими членами с помощью функции Грина

Меликузиева Д. М.

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; meliquziyevadilshoda@gmail.com

Abstract. In this work, a boundary value problem for a non-homogeneous equation involving fourth-order small terms is solved using the Green's function.

Краевые задачи для уравнений четвертого порядка, содержащих третью производную по времени, мало изучены [1-5].

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$, рассмотрим уравнение

$$v_{xxxx} - v_{yyy} + Av_{yy} + Bv_y + Cv = g_1(x,y), \tag{1}$$

где $A, B, C, p, q \in R,\ g_1(x,y)$- заданная достаточно гладкая функция.

Заметим, что заменой $v = ue^{\frac{A}{3}y}$, уравнения (1) преобразуется в следующий вид:

$$u_{xxxx} - u_{yyy} + a_1 u_y + a_2 u = g(x,y), \tag{2}$$

где $a_1 = \frac{A^2}{3} + B,\ a_2 = \frac{2A^3}{27} + \frac{AB}{3} + C,\ g(x,y) = g_1(x,y)e^{-\frac{A}{3}y}$.

Задача А. Найти решение уравнения (2) в области D из класса $C^{4,3}_{x,y}(D) \cap C^{3,2}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = u_x(p,y) = u_{xx}(0,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x)\,;\ \ u_y(x,0)=\psi_2(x)\,;\ \ u(x,q)=\psi_3(x)\,, \tag{4}$$

где $\psi_i(y)\,,\ i=\overline{1,3},\ g(x,y)-$ заданные достаточно гладкие функции, а также выполняются следующая условия согласования:

$$\psi_i(0)=\psi_i{}'(q)=\psi_i''(0)=\psi'''{}_i(q)=\psi_i^{(4)}(0)=0,\quad i=\overline{1,3},\quad g(0,y)=0. \tag{5}$$

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условия $a_2\geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеют два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}\right)+u_{xx}^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(-uu_{yy}+\frac{1}{2}u_y^2+\frac{1}{2}a_1u^2\right)+a_2u^2=0. \tag{6}$$

Интегрируя тождество (6) по области D. Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_{xx}^2dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_0^p u_y^2(x,q)\,dx+a_2\int\limits_0^p\int\limits_0^q u^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Если $a_2>0$, из третьего слагаемого, получим $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\bar{D}$. При $a_2=0$, тогда $u_{xx}(x,y)=0$. Отсюда $u(x,y)=xf_1(y)+f_2(y)$. Учитывая краевые условие (3) получим $f_1(y)=f_2(y)=0$, тогда $u(x,y)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условий теоремы, т.е. $a_1=0,\ a_2<0$ однородная задача для однородного уравнения (3) может имеет нетривальное решение. Например уравнение

$$u_{xxxx}(x,y)-u_{yyy}(x,y)+\left(a_2-\left(\frac{\pi n}{p}\right)^4\right)u(x,y)=0,$$

с однородными условиями (3)-(4) имеет нетривиальное решение,

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{p}}\left(-e^{\sqrt[3]{a_2}y}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{a_2}q\right)-e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_2}y}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{a_2}\,(y-q)\right)\right.$$
$$\left.+\,e^{\frac{\sqrt[3]{a_2}}{2}(3q-y)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{a_2}y\right)\right)\sin\left(2n-1\right)\frac{\pi x}{2p}.$$

Здесь a_2 корня уравнения,

$$\Delta=\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_2}q}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}\sqrt[3]{a_2}q}-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{a_2}q+\frac{\pi}{6}\right)\right)=0.$$

Существования решение поставленных задач доказана методом Фурье и построением функции Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д., Скоробогатова Э.Р. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, Вестник КазНУ сер.мат.,мех.,инф. -2009 г.-No 4(63). -С.16–20
2. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, Вестник. НамГУ. 2022 г,(5). -С.82-91.
3. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023 Vol. 44, No. 8. -pp. 3218–3224. DOI:10.1134/S1995080223080061
4. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2023. No.4(112). -pp.30–40. DOI:10.31489/2023M4/30-40
5. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi- bounded domains, Uzbek Mathematical Journal. 2024. Volume 68. Issue 3. -pp 5–11. DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1.

Смешанная задача для уравнения параболо-гиперболического типа с оператором Капуто дробного порядка в двумерном случае

Меражова Ш.Б.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
s.b.merajova@buxdu.uz

В области $G = \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0\}$ рассмотрено следующее уравнение смещенного параболо-гиперболического типа дробного порядка :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, y, t), \quad t \geq 0, \\ cD_t^{\alpha} u - \Delta u = f(x, y, t), \quad 1 < \alpha < 2, \quad t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$cD_t^{\alpha} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{g''(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau, \quad 1 < \alpha < 2, \\ \frac{d^2}{dt^2} g(t), \quad \alpha = 2, \end{cases}$$

дробная прозводная Капуто.

Для уравнения (1) поставлена начально-краевая задача с условиями склейки:

$$\lim_{t \to +0} u(x, y, t) = \lim_{t \to -0} u(x, y, t), \tag{2}$$

граничные условия:

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \tag{3}$$

начальные условия:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \tag{4}$$

В данной работе исследуется однозначная разрешимость задачи (1)-(4).

Об одной обратной задачи для моделного смешанно интегро-дифференциального уравнения с производной дробного порядка

Меражова Ш. Б.[1], Салимов Ф.Т.[2]
Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;
Специализированная школа Каганского района Бухарской области;
shsharipova@mail.ru[1], feruz2642198@gmail.com[2]

В области $G=\{(x,t): 0<x<1, -a<t<b\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), \quad t<0, \\ cD_t^\alpha u - u_{xx} = \int_0^t K(\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x), \quad 1<\alpha<2, \quad t\geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$cD_t^\alpha g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{g''(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau, \quad 1<\alpha<2, \\ \frac{d^2}{dt^2}g(t), \quad \alpha=2, \end{cases}$$

дробная прозводная Капуто, со следующими условиями
краевые условия:

$$u(0,t)=u(1,t)=0, -a<t<b, \tag{2}$$

начальное условие:

$$u(x,-a)=\varphi(x), x\in(0,1), \tag{3}$$

условие склейки:

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t),\ \lim_{t\to+0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to-0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Обратная задача.
Если про решении задачи (1)-(4) $u(x,t)$ известно дополнительное условие

$$u(x,b)=\psi(x), x\in(0,1) \tag{5}$$

найти $u(x,t)$ и $\varphi(x)$, где $f(x)$, $K(t)$, $\psi(x)$ заданные достаточно гладкие функции.
В данной работе исследуется однозначная разрешимость задачи (1)-(5).

Исследование одной задачи для системы уравнений распространения волны с дробным производным по времени

Меражова Ш.Б., Султанова Д.Х., Бахронова Ш.З.
Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;
s.b.merajova@buxdu.uz, d.x.sultanova@buxdu.uz, bahronovashaxina1@gmail.com

В области $D=\{(x,t): 0<x<1, t>0\}$ рассмотрим систему уравнений акустики с дробным производным по времени

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u + \frac{1}{\rho_0}p_x = 0, \\ cD_t^\alpha p + \rho_0 c_0^2 u_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где cD_t^α - дробная прозводная Капуто, со следующими условиями
краевые условия:

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \ \ t<0, \tag{2}$$

начальные условия:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad p(x,0)=\psi(x) \quad x\in(0,1), \tag{3}$$

Опеределение Задача определения вектор-функции $\{u(x,t),p(x,t)\}$ из задачи (1)-(3) при заданных постоянные ρ_0, c_0 и функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ называется прямой задачей.
В данной работе исследуется однозначная разрешимость задачи (1)-(3).

О единственности решения задачи с комбинированным условием гурса и условием бицадзе-самарского для вырождающегося гиперболического уравнения

Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т., Бегимова Ш.Ч.

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru, dilshod310797mdt@mail.ru

Постановка задачи Гурса-Бицадзе-Самарского (GBS)

Пусть Ω^- характеристический треугольник полуплоскости $y<0$ ограниченная характеристиками AC_1 и BC_1, где $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C_1\left(0,-\left((m+2)/2\right)^{2/(m+2)}\right)$ уравнения

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}+\alpha_0(-y)^{(m-2)/2}u_x+(\beta_0/y)u_y=0,\ y<0, \tag{1}$$

где m,α_0,β_0 некоторые постоянные удовлетворяшие условиям $m>0, -m/2<\beta_0<1$, $-(m+2)/2<\alpha_0<(m+2)/2$.

Корректность постановки краевых задач для уравнения (1) сушественно зависит от ее числовых параметров α_0 и β_0 коэффициентов при младших членах уравнения [1],[2], на плоскости параметров $\alpha_0 O\beta_0$ рассмотрим треугольник $A_0^*B_0^*C_0^*$ ограниченной прямыми

$$A_0^*C_0^*:\beta_0+\alpha_0=-m/2;\ B_0^*C_0^*:\beta_0-\alpha_0=-m/2;\ A_0^*B_0^*:\beta_0=1.$$

Пусть $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0^*B_0^*C_0^*$ т.е. $0<\alpha,\beta<1$, $\alpha+\beta<1$, где $\alpha=\left(m+2(\beta_0+\alpha_0)\right)/2(m+2)$, $\beta=\left(m+2(\beta_0-\alpha_0)\right)/2(m+2)$.

Обозначим через A_0 и B_0 соответственно точки пересечения характеристик AC_1 и BC_1 с характеристикой исходяшей из точки $E(c,0)$, где $c\in J=(-1,1)$ -интервал оси $y=0$.

В задаче Гурса носителями краевых условий являются граничные характеристики AC_1 и BC_1.

Настояшая работа посвяшена исследованию корректности задачи в области Ω^-, для вырождаюшегося на границе области гиперболического уравнения (1), когда граничная характеристика AC_1 области Ω^- произвольным образом разбивается на два куска AA_0 и A_0C_1 и на первом куске $AA_0\subset AC_1$ задается значения искомой функции, а на второй кусок A_0C_1 освобождена от условия Гурса и это недостаюшие условие Гурса заменено условием Бицадзе-Самарского на внутренней характеристике EB_0 и на отрезке вырождения EB.

Задача GBS**.** Требуется найти в области Ω^- функцию $u(x,y)\in C(\bar\Omega^-)$ удовлетворяюшее следуюшим условиям:

1) $u(x,y)$ -обобщенное решение уравнения (1) из класса R_1 [3,с.104].

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\mid_{BC_1}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(x,y)\mid_{AA_0}=\psi_2(x),\ -1\le x\le (c-1)/2, \tag{3}$$

$$(x-c)^{1-\beta}D_{cx}^{\alpha}(x-c)^{\alpha+\beta-1}u[\theta^*(x)]=\mu u(x,0)+b(x),\ c\le x\le 1, \tag{4}$$

где $\theta^*(x_0)-$ аффикс точки пересечения характеристики EB_0 с характеристикой исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in[c,1]$ [4, 5],

$$\theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left[\frac{(m+2)(x_0-c)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\mu = const$, $\psi_1(x) \in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\psi_2(x) \in C[-1,(c-1)/2]\cap C^2(-1,(c-1)/2)$, $b(x)\in C[c,1]\cap C^2(c,1)$, причем $\psi_1(1)=0,\ \psi_2(-1)=0$.

Условие (3) является не полным условием Гурса, так как она задается только на части AA_0 характеристике AC_1.

Условие (4) является условия Бицадзе-Самарского на внутренней характеристике EB_0 и на отрезке вырождения EB.

Теорема 1. *Задача A при выполнении условия*

$$\mu_1>0, \tag{5}$$

может иметь не более одного решения, где

$$\mu_1=\frac{2^{1-\alpha-\beta}\mu-\gamma_1\Gamma(\alpha)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(m+2)^{1-\alpha-\beta}},$$

Теорема 1 доказывается методом работ [6,7,8].

LITERATURE

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области ДАН СССР. 1951. Т 77. No2, с.181-183.
2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М. 1981. 448 с.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985. 304 с.
4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений вырождаюшегося внутри области. "Дифференциальные уравнения". 17(9). 1981. С. 1281-1284.
5. Нахушев А.М. К теории краевых задач для вырождаюшихся гиперболических уравнений. "Сообщения АН.ГССР". 77(3). 1975. С. 545-548.
6. Уринов А. К., Мирсабурова У. М. Задача с локальными и нелокальными условиями для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом, Бюллетен институт математики 2022. Т 5. No 3, с.234-242.
7.Мирсабурова Г. М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Известия вузов. Математика. 2022, No 6, с.54-59.
8. Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского на отрезке вырождения и параллельном ему внутреннем отрезке области для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Известия вузов. Математика. 2025, No 3, с.25-29.

О единственности задачи с неполным условием Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа

Мирсабуров М.[1], **Рузиева З. Ф.** [2].
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru, zuxraruziyeva00@gmail.ru

1. **Постановка задачи BSFK (Бицадзе, Самарского, Франкля,Каратопраклиева).**

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x+iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$,D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ прямой $y = 0$. J=(-1,1)-интервал оси $y = 0$. В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2,\ -m/2 < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения. На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0^* C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0^* B_0^* : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1)[1.c.224].

Рассмотрим случай $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0^* B_0^* C_0^*$,.Обозначим через C_0 и C_1точки пресечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходяшими из точки $E(c, 0)$,где c -некоторое число,принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y = 0$ Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$-диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1, c]$ во множества точек отрезка $[c, 1]$,причем $p'(x)$<0, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = d - kx$, где $k = \frac{1-c}{1+c}$, $d = \frac{2c}{1+c}$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0),\ B_R = B_R(R, 0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\}$, $D_R = D_R^+ \cup D^- \cup J$,$D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Задача BSFK. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x, y)$ удовлетворяюшим условиям :

1) функция $u(x, y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R^+$, неограниченной области D;

2) $u(x, y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x, y)$ является обобшенным решением класса R_1 [1.c.35] в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$u(x, -0) = c_0(x) u(x, +0) + d_0(x), \quad x \in \overline{J}, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=c_1(x)\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+d_1(x),x\in J, \tag{3}$$

причем эти пределы при $x\to\pm 1$, $x\to\ c$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$; 5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0, \tag{4}$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x)\ \ x\in\overline{J}_1,\ u(x,0)=\varphi_2(x)\quad x\in\overline{J}_2, \tag{5}$$

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0\left((x)\right)\right]=a(x)u(x,0)+b(x)\ \ x\in(-1,c), \tag{6}$$

$$u\left(p(x),-0\right)-\mu(x)u\left(x,-0\right)=f(x),\ x\in(-1,c), \tag{7}$$

$D^{l}_{-1,x}$, – оператор дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля.[1. с.43-52]

$$\theta_0(x)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(x_0+1)(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

$-\theta_0(x)$-аффикс точки пересечения граничной характеристики AC с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, $x\in(-1,c)$, где, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ a(x),b(x),\ f(x)$ -заданные непрерывно дифференцируемие функции, в замыкании множества их определение, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_1(x)=0\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)=0$, Заметим, что условие (5) является непольным условием Бицадзе-Самарского [2. с.223], на характеристике AC_0 и на отрезке AE, условие (6) есть аналог условия Франкля на отрезке вырождения AB.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x)\equiv 0,\ \varphi_2(x)\equiv 0,\ b_2(x)\equiv 0,\ f_1(x)\equiv 0$,

$$a_1(x)>0,d_0(x)>0,c_1(x)>0,\ 0<\mu(x)<1, \tag{8}$$

тогда решение задачи BSFK в области $D^+\bigcup J_1\bigcup J\bigcup J_2$ -тождественно равно нулю. Доказательство Теоремы 1 проводиться методами работы [2]

LITERATURE

1. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: 2005"Университет -224с.
2. Мирсабуров М., Тураев Р.Н. Задача в неограниченной области с усдовием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристики для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. ДУ 2024.Т.60.№8 с.1074-1086.

Задача в неограниченной области с неполным условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках

Мирсабуров М.[1], Тураев Р. Н. [2], Мирзаев Ф. С. [3]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru
Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Термез, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; fayzullamirzayev95@gmail.com

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x+iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, \ \textit{при} \ y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \ \textit{при} \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0), \ B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, где $l > 0, \quad m > 0$, $\delta_0 \in (-l/2, 1), \quad \beta_0 \in (-m/2, 1)$ постоянные числа причем $l \neq m$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0), \ B_R = B_R(R,0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2, \ -R \leq x \leq R, \ 0 \leq y \leq ((m+2)R/2)^{2/(m+2)} .$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1, \ y = 0\}, \ \overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \leq -1, \ y = 0\}, \ \overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \leq x < +\infty, \ y = 0\}, \ D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I, \ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристик AC и AB с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$, а через P_0 и P_1 обозначим точки пересечения характеристик EC_1 и BC_1 с характеристикой, исходящей из точки $E_1(c_1,0)$, где $c_1 \in (c,1)$, $0 < c < c_1 < 1$.

Пусть $q(x) = a - bx$, где $a = c_1(1-c)/(1-c_1)$, $b = (c_1 - c)/(1-c_1)$-линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c_1, 1]$ во множество точек отрезка $[c, c_1]$, причем $q(c_1) = c_1$, $q(1) = c$.

Задача. Требуетсия найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1, с.104] в области D^-;

4) на интервале вырождения I имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \ x \in I, \tag{2}$$

причем при $x \to \pm 1$, $x \to c$ предел $\lim\limits_{y \to +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial y}$ может иметь особенность порядка ниже $1 - 2\delta$, а предел $\lim\limits_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}$ может иметь особенность порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\delta = (l + 2\delta_0)/2(l+2)$, $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2)$, $\delta < 1/2, \ \beta < 1/2, \ \delta \neq \beta$.

5) выполняется равенство

$$\lim_{R \to +\infty} u(x,y) = 0, \tag{3}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям [2, 3]

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x), \ \forall x \in \overline{I}_i, \ i = 1,2; \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_0(x), \ \forall x \in \left[-1, \frac{c-1}{2}\right]; \tag{5}$$

$$a_0 u\left[\theta_0^*(x)\right] + b_0 u\left[\theta_1^*(q(x))\right] = \psi_1(x),\ x \in [c_1, 1]; \tag{6}$$

$$u\left(q(x), 0\right) - u\left(x, 0\right) = f(x),\ x \in [c_1, 1], \tag{7}$$

где a_0, b_0-некоторые постоянные, причем $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, $a_0 + b_0 \neq 0$;

$$\theta_0^*(x_0) = \frac{x_0 + c_1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(x-c_1)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1^*(q(x_0)) = \frac{q(x_0) + c_1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(c_1 - q(x_0))}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

-аффиксы точек пересечения характеристик E_1P_1 и E_1P_0 с характеристиками, исходящими из точек $M(x_0, 0)$, $M(q(x_0), 0)$.

Теорема 1. *При выполнении условий* $a_0 \geq 0,\ b_0 \geq 0,\ a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, *задача имеет не более одного решения.*

Теорема 1 доказывается методом работ [2, 4].

LITERATURE

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985. 304 с.
2. Мирсабурова Г.М. Комбинированная задача с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. "Дифференциальные уравнения". 2015. 51(5) С. 621-634.
3. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках. "Дифференциальные уравнения". 37(9). 2001. С. 1281-1284.
4. Mirsaburov M., Turayev R. N., Mirzayev F. S. A nonlocal boundary value problem for a mixed type equation. "Uzbek Mathematical Journal". 2025, Volume 69, Issue 2, c.173-184

Аналог задачи Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области

Нишонова Ш.Т., Каримов К.Т.

Ферганский государственный университет, Узбекистан;
shahnozanishonova910@gmail.com, karimovk80@mail.ru

Задача Трикоми для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована в работе [1]. Задача такого типа для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в ограниченных областях методом спектрального анализа исследована в работе [2], а с помощью методов функции Грина и интегральный уравнений в работе [3].

В данной работе изучается пространственная задача Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области.

Пусть $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta,\ z \in (0, +\infty)\}$, где $\Delta-$конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ и отрезком $\overline{OM} = \{(x, y) : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$, а при $y \leq 0-$ отрезками $\overline{OQ} = \{(x, y) : x + y = 0,\ 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\overline{QP} = \{(x, y) : x - y = 1,\ 1/2 \leq x \leq 1\}$, $O = O\,(0, 0)$, $M = M\,(0, 1)$, $P = P\,(1, 0)$, $Q = Q\,(1/2, -1/2)$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\quad \Omega_1 = \Omega \cap (y < 0)$;

$S_0 = \{(x, y, z) : \sigma_0 \times (0, +\infty)\}$, $S_1 = \{(x, y, z) : OM \times (0, +\infty)\}$,
$S_2 = \{(x, y, z) : OQ \times (0, +\infty)\}$, $\bar{S}_3 = \left\{(x, y, z) : \bar{\Omega} \cap (z = 0)\right\}$.
В области Ω рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + (\mathrm{sgn} y)U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \tag{1}$$

где $\beta, \gamma \in R$, причем $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно в области Ω_0-эллиптическому типу, а в области Ω_1 - гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольника $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ уравнения меняет свой тип.

Исследуем следующую задачу для ура внения (1) в области Ω.

Задача T. Найти функцию $U\,(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\,(\Omega_0 \cup \Omega_1)\,,$$
$$U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_0} = F\,(x, y, z)\,; U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_1} = 0,$$
$$U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0, U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_3} = 0, \lim_{z\to+\infty} U\,(x, y, z) = 0, (x, y) \in \Delta,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} U_y\,(x, y, z) = \lim_{y\to+0} y^{2\beta} U_y\,(x, y, z)\,, \quad x \in (0, 1)\,,\ \ z \in (0, c)\,,$$

где $F\,(x, y, z)$- заданная функция.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$ и функция $f\,(\varphi, z) = F\,(\cos\varphi, \sin\varphi, z)$ удовлет-воряет следующим условиям:

I. $f\,(\varphi, z) \in C^{3,4}_{\varphi,z}\left(\bar{\Pi}\right)$, где $\Pi = \{(\varphi, z) :\ \varphi \in (0, \pi/2),\ z \in (0, +\infty)\}$;

II. $\frac{\partial^j}{\partial\varphi^j} f\,(\varphi, z)\Big|_{\varphi=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial\varphi^j} f\,(\varphi, z)\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0$, $j = 0, 1, 2$;

III. $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f\,(\varphi, z)\big|_{z=0} = 0$, $\lim\limits_{z\to+\infty} z^{\gamma} \frac{\partial^j}{\partial z^j} f\,(\varphi, z) = 0$, $j = \overline{0, 3}$.

Тогда единственное решение задачи T в области Ω существует.

Литература

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми, Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, №5. С. 642-644.
2. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами, Вестник НУУз. - Ташкент, 2016. №2/1. -С. 14-25.
3. Назипов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений, Известия вузов, -2011. №3. -С.69-85.

Задача Гурса для уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными коэффициентами

Орипов Ш. А.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shoripov1991@gmail.com

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами были предметом исследования многих математиков. Исследование более сложных уравнений с сингулярными коэффициентами представляет собой естественный дальнейший этап на пути теоретических обобщений. Ценность получаемых при этом теоретических результатов существенно возрастает в связи с тем, что подобные уравнения или их частные случаи встречаются в приложениях.

Особо отметим класс уравнений с частными производными с особенностями в коэффициентах, типичными представителями, которого является уравнения с операторами Бесселя вида

$$B_\eta^x = x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}x^{2\eta+1}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}.$$

Для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов с оператором Бесселя по каждой или по нескольким переменным И.А. Киприяновым [1] была введена соответственно терминология B-эллиптические, B-гиперболические и B-параболические уравнения. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, уравнениям Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД) и многим другим.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Гурса для уравнения

$$L_{\alpha,\beta}^\lambda(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \lambda \in R$, причем $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

Рассмотрим уравнение (1) в характеристическом прямоугольнике. Через G обозначим область ограниченную характеристиками AC_1, C_1B, BC_2 и C_2A уравнения (1).

Пусть, $A(0;0)$, $C_1(x_1;x_1)$ и $C_2(x_2;-x_2)$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Задача Гурса. Найти в области G решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)|_{y=x} = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le x_1, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{y=-x} = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le x_2, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x} = \varphi_3(x), \quad 0 \le x \le x_1, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=-x} = \varphi_4(x), \quad 0 \le x \le x_2, \tag{5}$$

где n - внешняя нормаль к границе области G, $\varphi_k(x)$, $(k=\overline{1,4})$ - заданные функции.

Данная задача ранее не исследована. Использовав обобщенный дробный оператор Эрдейи-Кобера [2] и метод Римана [3], нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u)$.

Несмотря на развитие современной вычислительной техники, построение точных решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных попрежнему остается важной и актуальной задачей. Эти решения позволяют глубже понять качественные особенности описываемых процессов и явлений, свойства математических моделей, а также могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближенных и численных методов.

LITERATURE

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва: Наука, 1997.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
3. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Тошкент: ФАН, 2000.

О динамике F–квадратичной динамической системы с непрерывным временем

Расулов Х. Р. Бухарский государственный университет[1], Бухарское отделение Института математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан[2], Бухара, Узбекистан; xrasulov71@mail.ru, x.r.rasulov@buxdu.uz

Аннотация. Известно, что физические, химические, биологические, экономические и другие процессы описываются с помощью квадратично-стохастических операторов (КСО), функционирующих как в дискретном, так и в непрерывном времени. Данный математический аппарат служит инструментом для анализа временной динамики исследуемых систем.

При изучении динамических систем центральное место занимает проблема анализа изменений состояния системы во времени. Как правило, переходы к последующим состояниям системы подчиняются определенным закономерностям. Для математического моделирования подобных закономерностей, особенно важных в области математической генетики, применяются квадратичные стохастические операторы. Вследствие этого данный класс операторов вызывает значительный интерес у исследователей, работающих в разнообразных разделах математики, и ее практических применениях [1-2].

Исследование эволюционных процессов неразрывно связано с учетом временной переменной. В зависимости от специфики изучаемой задачи может использоваться либо непрерывная временная область (для анализа состояний системы в произвольный момент), либо дискретная (при необходимости изучения состояний в конкретные изолированные временные точки). Функционирование системы определяется совокупностью параметров, точные величины которых зачастую остаются неопределенными. Численное решение задачи для всего диапазона возможных параметрических значений представляется принципиально неосуществимым. В связи с этим возникает потребность в методологических подходах, обеспечивающих возможность исследования характеристик решений динамических систем без использования вычислительной техники. Ключевое преимущество качественного подхода к теории динамических систем с непрерывным временем заключается в возможности прогнозирования существенных характеристик решений без необходимости получения аналитических решений для уравнений.

Квадратичные динамические системы с дискретным временем получили освещение в исследованиях [1-3], тогда как их непрерывные аналоги остаются недостаточно изученными. В частности, требуют дальнейшего исследования непрерывные варианты невольтерровских квадратичных операторов, рассмотренных в работах [2],[4]. В [5] исследована F–квадратичная динамическая система в S^2.

В настоящей работе изучается непрерывный аналог F- квадратичной динамической системы из [4] (случай $E_0 = \{0,1,2,3\}\,; F = \{1,2\}\,; M = 3$), которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x_0} = 1 - 2x_1x_3 + 2ax_1x_3 - x_0, \\ \dot{x_1} = 2bx_1x_3 - x_1, \\ \dot{x_2} = 2cx_1x_3 - x_2, \\ \dot{x_3} = 2dx_1x_3 - x_3 \end{cases} \tag{1}$$

или в векторном виде

$$\dot{X}(t) = F\left(X(t)\right)$$

где $X\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right),\ x_2\left(t\right), x_3\left(t\right), x_4\left(t\right)\right)$, представляет состояние некоторой системы в момент непрерывного времени при $t \geq 0, F\left(X\left(t\right)\right) = F\left(x_1\left(t\right),\ x_2\left(t\right), x_3\left(t\right), x_4\left(t\right)\right) = f_i\left(x_1\left(t\right),\ x_2\left(t\right), x_3\left(t\right), x_4\left(t\right)\right),\ i = \overline{1,4}, a + b + c + d = 1.$

В настоящей статье определены неподвижные точки исходной системы (1) и установлен их тип, получены аналитические и численные решения системы и построены фазовые портреты для отдельных значений параметров (a, b, c, d). Следует отметить, что полученные аналитические и численные решения полностью соответствуют теоретическим результатам работы [4]. Также исследованы качественные свойства данной системы в симплексе S^3.

Литературы

1. Kesten, H. Adv. Appl. Prob. // 1970. No. 2. pp. 179–228.

2. Ganikhodzhaev, R.N., Mukhamedov, F.M. and Rozikov, U.A. Inf. Dim. Anal. Quant. // Prob. Rel. Fields. 2011. Volume 14, No. 2, pp. 279–335.

3. Lyubich, Yu.I. Mathematical Structures in Populatsion Genetics, Biomathematiks, 22, // Springer-Verlag. Berlin, 1992.

4. Розиков, У.А. and Жамилов, У.У. F–квадратичные стохастические операторы. // Математические заметки. 2008. Том 83, Номер 4, с. 606–612.

5. Rasulov, Kh.R. On a continuous time F–quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 4, pp. 126–131.

Регуляризация решения задачи Коши для произвольного поля в ограниченной области

Сатторов Э.Н.[1], Марданов Ж.А.[2], Эрмаматова Б.Э.[2]

[1]Самаркандский государственный педагогический институт
e-mail: Sattorov-e@rambler.ru
[2]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная односвязная область, граница которой состоит из куска T гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$, т.е. $\partial\Omega = S \cup T$. В области Ω задано непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$.

Рассмотрим системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{F}(x) = g(x), \\ \operatorname{rot} \vec{F}(x) = \vec{R}(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $g(x)$ – скалярное поле, $\vec{R}(x)$ – векторное поле. Будем предполагать, что заданные поля $g(x)$ и $\vec{R}(x)$ дифференцируемы в области Ω.

Как известно, что уравнение (1) имеет внутри Ω общее решение, выражаемое формулой

$$\vec{F}(x) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\frac{1}{|y-x|} + [\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\frac{1}{|y-x|}\right\}ds_y$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} g(y)grad\frac{1}{|y-x|}\,dv + \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\vec{R}(y)\times grad\frac{1}{|y-x|}\,dv, \quad x\in\Omega.$$

Рассмотрим в области Ω задачу Коши.

Подстановка задачи. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S:

$$\vec{F}(y)\big|_S = \vec{f}(y), \quad y\in S,$$

где $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)$ – заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить функцию $\vec{F}(y)$ в Ω, исходя из заданной $\vec{f}(y)$.

Обозначим через $H(D)$ совокупность функций гармонических в D и непрерывных на $D\cup\partial D=\overline{D}$.

Справедлива формула, как обобщение формулы КошиЦГрина:

$$\vec{F}(x) = -\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\Phi_\sigma(y,x) + [\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y$$
$$+\iiint_D g(y)\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)\,dv + \iiint_D \vec{R}(y)\times grad\Phi_\sigma(y,x)\,dv, \quad x\in D,$$

где

$$\Phi_\sigma(y,x) = \frac{e^{\sigma y_3-\sigma x_3-\sigma\alpha^2}}{2\pi^2}\int\frac{\varphi_\sigma(y,x,u)}{u^2+r^2}\,e^{-\sigma u^2}\,du,$$

$$\varphi_\sigma(y,x,u) = \cos\left(\tau\sqrt{u^2+\alpha^2} - (y_3-x_3)\frac{\sin\left(\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}\right)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right., \quad \tau = 2\sigma y_3.$$

Предположим, что ограничена на части T границы $\partial\Omega$:

$$|\vec{F}(y)| \le M, \quad y\in T, \tag{2}$$

где M - заданное положительное число.

Введем следующие обозначения:

$$\vec{F}_\sigma(x) = -\iint_S\left\{(\vec{n}\cdot\vec{f}(y))\cdot grad\Phi_\sigma(y,x) + [\vec{n}\times\vec{f}(y)]\times grad\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y +$$
$$+\iiint_\Omega g(y)\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)\,dv + \iiint_\Omega \vec{R}(y)\times grad\Phi_\sigma(y,x)\,dv.$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть $\vec{F}(x)$ – регулярное решение уравнения (1) в области Ω, на части T удовлетворяющее условию (2). Тогда для $x\in\Omega$ и $\sigma\ge 1$ справедливо неравенство

$$\left|\vec{F}(x) - \vec{F}_\sigma(x)\right| \le MC(x)\sigma e^{-\sigma x_3^2},$$

где $C(x) = \frac{8}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{x_3}\right).$

О разрешимости дефокусирующего интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

Сафаров Ж. Ш.[1], Файзуллаев Ш. М.[2], Хуррамов А. Б.[3].
[1,2]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
[1]Институт Математики имени В.И.Романовского АН Республики Узбекистан;
[3]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан;
[1]j.safarov65@mail.ru, [2]fayzullayev@tuit.uz, khurramov@tsue.uz

Дефокусирующие уравнения гиперболического типа могут быть записаны в виде:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + g(u) = 0,$$

где $g(u)-$ нелинейный член, который может описывать взаимодействие волн. В последние годы опубликованы достаточно работ в данным направление. В работах [1]-[3] исследована глобальное поведение решений дефокусирующего нелинейного волнового уравнения. Работа [4] посвящена исследованию начально-краевой задачи для уравнения

$$u_{tt} - (k^2(x) u_x)_x = \int_0^t m(t-\theta)|u|^{n-1} u(x,\theta)\, d\theta,$$

в области $\Omega := \{(x,t)|\ x > 0,\ 0 < t \leq T\}$.

В области $D := \{(x,t)|\ x > 0,\ 0 \leq t \leq T\}$ рассмативается начально-краевая задача

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)|u_t|^{n-1} u_t(x,\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

где n и T положительные числа, $k(t)-$ непрерывно дифференцируемая положительно определенная на [0,t/2] функция. Уравнение (1) описывает процесс распространения акустических волн в среде с нелинейным поглощением. В дальнейшем будем полагать, что $g(t) < 0$ для всех $t \in [0,T]$.

Прямая задача заключается в отыскании решения задачи (1)-(3) при заданных функциях $k(t)$ и $g(t)$. В обратной задаче требуется определить ядро $k(t)$ по следу решения прямой задачи при $x = 0$:

$$u|x = 0 = f(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Данная работа посвящена исследованию прямой задачи, т.е. функция $k(t)$ предполагается известной.

Введем в рассмотрение области D_1 и D_2 следующим образом:

$$D_1 = (x,t)|x \geq 0, x < t \leq T - x, \ \ D_2 = (x,t)|x \geq 0, 0 \leq t \leq x.$$

Очевидно, что $u(x,t) = 0$ для $(x,t) \in D_2$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачу только в области D_1, учитывая, что $u(x,x) = 0$. Введем обозначения:

$$u_t + u_x = v_1, \ \ u_t - u_x = v_2, \ \ w = u_t = v_1 + v_2. \tag{5}$$

В результате мы получим следующую систему:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

$$=\int_0^t k(t-\tau)|w|^{n-1}w(x,\tau)\,d\tau,\ \ \frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial v_2}{\partial x}=\int_0^t k(t-\tau)|w|^{n-1}w(x,\tau)\,d\tau,$$

где $(x,t)\in D_1$.

Интегрируя этих уравнений вдоль соответствующих характеристик с учетом граничного условия и обозначений (5) получим интегральное уравнение относительно функции $w(x,t)$

$$w(x,t)=2g(t-x)+\int_{(t+x)/2}^{t}\int_0^{\tau}k(\xi)|w|^{n-1}w(\xi,x+t-2\xi)\,d\xi\,d\tau$$

$$+\int_{(t-x)/2}^{(t-x)}\int_0^{\tau}k(\xi)|w|^{n-1}w(\xi,t-x-2\xi)\,d\xi\,d\tau$$

$$+\int_{t-x}^{t}\int_0^{\tau}k(\xi)|w|^{n-1}w(\xi,t-x-\xi)\,d\xi\,d\tau. \qquad (6)$$

Теорема 1. Пусть $k(t)\in C[0,T/2]; 0<k(t)\le k_0,\ x\in[0,T/2]$, а функция $g(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и удовлетворяет условиям

$$0<g_0\le g(t)\le g_1<\infty, t\in[0,T],$$

$$g_0-\frac{g_1}{(n+1)}[exp((m+1)k_0g_1^nT)-1]\ge 0.$$

Тогда уравнение (6) имеет единственное решение, принадлежащее $C(D_1)$, и для него выполнены неравенства

$$0<g_0/2\le w(x,t)\le g_1,\ \ (x,t)\in D_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Wei D., Yang Sh. Asymptotic decay for defocusing semilinear wave equations in R_n+1, Analysis of PDEs. 2020. arXiv:2003.12264v1 [math.AP] 27 Mar 2020; http://arxiv.org/abs/2003.12264v1.
2. The global behaviors for defocusing wave equations in two dimensional exterior region, Analysis of PDEs. 2023. arXiv:2301.07935v2 [math.AP] 20 Sep 2023; https://doi.org/10.1007/s00229-023-01511-5.
3. Romanov V.G., Bugueva T.V. An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation, Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2024. V.12, Issue 2. P.134Ц154. DOI: 10.32523/2306-6172-2024-12-2-134-154
4. Сафаров Ж. Ш., Хуррамова М. Ж. О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Тезисы докладов Республиканской научной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики". Фергана, 16-17 май, 2025 год.-С. 230-237

Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными условиями для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной области

Шакиров А. А., Джамалов С. З.

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
shokirov.abduvosiq96@gmail.com, siroj63@mail.ru

В области

$$G = Q \times \mathbb{R} = \{(x,t,z)| \ -1 < x < 1, \ 0 < t < T, \ -\infty < z < \infty\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - u_{xx} - u_{zz} + \alpha(x,t)u_t = c(x,t)u + \psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\psi(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t) \cdot f(x,t,z)$, $g(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ известные функции, тогда как $c(x,t)$ и $h(x,t)$ подлежат определению.

Коэффициентная обратная задача

Найти функции $\{u(x,t,z), \ h(x,t), \ c(x,t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) нелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\rho D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0,1, \tag{3}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} u = 0, \ \lim_{|z|\to\infty} u_z = 0, \tag{4}$$

где $\gamma, \rho-$ некоторые постоянные числа, отличные от нуля;

2) дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t), \tag{6}$$

$$-\infty < \ell_1 < \ell_2 < +\infty$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, $c(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \left\{(u, \ h, \ c)| \ u \in W_2^{2,3}(G), \ h \in W_2^2(Q), \ c \in W_2^2(Q)\right\}.$$

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропная пространства Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\lambda^2\right)^3 \|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)} d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ пространство Соболева.

Определение. *Обобщенным решением задачи (1)-(6) будем называть функции* $\{u,h,c\} \in U$, *удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в* G, *с условиями (2) - (6).*

Для разрешимости задачи задаем следующие условия на коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданной функции $\varphi_i(x,y)$:

Условие 1:

нелокальные условия: $\alpha(x,0)=\alpha(x,T)$, $\alpha(-1,t)=\alpha(1,t)$;

$$\gamma g(x,0,z)=g(x,T,z), \gamma f(x,0,z)=f(x,T,z);$$

гладкость: $f(x,t,\ell_i)=f_i(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $g(x,t,\ell_i)=g_i(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$,

$$f\in W_2^{3,3}(G), g\in W_2^{2,3}(G).$$

Кроме того, пусть $2\alpha(x,t)+\mu x>\delta_0>1, |H|=|\varphi_0 f_1-\varphi_1 f_0|\geq\eta>0$.

Условие 2:

$$\varphi_i\in W_2^5(Q),\quad \gamma D_t^p\varphi_i|_{t=0}=D_t^p\varphi_i|_{t=T},\quad \rho D_x^p\varphi_i|_{x=-1}=D_x^p\varphi_i|_{x=1},$$

$$\varphi_i\neq 0,\quad p=0,1.$$

Введем обозначение $q\equiv\varepsilon_{\varphi,g}+c_1\left\|g\right\|^2_{W_2^{2,3}(G)}+c_2\left\|f\right\|^2_{W_2^{2,3}(G)}$, где $\varepsilon_{\varphi,g},c_1,c_2$ положительные числа, $\varepsilon_{\varphi,g}$ зависит от φ и g.

Теорема. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены указанные выше условия 1 и 2, а для коэффициентов уравнения и их следов выполняются следующая неравенство:*

$$q<\frac{1}{2}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(6) из класса U.

Замечание. Мы можем добиться выполнение неравенства $q<\frac{1}{2}$, выбрав малой область или взяв малымы нормы g,f и $\varphi_i, i=1,2$.

Теорема доказывается методами $\varepsilon-$ регуляризации, априорных оценок и последовательностями приближений.

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021г. с-176.

О свойствах бигармонических функций

Хасанов А. Б.[1], Жураева У. Ю.[2]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
ahasanov2002@mail.ru[1], umida_9202@mail.ru[2]

Работа посвящена теореме типа Фрегмена-Линделефа для бигармонических функций, которая получена с помощью формул Карлемановского типа.

Постановка задачи. В теории аналитических функций хорошо известна следующая теорема:

Теорема 1.*Пусть аналитическая функция $F(z)$, регулярная в угле $|argz|<\frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывна вплоть до его сторон, на сторонах угла удовлетворяет условию $|F(z)|\leq M$. Тогда во всем угле или $|F(z)|\leq M$ или $max_{|z|=r}|F(z)|>e^{cr^\rho}(c>0,r>r_0)$.*

Общий смысл этой теоремы состоит в том,что аналитическая функция, ограниченная на границе бесконечной области и неограниченной внутри нее должна расти внутри со скоростью, не меньшей некоторой предельной. Приведенная теорема гласит, что для угла $|argz| < \frac{\pi}{2\rho}$ это предельная скорость роста не ниже чем $e^{c|z|^\rho}$, например функция e^{cz^ρ} показывает,что найденная скорость роста точна.

Утверждение о существовании такой предельной скорости роста носит в теории аналитических функций название теоремы типа Фрагмена-Линделефа. Таким образом, нас будет интересовать, в основном следующая задача:

Дана бесконечная область D двухмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывная вплоть до границы со своими производными до третьего порядка. Требуется показать, что если функция $u(P)$, ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \longrightarrow \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Целью настоящей заметки является доказательство сходного результата, но уже для случая бигармонических функции двух переменных заданные на верхнем полуплоскости. В данной работе строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций) определенных в области $D \subset R^2$, $D = \{y : y = (y_1, y_2), y_2 > 0\}$.

Функцию $\varphi_\sigma(y, x)$ при $\sigma \geq 0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi_\sigma(y,x) = \frac{1}{c_2 K(x_2)} \int_0^\infty \mathrm{Im} \frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_2)}{i\sqrt{u^2+s}+y_2-x_2} \frac{udu}{\sqrt{u^2+s}}, \tag{1}$$

где

$$K(\omega) = \frac{\exp(-\sigma(\omega+1)^{\rho_1})}{(\omega+x_2)^2}.$$

Здесь $s > 0$, $c_2 = 2^{-1}\pi\omega_2$, ω_2 площадь единичного круга в R^2.
Положим

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y,x), \tag{2}$$

при этом $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\omega = i\sqrt{u^2+s} + y_2$, $s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2$, $r = |y - x|$, $r_1^2 = s + (y_2 + x_2)^2$, $0 < \rho_1 < 1$, $\sigma > 0$, $y_2 > 0$, $c_0 \in R$. Здесь берется регулярная ветвь аналитической функции w^ρ в плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси.

Имеет места следующие утверждения:

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma(y, x)$, определенная формулой (1), имеет вид

$$\varphi_\sigma(y,x) =$$

$$c_0 \int_0^\infty \frac{((y_2-x_2)((y_2+x_2)^2-(u^2+s))-2(y_2+x_2)(u^2+s))\sin\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{udu}{\sqrt{u^2+s}} +$$

$$+c_0 \int_0^\infty \frac{(((y_2+x_2)^2-(u^2+s))+2(y_2-x_2)(y_2+x_2))\cos\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} udu$$

и при $\alpha > 0$ - является гармонической функцией, где $c_0 = \frac{8\pi x_2^2}{exp(\sigma(x_2+1)^{\rho_1}))}$, $A_1 = ((y_2+1)^2 + u^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}} \cos(\rho_1 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)})$, $\lambda = \sigma((y_2+1)^2 + u^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}} \sin(\rho_1 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)})$. Для удобства записи в дальнейшим обозначим через c_0 все постоянные числа.

Лемма 2. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ является бигармонической функцией.

Лемма 3. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ имеет вид

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0(r^2 \ln \frac{1}{r} + r^2 G_\sigma(y,x)),$$

где функция $G_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в $R^2 \setminus \{x\}$ по переменному y.

Теорема 2. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$,зависящая от параметра $\sigma > 0$ при $y \neq x$ является функцией Карлемана для точки $x \in D$ и ∂D*

$$\int_{\partial D}(|\Phi_\sigma(y,x)|$$

$$+|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}| + |\Delta \Phi_\sigma(y,x)| + |\frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}|)|ds| \leq \frac{C(x)}{exp(\sigma A)},$$

где $C(x)$-многочлен зависящее только от x, n-внешняя нормаль к границе ∂D.

Обозначим через $u \in A_{\rho_2}(D)$ пространство бигармонических функций, определенных в D, имеющих непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^{1}(|\Delta^k u(y)| + |grad \Delta^{(1-k)} u(y)|) \leq c_0 exp|y|^{\rho_2}, \ \ \rho_2 < \rho_1, \ \ y \in D.$$

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме:

Теорема 3. Пусть $u \in A_{\rho_2}(D)$ бигармоническая функция, определенная в области $D \subset R^2$, $D = \{y : y = (y_1, y_2), y_2 > 0\}$. Если выполнена условия

$$\sum_{k=0}^{1}(|\Delta^k u(y_1, 0)| + |\frac{\partial \Delta^k u(y_1, 0)}{\partial n}|) < c_0,$$

то $u(y) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аршон И. С. Евграфов М. А. О росте функций гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности с нормальной производной, ДАН СССР. 1962. Т.142, No. 4. С.762-765.

2.Ярмухамедов.Ш,Я. Задача Коши для полигармонического уравнения, Доклады РАН. 2003. Т. 388. С. 162-165.

3.Жураева У.Ю. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных, Известия вузов. Математика. 2022,No.10. С.42-65.

4.Jurayeva. U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems, Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol. 66. No. 3. C. 54-61, DOI:10. 29229/uzmj.

Об одной линейной двухточечной обратной задаче для многомерного волнового уравнения с начально-краевыми условиями

Худойкулов Ш. Ш. [1], Джамалов С. З.[2]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
xudoykulov1194@gmail.com, siroj63@mail.ru

Пусть Ω-односвязная область в пространстве R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области $G = \Omega \times (0,T) \times (0,l) = Q \times (0,l) \subset R^{n+2}$ рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$Lu = u_{tt} - \Delta_x u - u_{yy}$$

$$+a(x,t)u_t + c(x,t)u = g(x,t,y) + \sum_{i=1}^{2} h_i(x,t) f_i(x,t,y), \quad (1)$$

где $\Delta_x u = \sum\limits_{m=1}^{n} u_{x_m x_m}$-оператор Лапласа, по переменим x, здесь $a(x,t)$, $c(x,t)$, $g(x,t,y)$ и $f_i(x,t,y)$, $i = 1,2$-заданные функции, $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$-неизвестные функции.

Постановка задачи. Найти функции $u(x,t,y), h_1(x,t), h_2(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующими начально-краевыми условиями:

$$u\,|_{t=0} = u_0(x,y), \quad u_t\,|_{t=0} = u_1(x,y), \quad (2)$$

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

$$u\,|_{y=0} = u\,|_{y=l} = 0, \quad (4)$$

Кроме этого, для определения неизвестные функции $\{h_1(x,t), h_2(x,t)\}$ решение задачи (1)-(4) удовлетворяет следующим дополнительным условиям

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \quad (5)$$

$$u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t), \quad (6)$$

где $0 < \ell_1 < \ell_2 < \ell < +\infty$, а функции $u(x,t,y)$ и $h_i(x,t)$, $i = 1,2$ принадлежат классу $U = \left\{(u(x,t,y), h_1(x,t),\, h_2(x,t)) : u \in H_2^{2,3}(G),\; h_1,\, h_2 \in L_2(Q)\right\}$. Здесь через $H_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропное пространства Соболева, с нормой

$$\|u(x,t,y)\|_{H_2^{2,3}(G)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\mu_k^2\right)^3 \|u_k(x,t)\|^2_{W_2^2(Q)}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент.: Fan ziyosi, 2021.
2. Dzhamalov S.Z., Khudoykulov Sh.Sh. on some linear two-point inverse problem for a three-dimensional wave equation with semi-nonlocal periodic boundary conditions. Uzbek Mathematical Journal. 2023. Vol. 67, No. 4. P. 16–28.

Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в двусвязной области

Юнусов О. М.

Кокандский государственный университет, Коканд, Узбекистан;
oybek198543@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - \ u_{yy} + \mu_1 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - \ u_{yy} + \mu_2 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

в области, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 – область, ограниченная отрезками A_jB_j $(j = 1, 2)$ оси Ox и характеристиками

$$A_jC_4 : x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}, \quad B_jC_3 : x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}q$$

уравнения (1), выходящими из точек $A_j\left((-1)^{j-1};0\right)$ и $B_j\left((-1)^{j-1}q\ ;\ 0\right)$ пересекающимися в точках $C_4\,(0;\ 1)$, и $C_3\,(0\ ;\ q)$; Ω_2 – область, ограниченная отрезками A_jB_j $(j = 1, 2)$ оси Ox и характеристиками

$$A_jC_1 : x - (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}, \quad B_jC_2 : x - (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}q$$

уравнения (1), выходящими из точек $A_j\left((-1)^{j-1};0\right)$ и $B_j\left((-1)^{j-1}q\,;0\right)$, пересекающимися в точках $C_1\,(0;\ -1)$ и $C_2\,(0;\ -q)$, $0 < q < 1$.

В уравнении (1) μ_j $(j = \overline{1,2})$ – заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geqslant 0, \ \ (j = \overline{1,2})\,. \tag{2}$$

Определение. Решение уравнения (1) при $y \neq 0$, $x + y \neq \pm q$, $x - y \neq \pm q$ будем называть регулярным, если функция $u(x, y)$ обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1).

Задача А. Найти регулярное решение уравнения (1), непрерывное в области $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)|_{A_jE_j} = \varphi_j(x),\ \frac{1+q}{2} \leq |x| \leq 1,\ u(x,y)|_{B_jC_2} = \psi_j(x),\ 0 \leq |x| \leq q,$$

$$u(x,y)|_{A_jN_j} = g_j(x),\ \frac{1+q}{2} \leq |x| \leq 1,\ u(x,y)|_{B_jC_3} = h_j(x),\ 0 \leq |x| \leq q,$$

а на линиях A_jB_j $(j = 1, 2)$ условиям склеивания:

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0),$$

равномерно при $x \in A_jB_j$, где $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$, $g_j(x)$, $h_j(x)$, $(j = 1, 2)$– заданные функции, причем

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad h_1(0) = h_2(0), \tag{3}$$

$$\varphi_j\left((-1)^{j-1}\right) = g_j\left((-1)^{j-1}\right), \quad \psi_j\left((-1)^{j-1}q\right) = h_j\left((-1)^{j-1}q\right), \tag{4}$$

$$\varphi_j(x),\ \ g_j(x) \in C^1\left(\frac{1+q}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\right)\ \cap\ C^3\left(\frac{1+q}{2} < |x| < 1\right), \tag{5}$$

$$\psi_j(x), h_j(x) \in C^1\left(\ \ 0 \leqslant |x| \leqslant q\right)\ \cap\ C^3\left(0 < |x| < q\right), \tag{6}$$

здесь $x \geqslant 0$ при$j = 1$, $x \leqslant 0$ при $j = 2$.

Заметим, что задача типа задачи А для уравнения (1) в односвязной области изучены в работах [1], [2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2), (3), (4), (5), (6), то задача А имеет единственное регулярное решение.

Литература

1. Аттаев А.Х. Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения. Дифференциальные уравнения, Тез. докл. областного межвуз. семинара. 20–25 мая 1984г.- Куйбишев, 1984. С.9–10.
2. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. "ДАН РУз". -1996. №1–2. С. 3–6.
3. Исломов Б., Курьязов Д.М. Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в специальной области. Т.: Узбекский математический журнал. 2017. No 1. 86–95 с.

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в области - эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса

Эргашев А. А.[1], Худоёров А. А.[2]
[1]Кокандский педагогический институт, Коканд, Узбекистан.;
[2]Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
xudoyorovanvar123@gmail.com, xudoyorovanvar123@gmail.com

Новым этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются работы М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, Ф.И. Франкля и др. где указаны на важность проблемы, в частности, задачи Трикоми, в связи трансзвуковой газовой динамикой, с магнитогидродинамическими течениями с переходом через скорость звука и скорость Альфена, с теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей и с многими другими вопросами механики. Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа первого рода. Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода, то есть таких уравнений, у которых линия вырождения является одновременно характеристикой изучены сравнительно мало тем более в неограниченных областях. Ряд простейших типичных задач околозвуковой аэродинамики приводит к краевой задаче Трикоми, для которой область, лежащая в эллиптической части плоскости, представляет собой полуполосу.

В данной работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + signy|y|^m u_{yy} + \alpha|y|^{m-1}u_y = 0, \quad 1 \le m < 2, m-1 < \alpha < 2$$

Параболическая линия вырождения этого уравнения Ц ось $y = 0$ Ц является огибающей семейств его характеристик

$$AC: \ \xi = x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0,$$

$$BC: \ \eta = x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

выходящих из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$.

Для уравнения (1) в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < +\infty\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox а также характеристиками AC и BC рассмотрим задачу Трикоми. Эта задача в случае ограниченной области впервые рассмотрена в работе [1].

Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0,$$

$$l_1 = \{(x,y) : x = 0,\, 0 < \ y < +\infty\},$$
$$l_2 = \{(x,y) : x = 1,\, 0 < \ y < +\infty\}.$$

Задача T^{∞}. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:
1) $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega_1)$;
2) в области Ω_2 является обобщенным решением из класса R_2 [1]

$$u(0,y) = \varphi_1\left(y\right), u(1,y) = \varphi_2\left(y\right), 0 \le y < +\infty, \tag{11}$$

$$\lim_{y\to+\infty} u\left(x,y\right) = 0, \text{ равномерно по } x \in [0,1]\,, \tag{12}$$

$$u\left(x,y\right)|_{\xi=0} = \psi\left(\eta\right), 0 \le \eta \le 1, \tag{13}$$

где $\psi(\eta)$, $\varphi_i(y)\,(i = 1,2)$ - заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условию согласования $\varphi_1(0) = \psi\left(0\right)$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} \varphi_i\left(y\right) = 0$.

На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$\begin{gathered}\lim_{y\to+0} \left(-y\right)^{\alpha} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y} = -\lim_{y\to-0} |y|^{\alpha} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}\ \ 0 < x < 1\\ u(x,-0) = u\left(x,+0\right),\end{gathered} \tag{14}$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. М.С. Салахитдинов, А.К.Уринов. Уравнения смешанного типа. Ташкент "Университет"2007, 277 С.

Особые точки двумерной системы дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями

Эргашев В.Э., Буриев Т.Э.
[1]Самаркандский государственный уриверситет имени Шарофа Рашидова, город Самарканд, Узбекистан.
vafokulyusuf@gmail.com, tolibjonb@yahoo.com

Рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x(a_1x^m + b_1y^m + c_1) = P(x,y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = y(a_2x^m + b_2y^m) = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Оси координат являются интегральными прямыми этой, системы начало координат является особой точкой системы (1)
Пусть m-нечетное число. Для выяснения типа особой точки $O(0,0)$ в системе (1) одно уравнение делим на другое уравнение и в результате получим

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(a_2x^m + b_2y^m)}{x(a_1x^m + b_1y^m + c_1)} \tag{2}$$

Кроме начало координат, система (1) имеет ещч другие особые точки, определяемые следующей системой уравнений

$$\begin{cases} a_1x^m + b_1y^m + c_1 = 0 \\ a_2x^m + b_2y^m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Так как $m+1$-четное число, то уравнение (2) является уравнением Брио и Буке 3-го рода. Следовательно, точка О- особая точка типа-открытый седло-узел [1]. Согласно критерию Дюляка [2], эта система не имеет предельных циклов. Таким образом справедлива

Теорема 1. Пусть m-нечетное число, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда система (1) имеет только три изолированные особые точки и для их совместного сосуществования реализуется один из следующих случаев:

1) открытый седло-узел, два узла; 2) открытой седло-узел, узел, фокус; 3) открытый седло-узел, два седла; 4) открытый седло-узел, узел, седло; 5) открытый седло-узел, фокус, седло.

Пусть $\Delta = 0$, тогда $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2, s \neq 0$ и система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x[b_1(sx^m + y^m] \\ \frac{\partial y}{\partial t} = b_2y(sx^m + y^m), b_1 \neq b_2 \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) кроме начала координат имеет ещч одну особую точку $A\left(\left(-\frac{c_1}{b_1 s}\right)^{\frac{1}{m}}, 0\right)$, которая в зависимости от знака числа$\Delta(A) = \frac{mc_1^2 b_2}{b_1}$, будет узлом или седлом.

Если $b_1b_2 > 0$, то особая точка является узлом, если же $b_1b_2 < 0$, то особая точка является седлом.

Пусть m-четное число. В этом случае система (1) имеет три особые точки, лежа -щие на осях координат:

$O(0,0), A_{1,2}\left[\pm\left(-\frac{c_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{m}}, 0\right]$ если $c_1a_1 < 0$.

Введем обозначения: $\Delta_1 = c_1b_2$, $\Delta_2 = -c_1a_2$

Если $\Delta\Delta_1 > 0, \Delta\Delta_2 > 0$, то система (1) имеет ещч четыре изолированные особые точки $M_{1,2,3,4}\,(\pm x_0, \pm y_0)$, определяемые системой уравнений (3), где

$$x_0^m = -\frac{c_1b_2}{\Delta}, y_0^m = \frac{c_1a_2}{\Delta}.$$

Так как система (1) инвариантна при замене x, y на $-x, -y$. То особые точки M_1, M_2, M_3, M_4 будут одного и того же типа. Система (1) может иметь семь, пять или три изолированные особые точки, что зависит от следующих коэффициентных неравенств:

1)$a_1c_1 < 0, \Delta\Delta_i > 0$; 2)$a_1c_1 > 0, \Delta\Delta_i > 0$

3)$a_1c_1 < 0, \Delta\Delta_i < 0$; 4)$a_1c_1 > 0, \Delta\Delta_i < 0$, $i = 1, 2$

Если выполнены неравенства $a_1c_1 > 0, \Delta\Delta_i < 0, \Delta\Delta_2 < 0$, то система (1) имеет единственную особую точку $O(0,0)$- начало координат. Тип этой точки определяется уравнение и Брио и Буке (2)

Имеет место

Теорема 2. Пусть m-четное число и выполнены неравенства $a_1c_1 < 0, \Delta\Delta_1 > 0, \Delta\Delta_2 > 0, \sigma = c_1a_{22}, (a_{21} - a_{11}) \neq 0$ Тогда система (1)имеет семь изолированных особых точек и возможны следующие случаи их совмест ного сосуществования: 1) три узла, четыре седла, 2) три седла, четыре фокуса; 3) три седла, четыре узла.

Аналогично можно исследовать особые точки системы (1) и в бесконечности.

References

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., Наука 1990г. 488.

2. Дюляк Г. О О предельных циклах, М., Наука 1980. 156.

2. Эргашев В.Э. Геометрическое исследование одной дифференциальной системы, ДАН Республики Узбекистан, 6, 1991г.

Задача Коши для уравнения дробного порядка с псевдодифференциальными операторными коэффициентами

Касимов Ш. Г.[1], Ражапова С. Ш.[2]
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
shokiraka@mail.ru, 09.shukhratovna@gmail.com

Пусть в области $Q = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = (0,l) \times \cdots \times (0,l)$, а l и T – заданные положительные числа, рассматривается следующее псевдодифференциальное уравнение в частных производных, связанное с уравнением балки в многомерном случае с дробной производной:

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t) + D_{0t}^{\alpha}Bu(y,t) + Cu(y,t) = F(y,t), \quad (y,t) \in Q \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\Big|_{t=0} = \varphi_i(y), \quad i = 1,\ldots,-\lceil -\alpha \rceil \tag{2}$$

Здесь D_{0t}^{α} – оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, а B, C – псевдодифференциальные операторы, которые определяются ниже. Оператор $Au(y,t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}$, $(y,t) \in Q$, $m \in \mathbb{N}$ определяется в гильбертовом простран-стве $H = W^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$ с областью определения $\dot{W}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N;\theta}(Q) = \{u(y,t) : \left.\frac{\partial^{4k_j}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j}}\right|_{y_j=0} = \left.\frac{\partial^{4k_j}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j}}\right|_{y_j=l} = 0$ при $0 \le k_j < \frac{4s_j-N}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_j+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+1}}\right|_{y_j=0} = 0$ при $0 \le k_j < \frac{4s_j-N-2}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_j+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+2}}\right|_{y_j=0} = 0$ при $0 \le k_j < \frac{4s_j-N-4}{8}$,

$$j = 1,\ldots,N;\; u(y,t) \in W_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)\}. \tag{3}$$

Для произвольный кусочно равномерно непрерывной на $(-\infty,+\infty)$ функции $f(\lambda)$ определим псевдодифференциальный оператор $B = f(A)$ следующими равенствами

$$Bu(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ldots \sum_{m=0}^{\infty} f(\lambda_{n_1,\ldots,n_m}) T_{n_1,\ldots,n_m}(t) v_{n_1,\ldots,n_m}(y), \quad (y,t) \in Q,$$

где $T_{n_1,\ldots,n_N}(t) = (u(y,t), v_{n_1,\ldots,n_N}(y))_{W_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)}$ – коэффициент Фурье, с областью определения D(B), состоящей из тех $u(y,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$, для которых

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N})\right|^2 \left|T_{n_1,\ldots,n_N}(t)\right|^2 < +\infty, \;\; \lambda_{n_1,\ldots,n_N} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{n_j} = \sum_{j=1}^{N} b_{n_j}^{4m},$$

а числа b_{n_j} – корни уравнения $tg(lb) = th(lb)$. Аналогично для произвольный кусочно равномерно непрерывной на $(-\infty,\infty)$ функции $g(\lambda)$ определим псевдодифференциальный оператор $C = g(A)$ соответственно следующими равенствами

$$Cu(y,t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} g\left(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}\right) T_{n_1,\ldots,n_N}(t)\, v_{n_1,\ldots,n_N}(y), \quad (y,t) \in Q$$

с областью определения $D(C)$ состоящей из тех $u(y,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}$ (П) для которых $\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N})\right|^2 \left|T_{n_1,\ldots,n_N}(t)\right|^2 < +\infty$. Соответствующая система собственных функций имеет вид $v_{n_1,\ldots,n_N}(x_1,\ldots,x_N) = X_{n_1}(x_1)\cdots X_{n_N}(x_N)$, где

$$X_{n_j}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+b_{n_j}^{4s_j}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{\sin b_{n_j}(l-x)}{\sin b_{n_j} l} - \frac{\sinh b_{n_j}(l-x)}{\sinh b_{n_j} l} \right), \quad n_j \in \overline{\mathbb{Z}}_+.$$

Здесь $F(y,t)$, $\varphi_i(y)$, $i = 1,\ldots-[-\alpha]$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y),\ n \in \overline{\mathbb{Z}}_+^N\}$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть начальные функции $\varphi_i(y), i = 1,\ldots-[-\alpha]$ и правая часть $F(y,t)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{m_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_1=0}^{\infty} | \sum_{j=1}^{-\lceil-\alpha\rceil} (\varphi_j)_{m_1,\ldots,m_N} t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N} t^{\alpha}\right) +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\ldots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right] \frac{1}{1+f\left(\lambda_{m_1,\ldots,m_N}\right)} F_{n_1,\ldots,n_N}(\tau)\, d\tau \Bigg|^2$$

$$\cdot \left(1 + |\mu_{m_1,\ldots,m_N}|^2\right) < \infty$$

при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\dot{W}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \ldots = s_N > \frac{N}{4}, \theta = -[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(y,t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} [\sum_{j=1}^{-\lceil-\alpha\rceil} (\varphi_j)_{m_1,\ldots,m_N} t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N} t^{\alpha}\right) +$$

$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{n_1,\ldots,n_N}(t-\tau)^{\alpha}\right] \frac{1}{1+f\left(\lambda_{m_1,\ldots,m_N}\right)} F_{n_1,\ldots,n_N}(\tau) d\tau] \cdot v_{m_1,\ldots,m_N}(y)$,
где $\mu_{m_1,\ldots,m_N} = \frac{g(\lambda_{m_1,\ldots,m_N})}{1+f(\lambda_{m_1,\ldots,m_N})}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К.Б. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе, Дифференциальные уравнения, 2021, том 57, N 3. С. 364–374.
2. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально–граничная задача для уравнения балки в многомерном случае, Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том 55, N 10, с. 1379–1391.
3. Sh.G. Kasimov., A.P. Koshanov. On the unambiguous solvability of a multidimensional initial-boundary value problem for the beam oscillation equation with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, (11), 5546–5558 (2024).

Формулы обращения некоторых интегральных уравнений Вольтерра с функцией Гаусса в ядрах и с отрицательными параметрами

Комилова Н. Д.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
nigora.komilova@bk.ru

Рассмотрим интегральные уравнения

$$\int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} F\left(\alpha, 1-\alpha; \beta; \frac{x-t}{2x}\right) f(t)dt = g(x) \tag{1}$$

и

$$\int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} (x-t)^{-2\beta} F\left(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}\right) f(t)dt = g(x), \tag{2}$$

каждое из которых аналогично известному уравнению Абеля, где α и β – комплексные числа. Здес и далее $F(a,b;c;z)$ – известная гипергеометрическая функция Гаусса.

При решении задач математической физики иногда встречаются интегральные операторы первого рода с вольтерровскими ядрами типа (1).

В случае положительных параметров $0 \le Re\alpha < Re\beta < 1$ об обратимости интегрального уравнения (1) известна следующая

Теорема 1 [1]. Пуст $0 \le Re\alpha < Re\beta < 1$, $Re(\alpha+\beta) < 1$; $g(x) \in C^1[0,b]$. Тогда интегральное уравнение (1) в классе функций $f(x) \in C(0,b)$, для которых $xf(x) \to 0$ при $x \to 0$, обратимо по формуле

$$f(x) = \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{-\beta} F\left(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \frac{t-x}{2t}\right) g(t)dt.$$

Отметим, что интегральное уравнение (1) появляется при решении второй краевой задачи Коши-Гурса для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с положительными параметрами.

При изучении краевых задач для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с отрицательными параметрами параметры интегрального уравнения (1) выходят за рамки $0 \le Re\alpha < Re\beta < 1$.

Теорема 2. Пусть $-1 < Re\alpha \le 0$, $1 < Re\beta < 2$, $Re(\alpha+\beta) > 1$, $g(x) \in C^1[0,b]$ и $x^{\alpha}g(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} F\left(\alpha, 1-\alpha; \beta; \frac{x-t}{2x}\right) f(t)dt = x^{\alpha}g(x) \tag{3}$$

в классе функций $f(x) \in C^1(0,b)$, для которых $xf(x) \to 0$ при $x \to 0$, обратимо по формуле

$$f(x) = \frac{\sin\beta\pi}{(1-\beta)\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{1-\beta} F\left(-\alpha, 1+\alpha; 2-\beta; \frac{t-x}{2t}\right) t^{\alpha} g'(t)dt. \tag{4}$$

Доказательство. Используя известное интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt, \ Rec > Reb > 0,$$

левую часть уравнения (3) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^x \frac{\left(x^2-y^2\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}dy \int_0^y \frac{(y-t)^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}f(t)dt = \frac{g(x)}{2^\alpha\Gamma(\beta)}. \tag{5}$$

Вычислим производную с обеих сторон последнего равенства (5):

$$2x\int\limits_0^x \frac{\left(x^2-y^2\right)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}dy \int_0^y \frac{(y-t)^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}f(t)dt = \frac{g'(x)}{2^\alpha\Gamma(\beta)}. \tag{6}$$

Меняя порядок интегрирования в левой части равенства (6), получим

$$\frac{2x}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int\limits_0^x f(t)dt\int_t^x \left(x^2-y^2\right)^{-\alpha-1}(y-t)^{\alpha+\beta-2}dy = \frac{g'(x)}{2^\alpha\Gamma(\beta)}. \tag{7}$$

Полагая $y = x-(x-t)s$ во внутренном интеграле (7) и используя опять интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса, равенство (7) можно привести к виду

$$\int\limits_0^x (x-t)^{\beta-2}F\left(-\alpha, 1+\alpha; \beta-1; \frac{x-t}{2x}\right)f(t)dt = \frac{x^\alpha g'(x)}{(\beta-1)}. \tag{8}$$

Так как $0 \le -Re\alpha < 1$ и $0 < Re\beta - 1 < 1$ в интегральном уравнении (8), то к нему можно применить Теорему 1. В результате получим формулу обращения (4). Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (2).

Теорема 3. Если $g(0) = 0$, $g(x) \in C[0,b] \cap C^1(0,b)$, $0 \le |Re\alpha| < |Re\beta| < 1/2$, то интегральное уравнение (2) имеет единственное решение $f(x)$, которое непрерывно и интегрируемо в $(0,b)$ и определяется формулой

$$f(x) = \frac{\sin 2\beta\pi}{2\beta\pi}x^{-2\alpha}$$

$$\times\frac{d}{dx}\left\{x^\alpha\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta}F\left(-\alpha, 1+\alpha; 1+\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}\right)t^\alpha g'(t)dt\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов М.М. Решение в замкнутом виде интегрального уравнения Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре, Дифференциальные уравнения. 1982. том 13, є 1, с.171–173.

Линейная дифференциальная игра с импульсным управлением

Мамадалиев Н.А.[1], Мустапокулов Х.Я.[2]

[1,2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
[2]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
m_numana59@mail.ru, m_hamdan@mail.ru

В данной работе рассматривается линейная дифференциальная игра преследования при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, которое представляется с помощью функции Дирака $\delta(t-\tau_i)$, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t), t \geq 0$, со значениями из некоторого непустого компактного множества $Q, Q \subset \mathbb{R}^q$ (геометрическое ограничение) которое определяет класс допустимых управлений убегающего. Разработан аналог третьего метода задачи преследования и применения его к данной постановленной задаче. В основу исследования положены основные идеи метода разрешающих функций.

В пространстве $\mathbb{R}^m$, рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений [1,2]

$$\dot{z} = Az - u + v, \quad t \geq 0, ; z \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $z-$ фазовый вектор, $A-$ постоянная квадратная $(m \times m)$ матрица, $u, v-$ параметры управления преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Структура управлений игроков будет оговорена ниже в каждом из рассматриваемых случаев. В случае, когда первый и второй игрок принимают импульсные управления, мгновенными значениями управления являются векторы из множеств P и Q, соответственно. При этом P, Q непустые компактные подмножества в $\mathbb{R}^m$, терминальное множество M представляется цилиндром вида $M = M_0 + M_1$, где M_0 Ч линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M_1- выпуклое замкнутое подмножество подпространства L, где $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^m$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^m$).

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}-$ последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания $(\tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \cdots)$, (не имеющая конечных точек сгущения) удовлетворяющая следующему условию.

Классом допустимых управлений преследующего игрока является множество импульсных функций, которые выражаются через дельта-функции Дирака [1]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t-\tau_i), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где векторы скачков преследователя $u_i; (i \in \mathbb{N}), ; \mathbb{N}-$ множество натуральных чисел, принадлежат $P-$ непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m,\ P \subset \mathbb{R}^m$. Здесь и далее через $\delta(t)$ обозначим дельта-функцию. Предположим также, что управление убегающего игрока $v(t)$ представляет собой измеримую функцию времени со значениями из некоторого непустого компактного множества $Q,\ Q \subset \mathbb{R}^m$, (геометрическое ограничение) которое определяет класс допустимых управлений убегающего.

Цель настоящей работы - найти новые достаточные условия при выполнении которых из начального положения $z_0 \notin M,\ (.(2.1))$ догоняющий может гарантировать завершение преследования при любом допустимом поведении убегающего игрока за конечное время.

Пусть $n-$ произвольное натуральное число и $M(r),\ 0 \leq r \leq \tau_n-$ произвольное компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_n} M(r)dr \subset M_1$ [3].

Пусть $v(t),\ t \geq 0$ допустимое управление убегающего игрока. Введем следующие множества

$$\widehat{W}_i(n, M_i(n), v(\cdot)) = \left[M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} P\right] - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - r)A} v(r) dr,$$

$$W_i(n, M_i(n)) = \bigcap_{v(\cdot) \in Q[\tau_{i-1}, \tau_i]} \widehat{W}_i(n, M_i(n), v(\cdot))$$

$$= \left[M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} P\right] * \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - r)A} Q dr,$$

$$W_i(n) = \bigcup_{M_i(\cdot)} W_i(n, M_i(n)),$$

где

$$M_i(n) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} M(r) dr, \quad v(\cdot) \in Q[\tau_{i-1}, \tau_i],\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположение 1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех $n, i,\ n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. Пусть для системы (1) при импульсном управлении преследователя (2) выполнено предположение 1, множества M_1 и P выпуклы и для начального положения $z_0 \notin M$ и некоторого набора w $N(z_0, w) < +\infty$. Тогда в игре (1)-(2) из заданного начального положения $z_0 \notin M$, возможно завершение преследования за конечное время $\tau_{N(z_0,w)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. 11:1. 212–224.
2. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсным и интегрально-ограниченными управлениями игроков, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. 22:3. 273–282.
3. Сатипов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.

Задача Коши для обобщенной системы Коши-Римана с действительными кватернионными параметрами

Сатторов Э.Н.[1], Рустамов С.У.[2]

[1]Самаркандский государственный педагогический институт
[2]Навоинский горна и технологический государственный университет
Sattorov-e@rambler.ru, Sohibjon17@rambler.ru

В работе изучается задача Коши для обобщенной системы Коши-Римана с действительным кватернионным параметром в ограниченной области.

Пусть $\Omega-$ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0, \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \partial\Omega = S \cup T$.

Векторное пространство $\mathbb{R}^4$ с алгебраической структурой кольца называется множеством действительных кватернионов и обозначается через $\mathbb{H}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{a = a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 | a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, 3\}.$$

Кватернионы можно определить в виде специальной $4\times 4-$ действительной матрицы, которая имеет форму

$$a=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1\\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0\end{bmatrix}$$

здесь $a_k, k=0,1,2,3$ означает действительное число.

Введчм трчхмерный оператор

$$\bigtriangledown=i_1\frac{\partial}{\partial x_1}+i_2\frac{\partial}{\partial x_2}+i_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

для отображений $\overrightarrow{F}=\sum_{j=1}^{3}F_j i_j:\mathbb{R}^3\to\mathbb{H}$.

Для $F=(F_0,\overrightarrow{F})\in ker\nabla$ такой, что $\nabla\cdot F=0$ или $0=F\cdot\nabla$ некоммутативны, будем рассматривать левые и правые операторы:

$$D:=i_1\frac{\partial}{\partial x_1}+i_2\frac{\partial}{\partial x_2}+i_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\sum_{i=1}^{3}i_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

или

$$\overline{D}:=\frac{\partial}{\partial x_1}i_1+\frac{\partial}{\partial x_2}i_2+\frac{\partial}{\partial x_3}i_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}i_i$$

обобщающие двумерный оператор Коши-Римана (см. [2]); $1,i_1,i_2,i_3-$ кватернионные единицы.

Из работы ([1], п. 8.8) следует

Определение 1. Функция $\rho(y,x)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора D, где

$$\rho(y,x)=-D(\Phi_0)=-D\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}\right)=-D\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|y-x|}\right)$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{y-x}{|y-x|^3}=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(y-x)|y-x|},\qquad (1)$$

Задача 1. Известны данные Коши решения системы

$$DF(a)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\operatorname{div}\vec{F}=0,\\ \operatorname{grad}F_0+\operatorname{rot}\vec{F}=0,\end{cases}\qquad (2)$$

на поверхности S:

$$F(y)\big|_S=f(y),\quad y\in S\qquad (3)$$

$f=\sum_{k=0}^{3}f_k i_k$, - заданная непрерывная полная кватернионная функция.

Требуется восстановить функцию $F(x)$ в Ω, исходя из заданной f. т.е. решить задачу аналитического продолжения решения системы Мойсила- Теодореску в пространственной области по ечц значениям на гладком куске S границы.

В области Ω: фиксированной точке $A=A(a_1,a_2,a_3)$ соответствует кватернион $a=a_0i_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3$.

Пусть $\alpha(y)=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k(y)i_k$, где α_k - компоненты внешней нормали в точке y, $|\alpha|=1$. $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ - единичная внешняя нормаль, и $dS=n\,d\Gamma=dx_2dx_3i_1+dx_1dx_3i_2+dx_1dx_2i_3$, где $d\Gamma$ - поверхностный элемент $\partial\Omega$.

Если
$$\Phi_0(y,x) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}, \tag{4}$$
фундаментальное решение классического уравнения Лапласа, где r = |y - x|, то справедлива формула.

$$\rho(y,x) = -D(\Phi_0) = -D\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}\right) = -\overline{D}\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|y-x|}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{y-x}{|y-x|^3} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{(y-x)|y-x|} \tag{5}$$
$$Dp = \overline{D}p = \Delta_3\left(\frac{1}{|y-x|}\right) = 0,$$
при $y \neq x, y - x = \sum_{k=1}^{3}(y_k - x_k)i_k$.

В работе [3] указан специальный вид формулы КошиЏПомпейя в трчхмерном пространстве для дифференцируемых кватернионных функций, то есть для $F \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{R})) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{H}(\mathbb{R}))$.

При решении задачи Коши (2), (3) используем интегральные формулы Коши:
$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} h(y,x)\cdot F(y)\,dS_y = \begin{cases} F(x), & x\in\Omega, \\ 0, & x\notin\Omega, \end{cases} \tag{6}$$
где
$$h(y,x) = -D(\Phi(y,x)) = D(\Phi_0(y,x) + g(y,x))\,. \tag{7}$$
Функция $\Phi(y,x)$ определяется следующим образом:
$$\Phi(y,x) = \big[-2\pi^2K(0)\big]^{-1}\int_0^\infty Im\left(\frac{K(w)}{w}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$
$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_3 - x_3. \tag{8}$$

Литература

1. Brackx F, Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 pp.
2. Gurlebeck K., Sprossig W. Quaternionic Analysis and elliptic boundary value problems. Berlin: Akademie Verlag, 1989. 56. 253 p.
3. Pascali D. Old and new in the monogenic quaternion theory, Proceedings of the first conference, Classical and Functional Analysis, Azuga–Romania. 2013. P.103–120.

О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области

Тажимуратова А. К.
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан;
asalkadirbergenovna@gmail.com

Краевые задачи для дифференциальных уравнений четвёртого порядка находят широкое применение при моделировании процессов в различных областях науки и техники: при изучении динамики сжимаемой стратифицированной жидкости, распространения волн в диспергирующих средах, вибраций кораблей, колебаний стержней, балок и пластин.

Краевым задачам для уравнений четвчртого порядка посвящены работы [1-5]. Классификация уравнений четвчртого порядка с двумя независимыми переменными дана в монографии [4], где также представлена обширная библиография по этой теме и рассмотрены различные типы краевых задач. Начально-граничные задачи для колебаний балки исследуется в работе [5].

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ 0 < t < q\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} + u_t - u_{xxxx} - b^2 u = 0$$

где $b = const$.

Задача 1. Найти в области Ω функцию $u\,(x,t)$ удовлетворяющие условиям

$$u\,(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,3}_{x,t}\,(\Omega)\,; \tag{1}$$

$$Lu\,(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega; \tag{2}$$

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,,\ u_t\,(x,0) = \psi\,(x)\,,\ u\,(x,q) = \eta\,(x)\,,\ 0 \le x \le p; \tag{3}$$

$$u\,(0,t) = u\,(p,t) = 0,\ u_{xx}\,(0,t) = u_{xx}\,(p,t) = 0,\ 0 \le t \le q, \tag{4}$$

где $\varphi\,(x)\,,\ \psi\,(x)\,,\eta\,(x)$ - заданные функции, причем $\varphi^{(2i)}\,(0) = 0,\ \varphi^{(2i)}\,(p) = 0,$ $\eta^{(2i)}\,(0) = 0,\quad \eta^{(2i)}\,(p) = 0,\quad i = 0,1;\quad \psi\,(0) = \psi\,(p) = 0.$

Под классическим решением краевой задачи (1)-(4) понимаем функцию $u\,(x,t) \in C^{4,3}_{x,t}\,(\Omega)$ удовлетворяющие условиям (1)-(4) в обычном смысле.

Теорема 1.Пусть функции $\varphi\,(x)\,,\ \psi\,(x)$ и $\eta\,(x)$ удовлетворяют условиям: $\varphi\,(x)\,,$ $\eta\,(x) \in C^{(5)}\,[0,\,p]\,,\ \psi\,(x) \in C^{(4)}\,[0,\,p]\,,\ \varphi^{(2i)}\,(0) = \varphi^{(2i)}\,(p) = 0,\ \eta^{(2i)}\,(0) = \eta^{(2i)}\,(p) = 0,\ i = 0,1,2;\quad \psi^{(2i)}\,(0) = \psi^{(2i)}\,(p) = 0,\ i = 0,1.$ Тогда существует единственное решение задачи (1)-(4).

Устойчивость решения. Введем следующие нормы:

$$\|u\,(x,t)\|_{L_2[0,p]} = \left(\int\limits_0^p |u\,(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|u\,(x,t)\|_{C\left(\bar{\Omega}\right)} = \max_{\bar{\Omega}} |u\,(x,t)|\,.$$

Теорема 2.Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для решения задачи 1 справедливы оценки:

$$\|u\,(x,t)\|_{L_2[0,p]} \le C_1\left[\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\eta\|_{L_2}\right],$$

$$\|u\,(x,t)\|_{C\left(\bar{\Omega}\right)} \le C_2\left[\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|\eta\|_{W_2^1}\right].$$

Литература

1. Apakov Yu.P., Meliquzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No.4(112), 2023, pp.30–40.

2. Бекиев А. Б. Разрешимость нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка, Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. є1. С. 9–26.

3. Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional diferential operator. Computers and Mathematics with Applications. 2011. 62(10), 3884-3893.

4. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Т:. 2000. 144 с.

5. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе, Дифференциальные уравнения. 2021. том 57, є 3, с.364–374.

Интегрирование уравнения Гарри Дима с переменным коэффициентом с самосогласованным источником

Уразбоев Г.У[1], Бабаджанова А.К[2], Сапарбоева Д.Р.[1]

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;

Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан;

gayrat71@mail.ru, oygul@bk.ru, sdilfuza76@mail.ru

Данная работа посвящена интегрированнию уравнения Гарри Дима с переменным коэффициентом с самосогласованным источником с использованнием методом обратной задачи рассеяния.

Интегрируемое нелинейное эволюционное уравнение Гарри Дима

$$q_t(x,t) = 2\left(1\Big/\sqrt{1+q(x,t)}\right)_{xxx}$$

которое встречается в гидродинамике и физике плазмы изучалось в работах [1]-[4].

В данной работе рассматривается следующее система уравнений:

$$\begin{cases} q_t(x,t) = 2\left(1\Big/\sqrt{1+q(x,t)}\right)_{xxx} - 2\sum_{n=1}^{N}(1+q(x,t))\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_n^2(x,t)\right) - \\ \qquad -q_x(x,t)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n^2(x,t) - \gamma(t)q_x(x,t), \\ \varphi_n''(x,t) - \chi_n^2\varphi_n(x,t)q(x,t) = \chi_n^2\varphi_n(x,t)\,,\ n = 1,\,2,\,\ldots,\,N \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$q(x,0) = q_0(x), \tag{2}$$

где начальная функция $q_0(x)$ имеет следующие свойства:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q_0(x)| + \left|1 - \frac{1}{1+q_0(x)}\right|\right)dx < \infty$$

2. Оператор $L(0) := \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 q_0(x)$ имеет ровно N простых собственных значений $-\chi_1^2(0) > -\chi_2^2(0) > \ldots > -\chi_N^2(0)$ ине имеет спектральных особенностей.

В рассматриваемой задаче $\varphi_n(x,t)$ - собственная функция оператора $L(0) := \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 q_0(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n(t) = -i\chi_n(t)$нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+q(x,t))\varphi_k^2(x,t)dx = A_k(t) \tag{3}$$

где $A_k(t)$ и $\gamma(t)$ - заданные непрерывные функции, причем $\gamma(t)$ ограниченная, непрерывная, знакопостоянная действительная функция.

Предполагается, что для любого $t \geq 0$ функция $q(x,t)$ обладает необходимой гладкостью и достаточно быстро стремится к нулю, как $|x| \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q(x,t)| + \left|1 - \frac{1}{1+q(x,t)}\right|\right)dx < \infty. \tag{4}$$

В данной работе получены представления для решений $q(x,t), \varphi_n(x,t), n = 1,\,2,\,\ldots,\,N$ задачи (1)-(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Список литературы

1. Calogero F., Degasperis A. Spectral Transform and Solitons, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam: The Netherlands, 1982.
2. Wadati M., Ichikawa Y. H., Shimizu T. Cusp soliton of a new integrable nonlinear evolution equation, Progress of Theoretical Physics. 1980. Vol. 64, No 6, P. 1959–1967.
3. Wadati M., Konno K., Ichikawa Y. H. New integrable nonlinear evolution equations, Journal of the Physical Society of Japan. 1979. Vol. 47. No. 5. P. 1698-1700.
4. Urazboev G.U., Babadjanova A.K., Saparbaeva D.R. Integration of the Harry-Dym equation with an integral type source. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki, 2021. 31(1). P. 285-295.

Схемы повышенной точности для многомерного параболического уравнения

Утебаев Д.[1], Калмуратова С.М.[2]

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, г. Нукус, Узбекистан;
dutebaev_56@mail.ru, kalmuratova.sapura@mail.ru

Построение разностных схем повышенной точности при минимальных шаблонах являются приоритетным направлением современной теории численных методов. Особое место занимает численное исследование математических моделей сложных нестационарных процессов, например, как нестационарные уравнения параболического типа, псевдопараболические уравнения Соболевского типа, уравнения конвекцииЦдиффузии и т.д. Начально-краевые задачи для этих уравнений возникают при исследовании экологических проблем, связанных с описанием процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В предлагаемой работе рассматривается многомерное параболическое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), u(x,0) = u_0(x), u| = \mu(x,t), \tag{1}$$

$Lu = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^k}$ Цp мерный оператор Лапласа.

Для аппроксимации пространственных переменных задачи (1) используется метод конечных разностей повышенной точности [1]. В результате получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности

$$\bar{D}\frac{du_h(t)}{dt} + \bar{A}u_h(t) = \bar{f}_h(t), \quad u_h(0) = u_{h,0}, \tag{2}$$

где $\bar{f} = \left(f + \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha f\right)^{j+1/2}$, $u_h(t) \in H_h$ аппроксимирует $u(x,t)$ в фиксируемых узлах $x = (i_1h_1, i_2h_2, ..., i_ph_p)$, $\bar{D} \equiv D + \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha$, $\bar{A} = A - \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} \sum\limits_{\beta\neq\alpha} \Lambda_\alpha\Lambda_\beta$, $D \equiv E$, $A = -\Lambda$, $\Lambda = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha$, $\Lambda_\alpha u_{h_\alpha} = u_{h_\alpha, \bar{x}_\alpha x_\alpha}, \in H_h$. Здесь $H_h = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\bar{\omega}_h)$ - подпространство дискретных функции u_{h_α}, аппроксимирующее H- гильбертово пространство.

Начальные и краевые условия аппроксимируются точно.

Для аппроксимации задачи (2) применяется кусочно-полиномиальный метод конечных элементов четвертого порядка точности [2]:

$$\bar{D}y_t - (\tau^2/12)\bar{A}\dot{y}_t + \bar{A}y^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma\bar{D}\dot{y}_t + \alpha\bar{A}y_t + \beta\bar{A}\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \tag{3}$$

$$y^0 = u_{h,0}, \dot{y}^0 = \dot{u}_{h,0},$$

где $\varphi_1 \approx \bar{f}$, $\varphi_2 \approx \bar{f}$, $\dot{u}_{h,0} = \bar{D}^{-1}(f_h^0 - Au_{h,0})$.

Параметры схемы (3) подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации $\alpha + \beta = \gamma$, α, β, $\gamma = O(\tau^2)$.

В результате исследовании построены схемы четвертого порядка точности по всем переменным. Получены условия устойчивости и априорные оценки решения в классе гладких решений. Доказаны теоремы о сходимости и точности. На основе предложенного алгоритма получены численные результаты на тестовых задачах, которые подтверждают теоретические выводы. Численные результаты сопоставлены результатами известных методов и указаны преимущества построенных численных алгоритмов.

Литература

1. Самарский А.А. Схемы повышенного порядка точности для параболического уравнения теплопроводности, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, Т.3, є 5. С. 812–840.
2. Утебаев Д., Москальков М.Н. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. Ц Ташкент, Фан ва технология, 2012. 160 С.

Начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

Хажиев И. О.[1], Муродова Ш. И.[2]

Национальный университет Узбекистана, Туринский политехнический университет в г. Ташкенте;

Национальный университет Узбекистана, Ташкент;

kh.ikrom04@gmail.com, shahzodamurodova05@gmail.com

В данной работе начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка исследуется на условную корректность.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + a^2 u_{xxt} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

в области $\Omega = \{0 < x < \pi,\ 0 < t < T\}$, где a, λ - заданные постоянные числа, $a \neq 0$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,,\ u_t\,(x,0) = \psi\,(x)\,,\ 0 \le x \le \pi, \tag{2}$$

краевым

$$u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

условиям, где $\varphi\,(x)$, $\psi\,(x)$ достаточно гладкие функции.

Рассматриваемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики в смысле Ж. Адамара, а именно, в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

Лемма 1. Для решения задачи (1)-(3) имеет место оценка

$$\|u(x,t)\|^2 \le \left(\|u(x,0)\|^2 + \alpha\right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\|u(x,T)\|^2 + \alpha\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)},$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\left(a^2 \|u(x,0)\|^2_{W_2^2[0,\pi]} + \lambda \|u(x,0)\|^2 + \|u_t(x,0)\|^2\right)$.

Если ввести $M = \{u(x,t) :\ \|u(x,T\| \le m,\ m < \infty\}$ в качестве множества корректности, то с помощью леммы 1 можно доказать единственность и условную устойчивость решения задачи (1)-(3) на этом множестве. В результате можно построить регуляризованное приближенное решение по теории Тихонова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baranovskii, E.S. Mixed initialЏboundary value problem for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids. Comput. Math. and Math. Phys. 56, 1363–1371, 2016.
2. Fayazov K.S., Xajiyev I.O. Nokorrekt va teskari masalalar. O'quv qo'llanma. T.: Ma'rifat, 176 bet, 2024.
3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: изд-во Ин-та математики, 941 с., 2010.

Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка (АКНС(-1)) с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций

Хасанов А. Б.[1], Матякубова С. К.[2]

[1] Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Узбекистан;
[2] Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Узбекистан.
ahasanov2002@mail.ru

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка (АКНС(-1)) (см. [1]-[2]) с дополнительным членом:

$$\begin{cases} q_{xt} = 2q\mu_t + q - ap_x, \\ p_{xt} = 2p\mu_t + p + aq_x,\ a \neq 0, a = const. \\ \mu_x = p^2 + q^2, x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{array}{l} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \\ p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \\ \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \mu_0(t) \in C^1(t>0) \bigcap C(t \geq 0), \\ \left[q(x,t) + \mu(x,t)\right]|_{x=0} = \alpha(t), \alpha(t) \in C(t \geq 0) \end{array} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$\begin{array}{l} q(x+\pi,t) = q(x,t), p(x+\pi,t) = p(x,t), \\ q(x,t), p(x,t), \mu(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \bigcap C(t \geq 0). \end{array} \tag{3}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения точных решений $(q(x,t), p(x,t), \mu(x,t))$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ задачи (1)-(3) сведением еёк обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x,\tau \in \mathbb{R}, t>0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ соответственно. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \backslash \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}$, называются лакунами, где λ_n–корни уравнения $\Delta(\lambda)\mp 2=0$. Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n\in\mathbb{Z}$. Числа $\xi_n(\tau,t), n\in\mathbb{Z}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t)=sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}, n\in\mathbb{Z}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in\mathbb{Z}\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n\in\mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$. Коэффициенты $q(x+\tau,t)$ и $p(x+\tau,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяются однозначно по спектральным данным. С помощью начальной функции $q_0(x+\tau)$ и $p_0(x+\tau)$ построим оператора Дирака $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, найдцм спектральные данные $\{\lambda_n(\tau),\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau),n\in\mathbb{Z}\}$, оператора $L(\tau,0)$.
Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $(q(x,t),p(x,t),\mu(x,t))\,, x\in\mathbb{R}, t>0$ решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n\in\mathbb{Z}$, оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров $\tau\in\mathbb{R}$, и t т.е. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n, n\in\mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)\left(p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)\right), \ n\in\mathbb{Z}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial\xi_n\left(\tau,t\right)}{\partial t}=2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)),\ n\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in\mathbb{Z}, \tag{7}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in\mathbb{Z}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n\in\mathbb{Z}$, участвующие в уравнении (6) определяется по формулам:

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi)=\sqrt{\prod_{k=-\infty k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi)=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}\left\{q_t(\tau,t)+\mu_t(\tau,t)+\frac{1}{2}+a\left(p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)\right)\right\}.$$

Теорема 2. Если функции $q_0(\tau)$ и $p_0(\tau)$ удовлетворяют условиям

$$q_0(\tau+\pi)=q_0(\tau)\in C^2(\mathbb{R}),\ p_0(\tau+\pi)=p_0(\tau)\in C^2(\mathbb{R}),$$

а $\alpha(t)\in(t\geq 0)$ - непрерывная ограниченная функция, то существуют однозначно определяемые решения $(q(\tau,t),p(\tau,t),\mu(\tau,t))\,,\tau\in\mathbb{R},t>0$ задачи (1)-(3), которые определяются, соответственно, суммой рядов:

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)),$$

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right),$$

$$\mu(\tau,t)=\mu_0(t)+\int_0^{\tau}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t))\right)^2ds+$$

$$+\int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(s,t)\right)\right)^2 ds.$$

Литература

1. Ji Jie, Zhang Jian-Bing, Zhang Da-Jun.Soliton solutions for a negative order AKNS equation hierarchy. Communications in Theoretical Physics. 52:3, pp. 395–397, 2009.
2. Х. Н. Нормуродов, А. Б. Хасанов, Смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических бесконечнозонных функций, Матем. заметки, 117:5, 719–735, 2025.

Формула Карлемана для обобщенной системы Коши-Римана в трехмерной ограниченной области

Хасанов А.Б.[1], Эрмаматова Ф.Э.[2],
[1]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд
[2]Самаркандский государственный педагогический институт
ahasanov2002@mail.ru, fotimaermamatova817@gmail.com

В трчхмерном ограниченном области Ω рассмотрим систему уравнений

$$\operatorname{div}\vec{F}+(\vec{A}\cdot\vec{F})=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{F}+\left[\vec{F}\times\vec{A}\right]=0, \tag{1}$$

где $\vec{F}(x)=(F_1(x),F_2(x),F_3(x))$ – искомая вектор-функция, $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ – заданный постоянный вектор.

Задача 1. (Задача Коши). Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S:

$$\vec{F}(y)\big|_S=\vec{f}(y),\qquad y\in S, \tag{2}$$

где $\vec{f}(y)=(f_1(y),f_2(y),f_3(y),f_4(y))$ – заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить вектор-функцию $\vec{F}(x)$ в Ω, исходя из заданной $\vec{f}(y)$, т.е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщчнной системы КошиЏРимана (1) в пространственной области по еч значениям на гладком куске S границы.

Предположим, что Ω является областью с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, и что вектор-функция $\vec{f}(y)$ непрерывные и суммируемые на S. Тогда для обобщенного потенциального вектора в области Ω справедлива обобщенная пространственная интегральная формула Коши [1]

$$\int_{\partial\Omega} M_0(y,x;\vec{A})\,\vec{F}(y)\,ds_y=\begin{cases}0, & x\notin\overline{\Omega},\\ \vec{F}(x), & x\in\Omega,\end{cases} \tag{3}$$

$$M_0(y,x;H)=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3 & -\alpha_1u_2+\alpha_2u_1 & \alpha_3u_1+\alpha_1u_3\\ \alpha_1v_1+\alpha_2v_2 & -\alpha_1v_2+\alpha_2v_1+\alpha_3v_4 & -\alpha_2v_4+\alpha_3v_2\\ \alpha_1w_1+\alpha_3w_3 & \alpha_2w_1+\alpha_3w_4 & -\alpha_1w_3-\alpha_2w_4+\alpha_3w_1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$u_1=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\alpha_1\right)\Phi_0,\quad v_1=\left(\frac{\partial}{\partial y_2}+\alpha_2\right)\Phi_0,\quad w_1=\left(\frac{\partial}{\partial y_3}+\alpha_3\right)\Phi_0,$$

$$u_2=\left(\frac{\partial}{\partial y_2}-\alpha_2\right)\Phi_0,\quad v_2=\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\alpha_1\right)\Phi_0,\quad w_2=0,$$

$$u_3=\left(\frac{\partial}{\partial y_3}-\alpha_3\right)\Phi_0,\quad v_3=0,\quad w_3=\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\alpha_1\right)\Phi_0,$$

$$u_4=0,\quad v_4=\left(\frac{\partial}{\partial y_3}-\alpha_3\right)\Phi_0,\quad w_4=\left(-\frac{\partial}{\partial y_2}+\alpha_2\right)\Phi_0,$$

причцм $\Phi_0(y,x;\lambda)=\frac{1}{4\pi r}e^{i\lambda r}$, $\quad r=|y-x|$, $\quad \lambda^2=|\vec{A}|^2$, а $\vec{n}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ – внешняя нормаль поверхности $\partial\Omega$ в точке y.

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ является частью шара $B=B(0,R)$ с центром (в начале) в нуле и радиусом, $R>0$, S является гладкой замкнутой гиперповерхностью, в B, которая не проходит через точку $x=0$ и разбивает B на две области. Обозначим через Ω точку, которая не содержит начало. Его граница состоит из точки S и части сферы $\partial B\subset\mathbb{R}^3$.

При решении задачи (1), (2) мы используем базис с двойной ортогональностью в пространстве Гильберта, решение уравнения Гельмгольца чтобы вывести условие аналитического продолжения из $B(0,\varepsilon)$ в $B(0,R)$ для $G(u_0,f_0)$. Оператор Гельмгольца $\Delta+k^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\Delta+k^2=\frac{1}{r^2}\left(\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+r\frac{\partial}{\partial r}+k^2r^2-\Delta_S\right),\tag{5}$$

где $\Delta_S=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ оператор ЛапласаЦБельтрами на единичной сфере.

Известно, что число линейно независимых сферических гармоник в степени ν равно $J(\nu)=2\nu+1$. Возьмем ортонормальный базис

$$\{h_j^{(\nu)}\}_{j=0,1,\dots,J(\nu)}\quad \text{в } L^2(S).$$

При фиксированном $y\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ функция

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\bigl(ik|x-y|\bigr)}{|x-y|}$$

является решением уравнения Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$ в шаре $B(0,|y|)$.

Лемма 1. Для каждого $R>0$, система

$$\psi_\nu^j(r,\varphi,k)=g_i(r,k)h_\nu^{(j)}(\varphi),\quad \nu=0,1\dots j=0,\dots,J(\nu)\tag{6}$$

есть ортонормальный базис в подпространстве $L^2(B(0,R))$, состоящее из решений уравнения Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$.

Очевидно, оно является квадратно интегрируемым в $B(0,|y|)$, и обозначим через $c_\nu^{(j)}(y,k)$ его коэффициенты Фурье по отношению к ортогональной системе (6), т.е.

$$c_\nu^{(j)}(y,k)=\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\bigl(ik|x-y|\bigr)}{|x-y|},\ \psi_\nu^{(j)}(x,k)\right)_{L^2(B(0,|y|))}\Bigg/\int_0^{|y|}|g_\nu(r,k)|^2r^2dr.$$

Лемма 2. В конусе $\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 : |x|/|y|<1\}$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\bigl(ik|x-y|\bigr)}{|x-y|}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(\nu)}c_\nu^{(j)}(y,k)\,\psi_\nu^{(j)}(x,k), \tag{7}$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактных подмножествах конуса.

Таким образом, получим так называемую матрицу Карлемана для решений задачи Коши (1), (2). А именно

$$M_N(y,x;H)=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3 & -\alpha_1u_2+\alpha_2u_1 & \alpha_3u_1+\alpha_1u_3\\ \alpha_1v_1+\alpha_2v_2 & -\alpha_1v_2+\alpha_2v_1+\alpha_3v_4 & -\alpha_2v_4+\alpha_3v_2\\ \alpha_1w_1+\alpha_3w_3 & \alpha_2w_1+\alpha_3w_4 & -\alpha_1w_3-\alpha_2w_4+\alpha_3w_1\end{pmatrix}, \tag{8}$$

соответственно (4)

$$\Phi_N(y,x)=\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\bigl(ik|x-y|\bigr)}{|x-y|}-\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{j=1}^{J(\nu)}c_\nu^{(j)}(y,k)\,\psi_\nu^{(j)}(x,k)\right),$$

дифференциальный оператор с правой стороны, действующий по переменной x.

Теорема. Пусть обобщенно потенциальный вектор $\vec{F}(x)$ в Ω непрерывный вплоть до $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\vec{F}(x)=\lim_{N\to\infty}\int_S M_N(y,x;\vec{H})\,\vec{f}(y)\,dS_y,$$

для всех $x\in\Omega\setminus\partial\Omega$.

Алгоритм решения задачи Коши для нагруженного Кортевега-де Фриза с источником в случае движущихся собственных значений

Хоитметов У. А. [1], **Хасанов Т. Г.** [2]

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан; x_umid@mail.ru

Ташкентский Международный Университет Кимчҷ Филиал Самарканд, Самарканд, Узбекистан; temur.xasanov.2018@mail.ru

В данной работе изучается нагруженное уравнение КдФ с источником вида:

$$u_t+u(x_0,t)(u_{xxx}-6uu_x)=2\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right), \tag{1}$$

где $x_0\in\mathbb{R}$ заданное вещественное число. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx<\infty. \tag{3}$$

2) Оператор $L(0):=-\frac{d^2}{dx^2}+u_0(x)$, $x\in\mathbb{R}$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0),\lambda_2(0),\dots,\lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче $\varphi_m(x,t)$ является собственной функцией уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом $u(x,t)$, а $\psi_m(x,t)$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, приччм

$$W\left\{\varphi_m(x,t),\psi_m(x,t)\right\}=\varphi_m\frac{\partial\psi_m}{\partial x}-\psi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}=\omega_m(t)\neq 0,\ m=1,2,\ldots,N, \tag{4}$$

где $\omega_m(t)$ изначально заданные непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию

$$\int_0^t\omega_m(\tau)\,d\tau<-\lambda_m(0),\ m=1,2,\ldots,N\quad \text{при всех неотрицательных значениях } t.$$

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам в точке $x\to\pm\infty$, так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\left(|u(x,t)|+\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx<\infty,\ j=1,2,3,\ldots. \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t)$,
$\varphi_m(x,t)$, $\psi_m(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, $m=\overline{1,N}$ задачи (1) - (5) с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля. Кроме того, задача Коши для нелинейных эволюционных уравнений была подробно изучена в работах [1]-[3] в классах периодических и быстро убывающих функций.

Теорема. Если функции $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t)$, $\psi_m(x,t)$, $m=\overline{1,N}$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ являются решениями задач (1)-(5), то данные рассеяния
$\left\{r^+(k,t),\lambda_n(t)=-\chi_n^2(t),B_n(t),n=\overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\chi_n}{dt}=-\frac{\omega_n}{2\chi_n},\ n=1,2,\ldots,N$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3u(x_0,t)+\sum_{n=1}^N\frac{ik\omega_n}{\chi_n(k^2+\chi_n^2)}\right)r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3u(x_0,t)+\frac{i\eta_n\xi_n\omega_n}{2\chi_n}\right)B_n(t),\ n=1,2,3,\ldots,N$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Пусть задана функция $u_0(x)(1+|x|)\in L^1(\mathbb{R})$. Тогда решения задач (1)-(5) находятся с помощью следующего алгоритма:

1. Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$, получаем данные рассеяния $\left\{r^+(k),\chi_n,B_n,n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.
2. Используя теорему, находим данные рассеяния для $t>0$:
$$\left\{r^+(k,t),\chi_n(t),B_n(t),n=\overline{1,N}\right\}.$$

Используя метод, опирающийся на интегральное уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi_m(x,t)$ уравнения $L(t)\varphi_m(x,t):=-\varphi_m''(x,t)+u(x,t)\varphi_m(x,t)=\lambda_m\varphi_m(x,t)$, $m=1,2,\ldots,N$,

а $\psi_m(x,t),x\in\mathbb{R},t>0$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, удовлетворяющее (**??**).

LITERATURE

1. Khasanov A. B., Khasanov T. G., Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in the class of periodic infinite-gap functions, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 283, 4, August, 2024, pp. 674-689.
2. Hoitmetov U. A., Khasanov T. G. Integration of the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients in the case of moving eigenvalues of the Sturm-Liouville operator, Russian mathematics. 2024. Vol.68, 5. pp. 51-65.
3. Khasanov A. B., Khasanov T. G. Cauchy problem for the loaded Korteweg–de Vries equation in the class of periodic functions, Differential Equations, 2023, Vol. 59, є12, pp. 1678–1690.

СЕКЦИЯ 4. ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ
SECTION 4. FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS

O‘zgaruvchan koeffitsiyentli yuklangan issiqlik tarqalish integro-differensial tenglamasi uchun qo’yilgan to’g’ri masala yechimining mavjudligi va yagonaligi

Baltaeva U. I.[1], Xasanov B. M.[2],To’rayev O. O.[3], Ro’zimova D. G’.[3]

Xorazm Ma’mun Akademiyasi[1,2], Xiva, Uzbekistan;

Urganch davlat universiteti[3], Urganch, Uzbekistan;

umida_baltayeva@mail.ru, khasanovboburjon1993@gmail.com

$R^n - n-$o‘lchamli Yevklid fazosi, $x = (x_1, ..., x_n)$ undagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. $R^n_T -$ $(n+1)$ $-$o‘lchamli Yevklid fazosi bo‘lib, undagi nuqta (x,t) bo‘lsin, bu yerda $x \in R^n$va $t \in (0,T]\,, T > 0$; $\bar{R}^{n-1}_T = \{\,(x',t)|\, x' \in R^{n-1}, 0 \le t \le T\}\,;$

Koshi masalasi: Quyidagi

$$u_t - a\,(t)\,\Delta u = \lambda D^{-\alpha}_{0,t} u\,(x',t) + F\,(x,t)\,,(x,t) \in R^n_T \tag{1}$$

issiqlik tarqalish tenglamasini

$$u\,(x,t)|_{t=0} = \varphi\,(x)\,, x \in R^n \tag{2}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantruvchi $u(x,t)$ yechimini aniqlang,
bu yerda $a\,(t)$, $\lambda \in R$,$F\,(x,t)$ va $\varphi\,(x)$-berilgan yetarli silliq funksiyalar, Δ-Laplas operatori bo‘lib, faqat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o‘zgaruvchilarga tasir qiladi, ya’ni $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,

$D^{-\alpha}_{0t}$ -α tartibli Riman-Liuvill manosidagi kasr tartibli integral operator bo‘lib, $\alpha > 0$ da quydagicha ifodalanadi:

$$D^{-\alpha}_{0t} u\,(x',t) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, u\,(x',\tau)\, d\tau.$$

Bunday masalalar teskari masalalar nazariyasida to‘g‘ri masala deb ataladi.

(1) va (2) Koshi masalasi yechimini integral tenglamalar metodi yordamida aniqlaymiz. Buning uchun dastlab bizga [1] ma’lum bo‘lgan quyidagi: Koshi masalasi yechimidan foydalanamiz, ya’ni ushbu

$$\nu_t - a\,(t)\,\Delta \nu = \Psi\,(x,t)\,, x \in R^n, t > 0 \tag{3}$$

issiqlik tarqalish tenglamasi uchun

$$\nu\,(x,0) = \rho\,(x)\,, x \in R^n \tag{4}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantruvchi $\nu(x,t)$ yechimi quydagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\nu(x,t) = \int_{R^n} \rho(\xi) G(x-\xi, \theta(t)) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{R^n} \Psi(\xi, \theta^{-1}(\tau)) G(x-\xi, \theta(t)-\tau) d\xi, \tag{5}$$

bu yerda, $\theta(t)=\int_0^t a(t)\,d\tau$ va $\theta^{-1}(t)$ funksiya $\theta(t)$ funksiyaning teskari funksiyasi,

$$G(x-\xi,\theta(t)-\tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi(\theta(t)-\tau)})^n}e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4(\theta(t)-\tau)}},$$

$\frac{\partial}{\partial t}-a(t)\Delta$- o‘zgaruvchan koeffitsiyentli differensial operatorining fundamental yechimidir. Demak,(5) formuladan foydalangan holda (1), (2) Koshi masalasini yechimini mos ravishda quyidagi Volterra tipidagi integral tenglama ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$u(x,t)=\int_{R^n}\varphi(\xi)G(x-\xi,\theta(t))d\xi+$$

$$+\int_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int_{R^n}F(\xi,\theta^{-1}(\tau))G(x-\xi,\theta(t)-\tau)d\xi+$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int_{R^n}\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\left(\theta^{-1}(\tau)-\beta\right)^{\alpha-1}u(\xi',\beta)G(x-\xi,\theta(t)-\tau)d\beta d\xi, \tag{6}$$

bu yerda

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\,,\xi'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1})\,,d\xi=d\xi_1...d\xi_n,$$
$$|x|^2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2.$$

Teorema. Agar $a(t)\in E:=\{a(t)\in C^1[0,T]\,,0<a_0<a(t)\le a_1<\infty\}$va

$$\varphi(x)\in H^{l+2}(R^n)\,,\varphi(x)\le\varphi_0=const>0,$$

$$F(x,t)\in H^{l+2,(l+2)/2}(\bar{R}_T^n),$$

bo‘lsa u holda (6) integral tenglamaning $H^{l+2,(l+2)/2}\in(R_T^n)$ sinfga tegishli yagona $u(x,t)$ yechimi mavjud.

Adabiyotlar

1. D. K. Durdiev and J. Z. Nuriddinov, On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 30, (2020), 572-584
2. Baltaeva U.I., Khasanov B.M. Cauchy problem for a loaded hyperbolic equation with the Bessel operator, Mathematica Slovaca 74(2024), 5, C. 1241-1254.

O‘zgaruvchi koeffitsiyentli kasr tartibli yuklangan integral operatorli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi

Baltaeva U. I.[1], Xasanov B. M.[2],To’rayev O. O.[3],Ro’zimova D. G’.[3]
Khorezm Mamun Academy[1,2], Khiva, Uzbekistan;
Urganch davlat universiteti[3],Urganch,Uzbekistan;
umida_baltayeva@mail.ru, khasanovboburjon1993@gmail.com

Koshi masalasi: Quydagi

$$u_t-a(t)\Delta u=\lambda D_{0,t}^{-\alpha}u(x',t)+\int_0^t K(x,\tau)\,u(x,t-\tau)\,d\tau\,(x,t)\in R_T^n \tag{1}$$

issiqlik tarqalish tenglamasini

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x)\,x\in R^n \tag{2}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantruvchi $u(x,t)$ yechimini aniqlang, bu yerda $a(t)$ va $\varphi(x)$-berilgan yetarlicha silliq funksiyalar bo'lib, quydagicha

$$a(t) \in E := \left\{a(t) \in C^1[0,T], 0 < a_0 < a(t) \leq a_1 < \infty\right\}, \tag{3}$$

$$\varphi(x) \in H^{l+2}(R^n), \varphi(x) \leq \varphi_0 = const > 0, \tag{4}$$

bo'lsin, Δ-Laplas operatori bo'lib, faqat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o'zgaruvchilarga tasir qiladi, ya'ni $\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\lambda \in R$, $\lambda < 1$, $D_{0t}^{-\alpha}$ -α kasr tartibli Riman-Liuvill manosidagi integral operator $\alpha > 0, \alpha \in (0,1)$.

(1) tenglamadagi o'rama ko'rinishidagi yadroni x o'zgaruvchiga ajralgan deb hisoblaymiz, ya'ni $K(x,t) = h(x_n)\, k(x',t)$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$,
bu yerda

$$h(x_n) \in H^{l+2}(R), k(x',t) \in H^{l,(l+2)/2}\left(\bar{R}_T^{n-1}\right). \tag{5}$$

(1) va (2) Koshi masalasini yechish uchun dastlab bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimidan foydalanamiz.

Ya'ni, [1] ishdagi (1.1) formuladan foydalanib, (1), (2) Koshi masalasini quyidagi ikkinchi tur yuklangan Volterra tipidagi integral tenglamasi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$u(x,t) = \int_{R^n} \varphi(\xi) G(x-\xi, \theta(t)) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \times$$

$$\times \int_{R^n} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} h(\xi_n)\, k(\xi', \alpha) u(\xi, \theta^{-1}(\tau) - \alpha) G(x-\xi, \theta(t) - \tau) d\xi d\alpha$$

$$+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \times$$

$$\times \int_{R^n} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} \left(\theta^{-1}(\tau) - \beta\right)^{\alpha-1} u(\xi', \beta) G(x-\xi, \theta(t) - \tau) d\beta d\xi. \tag{6}$$

Xosil bo'lgan (6)integral tenglamaning yechimining mavjudliligini va yagonaligini ketma-ket yaqinlashi usulidan foydalanib isbotlaymiz.
Natijada quydagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. Agar

$$0 < |\lambda| < (1 - k_0 h_0) \frac{\Gamma(\alpha + j)}{j!}, j = 1, 2, ...,$$

$\alpha \in (0,1)$ va $t > 1$, bo'lib, (3),(4) va (5) shartlar bajarilsa. U holda (6) integral tenglamaning $H^{l+2,(l+2)/2} \in (R_T^n)$ sinfga qarashli yagona $u(x,t)$ yechimi mavjud.

Adabiyotlar

1. Durdiev.D. K, Nuriddinov J. Z. On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2020, том 30, выпуск 4, 572–584.
2. Baltaeva U.I, Xasanov B,M., The direct problem for the loaded heat dissipation equation with a variable coefficient, Journal of Ilm Sarchashmalari, 4. 2022, pp.3–7.

Problem of finding the coefficient at the least member of one partial derivative equation with a fractional derivative

Bozorov Z.R.[1], **Ahmadova O.**[2]
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
ihasanov998@gmai.com, oltinoyahmadova1504@gmail.com

Fractional partial differential equations represent generalizations of partial differential equations to the inverse (external) order. These equations have garnered significant interest in applied sciences because of their ability to model complex problems. Convective differentiation plays an important role in many processes of thermal objects. For qualitative mathematical modeling, the diffusion equation with the corresponding signal is used as a tool. The introduction of fractional integral differential elements into the transport equation as well as processes occurring within the medium is considered. It is necessary to consider the physical processes that take place within the medium. It is important to note that these equations reflect variable dependencies in space and time for motion.

This work considers an initial-boundary-value problem for a differential equation with a fractional derivative:

$$u_t + \partial_t^\alpha u - Lu + q(t)u = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

with the initial condition;

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

boundary conditions and boundary conditions

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $0 < \alpha < 1$, $\partial_t^\gamma -$ is the fractional derivative of Gerasimov with respect to the variable t, defined by equality (see [1], p.92):

$$(\partial_t^\gamma g)(t) = I_{0+,t}^{1-\gamma} g'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{g'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$\partial_t^\gamma g(t) = g'(t), \quad \gamma = 1,$$

$$I_{0+,t}^\gamma g(t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n -$is an n-dimensional domain with a smooth boundary $\partial\Omega$,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big]$$

a self-adjoint differential operator of elliptic type, i,e., one for which the following conditions hold everywhere in the domain Ω,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge a_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad a_0 = const > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}$$

$f(x,t)$, $\varphi(x) -$ are given functions, $T > 0 -$ is some fixed number for additional problems.

Inverse problem. Determine $q(t)$, if the additional condition is known relative to the solution of problems (1)-(3)

$$\int_\Omega p(x)u(x,t)dx = h(t),$$

where $p(t)$ and $h(t)$ are known smooth functions.

LITERATURE

1. V. A. Il'in, On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, Russian Mathematical Surveys, 1960, 15(2), pp. 97–154.

Inverse problem for determining the time-dependent coefficient from the fourth-order fractional diffusion equation with Hilfer fractional derivative

Durdiev U.D.[1], Ibrohimov A.A.[2]
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]umidjan93@mail.ru, [2]azizibrohimov554@gmail.com

We consider the following problem for the fourth-order fractional heat equation

$$D_{0+}^{\alpha,\beta}u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega := [0,1] \times (0,T], \tag{1}$$

with initial condition

$$I_{0+}^{1-\beta}u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0,1] \tag{2}$$

and nonlocal boundary conditions

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u(0,t) = 0,$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t), \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{3}$$

where $D_{0+}^{\alpha,\beta}(\cdot)$ stands for the generalized left sided fractional derivative of order $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ and type $\beta\,(0 < \beta < 1)$ in the time variable (also known as Hilfer fractional derivative), introduced by Hilfer [1].

In this work, we considered inverse problem for determining the time-dependent coefficient for fourth-order heat equation with fractional derivative in time. The problem of recovering the time-dependent coefficient from the overdetermination condition of the integral type is considered. The existence and uniqueness of the solution to the inverse-coefficient problem have been proven. Results of stability for inverse problems are presented.

References

1. R. Hilfer; Applications of fractional calculus in Physics, World Scientific, 2000.

Forward and inverse problems for the fractional equation with the Hilfer derivative involving non-local time condition

Fayziev Yu.E.[1], Sadullaeva Sh.Sh.[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
fayziev.yusuf@mail.ru, ssh45984@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space and $A : H \to H$ be a self-adjointed, positive, unbounded arbitrary operator defined in H, with the domain of definition $D(A)$. Suppose that the operator A has a complete system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 ... \to +\infty$.

The integral of the Riemann-Liouville order α of the function $y(t)$ in the interval $[0, +\infty)$ is defined by the following formula (see [1]):

$$I^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}y(\xi)d\xi.$$

The Hilfer fractional derivative of order $1<\alpha<2$ and $0\leq\beta\leq 1$ of the function $y(t)$ is defined as following (see [2]):

$$D^{\alpha,\beta}y(T)=I^{\beta(2-\alpha)}\frac{d^2}{dt^2}I^{(1-\beta)(2-\alpha)}y(t),\quad t>0.$$

Let $C((a,b);H)$ stands for a set of continuous functions $u(t)$ of $t\in(a,b)$ with values in H. Consider the following non-local problem:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta}u(t)+Au(t)=f(t), \quad 0<t\leq T,\\ I^{\delta}u(T)=\gamma I^{\delta}u(+0)+\varphi,\\ \lim\limits_{t\to+0}\frac{d}{dt}I^{\delta}u(t)=\phi, \end{cases}\tag{1}$$

where $\varphi,\phi\in H,\ \ f(t)\in C([0,T];H),\ \ \delta=(2-\alpha)(1-\beta)$ are given functions and γ is a constant. The problem (1) also called the *forward problem.*

Definition 1. A function $u(t)\in C((0,T];H)$ with the properties $D_t^{\alpha,\beta}u(t),\ Au(t)\in C((0,T];H)$ and satisfying conditions (1) is called the solution of the non-local problem (1).

There is a unique $\lambda_0>0$, such that $E_{\alpha,1}(-\lambda_0T^{\alpha})=\gamma$. $K_0=\{k_0,k_0+1,...,k_0+m_0-1\}$, where m_0 is the multiplicity of the eigenvalue λ_k.

Theorem 2. Let $\varphi\in H$ and $f(t)\in C((0,T];D(A^{\varepsilon}))$ for some $\varepsilon\in(0,1)$.

If $|\gamma|>1$ or $|\gamma|<1$, but $\lambda_k\neq\lambda_0$ for all $k\geq 1$, then

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k-\frac{d}{dt}I^{\delta}V_k(t)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_kT^{\alpha})-\gamma}t^{-\delta}E_{\alpha,1-\delta}(-\lambda_kt^{\alpha})+V_k(t)\right]v_k,\tag{2}$$

where

$$V_k(t)=\phi_kt^{\alpha-1+\beta(2-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}(-\lambda_kt^{\alpha})+\int_0^t\tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^{\alpha})f_k(t-\tau)d\tau.$$

If $|\gamma|<1$ and $\lambda_k=\lambda_0,\quad k\in K_0$, then

$$u(t)=\sum_{k\notin K_0}\left(\frac{\varphi_k-\dfrac{d}{dt}I^{\delta}V_k(t)\Big|_{t=T}}{E_{\alpha,1}(-\lambda_kT^{\alpha})-\gamma}\,t^{-\delta}E_{\alpha,1-\delta}(-\lambda_kt^{\alpha})\right.$$

$$\left.+V_k(t)\right)v_k+\sum_{k\in K_0}b_k\,t^{-\delta}E_{\alpha,1-\delta}(-\lambda_kt^{\alpha})\,v_k.$$

The corresponding orthogonality conditions have the form

$$(\varphi,v_k)=(V(t),v_k),\quad k\in K_0;\quad K_0=\{k_0,k_0+1,...,k_0+m_0-1\}.\tag{3}$$

In particular, if

$$(\varphi,v_k)=0,\quad(\phi,v_k)=0,\quad(f(t),v_k)=0,\tag{4}$$

for all

$$t>0,\quad k\in K_0;\quad K_0=\{k_0,k_0+1,...,k_0+m_0-1\},$$

then the orthogonality conditions (3) are satisfied.

LITERATURE

1. C. Lizama, Abstract linear fractional evolution equations. Handbook of Fractional Calculus with Applications, 2019.
2. R. Hilfer, Applications of Fractional Calculs in Physics, World Scientific,Singapore, 2000.

A Nonlocal Problem for the Langevin-type Fractional Equation

Fayziev Yu.[1, 2], **Jumaeva Sh.**[2]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

fayziev.yusuf@mail.ru, shahnozafarhodovna79@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space and $A : D(A) \to H$ be an arbitrary unbounded positive self-adjoint operator, where $D(A) \subset H$ is the domain of the operator A. The operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\lambda_k : 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \to +\infty$. The sequence $\{\lambda_k\}$ has no finite limit points.

Let $C((a, b); H)$ be the set of continuous vector-valued functions $u(t)$ on $t \in (a, b)$ with values in H. Let ε be an arbitrary real number. The power of the operator A is defined by the following:

$$A^\varepsilon h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\varepsilon h_k v_k,$$

where h_k is the Fourier coefficient of the function $h \in H$, i.e., $h_k = (h, v_k)$. The domain of this operator is defined as: $D(A^\varepsilon) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\varepsilon} |h_k|^2 < \infty\}$. For elements of $D(A^\varepsilon)$ we introduce the norm: $||h||_\varepsilon^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\varepsilon} |h_k|^2$.

We consider the following non-local boundary value problem for a Langevin equation with different order Caputo fractional derivatives :

$$\begin{cases} D_t^\beta (D_t^\alpha u(t)) + D_t^\beta (Au(t)) = f(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(T) = \gamma u(0) + \varphi, \\ D_t^\alpha u(+0) = \psi, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi, \psi \in H,\ f(t) \in C([0, T]; H)$, γ is a constant. D_t^α and D_t^β are Caputo fractional derivatives with $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Theorem. *Let $\varphi \in D(A)$, $\psi \in H$ and $f(t) \in C([0, T]; D(A^\varepsilon))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$. If $\gamma \neq 1$, then problem (1) has the following unique solution:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[\frac{\varphi_k - V_k(T) - \psi_k T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k T^\alpha)}{1 - \gamma} + \psi_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha) + V_k(t) \Bigg] v_k \tag{2}$$

where

$$V_k(t) = \int_0^t (t - \eta)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\alpha+\beta}(-\lambda_k (t - \eta)^\alpha) f_k(\eta) d\eta.$$

Moreover, there are constants C_ε, C such that the following coercive type inequality holds:

$$\|D_t^\beta (D_t^\alpha u(t))\|^2 + \|D_t^\beta u(t)\|_1^2 \leq \frac{t^{-2\rho}}{1 - \gamma} \left(C_\varepsilon \max_{t \in [0,T]} \|f\|_{\varepsilon+1}^2 + C\|\psi\|^2 \right).$$

LITERATURE

1.Fayziev Yu., Jumaeva Sh., On the Cauchy problem for the Langevin-type fractional equation, Uzbek Mathematical Journal. 2025. Vol. 69, No. 2. P. 109–118

The inverse problem of determining the time-dependent coefficient from the time fractional diffusion equation

Hakimova B.B.[1], Barakayev A.T.[2]
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]Hakimovabahora1@gmail.com, [2]barakayevamirsho@gmail.com

In this paper, we are concerned with an inverse source problem of recovering a time-dependent source term $q(t)$ and function $u(x,t)$ for the time fractional diffusion equation

$$D^{\alpha}_{0+}u(x,t) = u_{xx} + q(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

supplemented with the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2}$$

and the nonlocal family of boundary conditions

$$u(0,t) = u(1,t), \quad \delta u_x(0,t) = u_x(1,t), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $0 < \alpha < 1, \Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \le T\}, f(x,t), \varphi(x)$ are given functions and δ is real constant.

The direct problem is to determine the solution $u(x,t)$ that satisfies (1)-(3), when the function $q(t)$ is known.

Inverse source problem for such a model gives an idea of how total energy content might be externally controlled. However, we are interested in finding the pair of solution $\{q(t), u(x,t)\}$ from (1)-(3) with integral overdetermination condition

$$\int_0^1 w(x)u(x,t)dx = h(t), 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $w(x)$, $h(t)$ are given functions.

In the rest of the paper, we will consider the following class of functions to investigate well-posedness of the inverse source problem (1)-(4):

$$\Phi^4[0,1] := \Bigg\{ \psi(x) \in C^3[0,1], \psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1);$$

$$\psi(0) = \psi(1),\ \alpha\psi'(0) = \psi'(1),\ \psi''(0) = \psi''(1) \Bigg\}.$$

Theorem 1. Suppose that the following conditions hold:
A1) $\varphi(x) \in \Phi^4[0,1]$;
A2) $h(t) \in C^1[0,T]; D^{\alpha}_{0+}h(t) \in C[0,T]h(0) = \int_0^1 w(x)\varphi(x)dx$;
A3) $f(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_T\right),\ f(x,t) \in \Phi^4[0,1],\ \forall t \in [0,T],\ \int_0^1 f(x,t)dx \ne 0,\ \forall t \in [0,T]$
Then, there exists a unique classical solution of the inverse problem (1)-(4) in Ω_T.

References

1. J. Janno. Determination of time-dependent sources and parameters of nonlocal diffusion and wave equations from final data. Fractional Calculus and Applied Analysis, 23(6):1678–1701, 2020.
2. M. Kirane and S.A. Malik. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time. Applied Mathematics and Computation, 218(1), 163–170, 2011.
3. R.R. Ashurov and M.D. Shakarova. Time-dependent source identification problem for fractional Schrodinger type equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, 43(2), 303–315, 2022.

Numerical analysis of inverse problems for the diffusion equation with initial-boundary and overdetermination conditions

Jumaev J.J.[1], Nuriddinova N.Z.[2]

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
jonibekjj@mail.ru

We consider the initial-periodic boundary problem for the time-fractional diffusion equation

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + a(t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad u_x(0,t) = u_x(l,t), \varphi(0) = \varphi(l), \quad \varphi'(0) = \varphi'(l), t \in [0,T], \tag{3}$$

where $a(t), t > 0$ are the source control terms, $f(x,t)$ is known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature, T is arbitrary positive number and $D_T := \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\})$. The Caputo fractional derivative of order α is determined by the formula

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \partial_t^1 u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

where $\alpha \in (0,1), \Gamma(\cdot)$ is the Euler's Gamma function.

The problem of determining a function $u(x,t), (x,t) \in D_T$, that satisfies (1)-(3) with known functions $a(t), f(x,t)$ and $\varphi(x)$ will be called the direct problem.

In the inverse problem, it is assumed that the coefficient $a(t), t > 0$ in (1) is unknown and it is required to determine it using additional information about the solution of the direct problem:

$$u_x(0,t) = h(t), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

or

$$\int_0^l \omega(x)u(x,t)dx = h(t), \quad x \in [0,l], \tag{5}$$

where $\omega(x), h(t)$ are given functions.

In the sequel, we will call the problem of determining functions $u(x,t), a(t)$ from equations (1)-(4) as **inverse problem 1** and the problem of determining functions $u(x,t), a(t)$ from equations (1)-(3),(5) as **inverse problem 2**.

The paper proposes both numerical and analytical methods for solving the inverse problem of identifying the coefficient on the left-hand side of the time-dependent fractional diffusion equation, with initial-periodic boundary and over-determination conditions. First, we investigate a theoretical approach to clarify the existence and uniqueness of the inverse problem. In the numerical process, the finite difference method and numerical techniques for fractional integrals and derivatives are employed. Numerical results for several test examples are presented and discussed to illustrate the accuracy and stability of the numerical inversion.

References

1. Cannon, J. R. and van der Hoek, J. Diffusion subject to the specification of mass. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 115, pp. 517–529.
2. Evans, L. C. Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

A non-local problem for Wave equation with the Regularized Prabhakar derivative on metric graph

Khujakulov J. R.[1] **Abdimurodova X. A.**[2]
Termez state university, Termez, Uzbekistan,
jonibek.16@mail.ru[1] xusnyaa@gmail.com[2]

We consider a simple metric graph. Which is obtained by connecting finite segments $B_k = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}$, $(k = 1, 2...j)$ at one point $\nu_0(0,0)$ called the vertex of the graph. Line segments are called bonds of the graph.

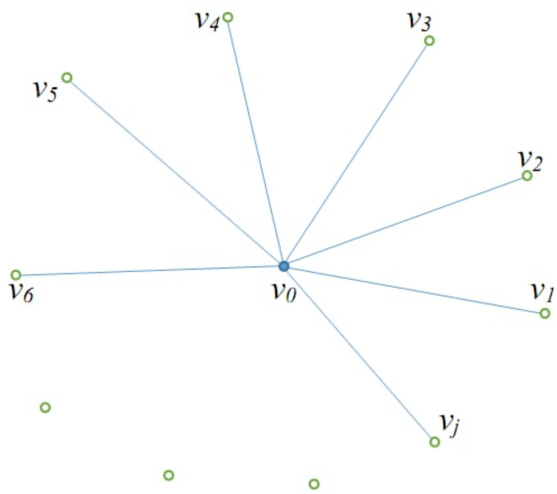

Figure 1. Metric star graph.

On the each edges of the over defined graph,we consider the following time-fractional differential equations:

$$^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x,t), \tag{1}$$

Where $1 < \beta < 2$, $\alpha > 0$, γ, $\delta \in R, and$ $f^{(k)}(x,t)$, $k = (1, 2....j)$ are given functions and $^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ is Regularized Prabhakar derivative of order β [1].

Problem. To find functions $u^{(k)}(x,t)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying equation (1) at $1 < \beta < 2$,$\alpha > 0$, ,γ, $\delta \in R$ and the following conditions:

$$u^{(k)}(x,0) = Mu^{(k)}(x,T) \tag{2}$$

non-local conditions,

$$u_t(x,0) = \varphi^{(k)}(x), x \in B_k, (k = 1, 2...j) \tag{3}$$

initial conditions,

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = u^{(3)}(0,t) = ... = u^{(j)}(0,t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{j} u_x^{(i)}(0,t) = 0 \quad t \in [0,T] \tag{5}$$

vertex conditions and

$$u^{(k)}(L_k,t) = 0, \quad t \in [0,T](k = 1, 2..j) \tag{6}$$

boundary conditions.

Where $M \in R$, $\varphi^{(k)}(x)$ are given functions. We will establish the uniqueness of the solution to problems (1)-(6) using a priori estimates.The existence of the solution will be shown using the method of separation of variables.The solution will be found in the form of a Fourier series.

References

1. M.D. Ovidido, F. Polito, Fractional diffusion telegraph equations and their associated slochastic solutions. Theory of Probability and its Applications, 2018, Vol.62.Issue 1,P .552-574.|arxiv:Issue 2 P.319-361.
2.J. R. Khujakulov. Initial-boundary value problem for a time fractional differential equation with the Probhakar derivative on a star graph.Bulletin of the Institute of Mathematics. 2023, Vol.6.Issue 2,P.20-30.
3.T. R.Probhakar. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffer function in the kornol.Yokohama Math. 1971,Vol.19.P. 7-15.
4. E. Karimov, N. Tokmagambetov, M. Toshpulatov. On a mixed equation involving Probhakar fractional order integral-differential operators.Trends in Mathematics,Extended Abstracts. 2021-2022 Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center. 2024,P. 221-230.

On a new quadrivariate Mittag-Leffler function

Khasanov Sh. M.[1]**,**

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shohzodbekxasanov@gmail.com

It is well known that Mittag-Leffler functions play an important role in fractional calculus and its applications. Moreover, scientists are interested in considering mathematical models of real processes involving fractional derivatives and integrals (see [1], [2], for more details). From this point of view, studying the properties of these functions is important.

In this short talk, we propose a new quadivariate Mittag-Leffler function.

Definition. Let us assume that δ_i, x, y, z, $t \in \mathbb{C}$ and α_j, β_k, γ_m, $\theta_n \in \mathbb{R}$ with $\min\{\alpha_j,\, \beta_k,\, \gamma_m,\, \theta_n\} > 0$. Then, the quadrivariate Mittag-Leffler function is defined as follows:

$$
{}_4E_1 \left\langle \begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; \ \gamma_2, \theta_1, \delta_2; \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_3, \theta_2, \delta_3; \ \gamma_4, \delta_4; \ \alpha_3, \delta_5; \ \beta_3, \delta_6; \ \gamma_5, \delta_7; \ \theta_3, \delta_8; \end{matrix} \ \middle| \ \begin{matrix} x; y \\ z; t \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\alpha_1 i + \beta_1 j + \gamma_1 k + \delta_1\right) \Gamma\left(\gamma_2 k + \theta_1 m + \delta_2\right)}{\Gamma\left(\alpha_2 i + \beta_2 j + \gamma_3 k + \theta_2 m + \delta_3\right) \Gamma\left(\gamma_4 k + \delta_4\right)}
$$

$$
\times \frac{x^i}{\Gamma\left(\alpha_3 i + \delta_5\right)} \frac{y^j}{\Gamma\left(\beta_3 j + \delta_6\right)} \frac{z^k}{\Gamma\left(\gamma_5 k + \delta_7\right)} \frac{t^m}{\Gamma\left(\theta_3 m + \delta_8\right)} .
$$

Here, $i = 1, ..., 8;$ $j, k, n = 1, 2, 3;$ $m = 1, ..., 5$ and $\Gamma(\cdot)$ is the well-known Euler's Gamma function.

REFERENCE

1. Podlubny, I. Fractional differential equations. London: Academic Press, 1999.
2. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. Theory and applications of fractional differential equations.. Amsterdam: Elsevier, 2006.

The Cauchy problem for the nonhomogeneous Rayleigh-Stokes type fractional differential equation

Khushvaktov N.Kh.
Tashkent International University of Financial Management and Technology (TIFT), Tashkent, Uzbekistan;
nuriddinh@gmail.com

In recent years, fractional differential equations have become an active area of research. Compared to classical models, they better describe complex processes such as memory effects and anomalous diffusion. An important example of such equations is the Rayleigh-Stokes type fractional differential equation.

The classical Rayleigh-Stokes equation describes the time evolution of velocity in viscous fluids. When a fractional derivative is added, the past states of the system are also taken into account. As a result, the solutions are expressed not by simple exponentials, but by special functions such as the Mittag-Leffler and Fox-Wright functions.

The Caputo fractional derivative of order $\rho \in (0, 1)$ is defined as follows (see, for example [1])

$$
D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.
$$

In this work, we study the Cauchy problem for the Rayleigh-Stokes type fractional equation, a class of linear fractional differential equations involving both classical and fractional-order derivatives. Specially, we study the following initial value problem:

$$
\begin{cases} y'(t) + \lambda(1 + \gamma D_t^\rho) y(t) = f(t), \quad \gamma > 0, \quad 0 < t < T; \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}
$$

where λ, γ are constants. The Caputo derivative is particularly suitable for physical applications because it allows the formulation of initial conditions in terms of classical integer-order derivates, which have direct physical interpretations.

The solution to this problem is given in [2], where the solution is found using the Fox-Wright function. The solution found in this work differs from it.

Theorem. The Cauchy problem for the Rayliegh-Stokes equation (1) has the solution

$$y(t) = y_0 A_\rho(\lambda, t) + \int_0^t B_\rho(\lambda, t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

where

$$A_\rho(\lambda, t) = 1 - \lambda \int_0^t B_\rho(\lambda, \tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-rt} \frac{\gamma}{\pi} \frac{\lambda^2 r^{\rho-1} \sin \rho\pi}{(-r + \lambda\gamma r^\rho cos\rho\pi + \lambda)^2 + (\lambda\gamma r^\rho sin\rho\pi)^2} dr$$

and

$$B_\rho(\lambda, t) = \int_0^\infty e^{-rt} \frac{\gamma}{\pi} \frac{\lambda r^\rho \sin \rho\pi}{(-r + \lambda\gamma r^\rho cos\rho\pi + \lambda)^2 + (\lambda\gamma r^\rho sin\rho\pi)^2} dr.$$

LITERATURE

1. C. Lizama Abstract linear fractional evolution equations, in Handbook of Fractional Calculus with Applications, Ed. by J. A. T.Marchado (De Gruyter, Berlin, 2019), Vol. 2, pp. 465–497.
2. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier. 2006.

Kasr tartibli Barenblatt-Jeltov-Kochina operatori qatnashgan bir jinsli integro-differentsial tenglama uchun aralash masala

Matchanova A.A.[1], Raximova F.S.[2], Xurramov A.X.[3]
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, Toshkent, O'zbekistan
[1]aygulmatchanova28@gmail.ru, [2]rferuza1980@gmail.com, [3]axurramov367@gmail.com

Turli jarayonlarni modellashtirishda kasr tartibli differensial tenglamalarga duch kelinadi. [1-3] Ushbu ishda kasr tartibli Barenblatt-Jeltov-Kochina operatorini o'z ichiga olgan bir jinsli bo'lmagan integro-differensial tenglama uchun aralash masalaning yechimini qurish va yagona klassik yechimini topish o'rganiladi. Masala yechimini mavjud va yagonaligini Furye usulidan foydalanib ko'rsatiladi..

$\Omega \equiv (0, T) \times (0, 1)$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz

$$\left(D^{\alpha,\gamma} - D^{\alpha,\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U(t, x) = \nu \int_0^T K(t, s) U(s, x) ds \tag{1}$$

aralash shartlar bilan

$$\lim_{t \to +0} J_{0t}^{1-\gamma} U(t, x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$U(t, 0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$U_x(t, 1) = U_x(t, x_0), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_0 < 1, \tag{4}$$

bunda $\varphi(x)$ va $K(t,s)=\sum_{r=1}^{k} t^r s^r$, berilgan funksiyalar $D^{\alpha,\gamma}$, $0<\alpha\leq\gamma\leq 1$ formula bilan aniqlanadigan Hilfer operatori

$$D^{\alpha,\gamma}=D_{0t}^{\alpha,\beta}=J_{0t}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}J_{0t}^{(1-\beta)(1-\alpha)},0\leq\beta\leq 1,\ \gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta,$$

$0<T<\infty$.

Masala. (1) tenglamani, (2) boshlang'ich shart, (3), (4) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan va quyidagi funksiyalar sinfiga tegishli bo'lgan noma'lum $U(t,x)$ funksiyani topilsin.

$$t^{1-\gamma}U\in C\left(\overline{\Omega}\right),\quad D^{\alpha,\gamma}U\in C\left(\Omega\right),\quad D^{\alpha,\gamma}U_{xx}\in C\left(\Omega\right),\quad U_{xx}\in C\left(\Omega\right), \tag{5}$$

Bunda $\bar{\Omega}\equiv[0,T]\times[0,1]$.

A shart. $(0,1)$ oraliqdan shunday $x_0=\frac{p}{q}$ ratsional son bo‘lsinki, $q-p=1$ va o’zaro tub musbat sonlar bo‘lsin.

Teorema. Agar berilgan funksiyalar $\varphi(x)\in C^6\,(0,1)$ va to’rtinchi tartibli hosilasi boвГЧlakli uzluksiz funksiya, $f\,(t,x)\in C_{x,t}^{1,0}\,(\Omega)$ va x o’zgaruvchi bo’yicha ikkinchi tartibli hosilasi bo’lakli uzluksiz boвГЧlib,

$$\frac{d^i\varphi(x)}{dx^i}\,|_{x=0}=0,\quad \frac{d^j\varphi(x)}{dx^j}\,|_{x=1}=\frac{d^j\varphi(x)}{dx^j}\,|_{x=x_0}\,,\quad i=0,2,4,6,\quad j=1,3,5$$

shartlar va A shart bajarilsa u holda masala yechimi mavjud va yagona bo’ladi.

LITERATURE

1. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag–Leffler Functions. Related Topics and Applications. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2014.
2. Handbook of Fractional Calculus with Applications in 8 volumes (ed. by J. A. Tenreiro Machado). Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2019.
3. D. Kumar, and D. Baleanu, Editorial: fractional calculus and its applications in physics. Frontiers of Physics 2019; 7 (6).
4 . Yuldashev T. K. Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem. Lobachevskii J. Math. 2020; 41 (1): 124–136.

Boundary value problem for the degenerating mixed type equation with the Hilfer differential operator

Ochilova N.K.
Kimyo International University in Tashkent;
nargiz.ochilova@gmail.com

Main goal of this work is to study the existence and the uniqueness of solution of a local problem with Neumann conditions for the degenerating mixed type. Considering parabolic-hyperbolic equation involve the Hilfer fractional derivative fractional order. The uniqueness of the solution is proved by the method of integral energy using necessary properties of hypergeometric functions and fractional order integro-differential operators. The existence is proved by the method of integral equations.

In this work we consider the degenerating parabolic-hyperbolic equation

$$f(x,y)=\begin{cases} D_{0y}^{\alpha,\beta}u-u_{xx} & x>0,\ \ y>0,\\ x^n u_{yy}-(-y)^n u_{xx}, & x>0,\ \ y<0, \end{cases} \tag{1}$$

with the Hilfer differential operator:

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}u(x,y)=J_{oy}^{\beta-\alpha}\frac{d}{dy}(J_{oy}^{1-\beta}u(x,y)),\quad 0<\alpha\leqslant\beta\leqslant 1; \tag{2}$$

$$J_{0y}^{\alpha}\ u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y(y-s)^{\alpha-1}u(x,s)ds, \tag{3}$$

where $f(x,y)$ is given function, $n=const>0$.

Let's Ω domain, bounded with segments: $A_1A_2=\{(x,y):\ \ x=0,\ 0<y<h_2\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ \ x=h_1,\ 0<y<h_2\}$, $A_2B_2=\{(x,y):\ \ y=h_2,\ 0<x<h_1\}$ at the $y>0$ and by the characteristics: $A_1C: x^p-(-y)^p=0,\quad B_1C:\ \ x^p+(-y)^p=p$, of equation (1) at $y<0$, where $A_1\,(0;0)\,,\,A_2\,(0;h_2)\,,\,B_1\,(h_1;0)\;B_2\,(h_1;h_2)$ and $C\left(\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p},\,-\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$. Here $2p=n+2$, $h_1=p^{1/p},\quad h_2>0$.

Introduce designations: $2\delta=n/(n+2)$,

$\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$, $I_1=\{(x,y):\ y=0,\ 0<x<h_1\}$. The main goal of this work is to prove uniqueness and existence of solution of the below formulated problem for equation (1).

Problem. Find a solution $u(x,y)$ of equation (1) from the class of functions:

$$W=\Big\{u(x,y):\ y^{1-\beta}u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_1),\ y^{1-\beta}D_{oy}^{\alpha,\beta}u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_1),$$

$$y^{1-\beta}u_x(x,y)\in C(\bar{\Omega}_1\setminus A_2B_2),\ u_{xx}\in C\left(\Omega_1\right),$$

$$u(x,y)\in C^2(\Omega_2),\ y^{1-\alpha}\frac{d}{dy}(J_{oy}^{1-\beta}u(x,y))\in C(\Omega_1\cup I_1)\Big\},$$

satisfies boundary conditions:

$$u_x(0,y)=\varphi_1(y),\qquad y\in[0,h_2); \tag{4}$$

$$u(h_1,y)=\varphi_2(y),\qquad y\in[0,h_2]; \tag{5}$$

$$u(x,-x)=\varphi(x),\qquad x\in[0,(\frac{p}{2})^{1/p}] \tag{6}$$

and gluing conditions:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}(y^{1-\beta}u_y(x,+0))=u_y(x,-0),\qquad x\in I_1, \tag{7}$$

where $\varphi_1(y),\ \ \varphi_2(y),\ \varphi(x)-$ are given functions, and that $a(x),b(x)\ \in\ C\left(\overline{I_1}\right)\cap C^2(I_1)$. $\varphi_1(y),\ \ \varphi_2(y)\in C[0,h_2]\cap C^2(0,h_2)$,

We would like to note that in the work [1], for the equation (1) a local problem was investigated with Dirichlet conditions. Under certain conditions we prove uniqueness and existence of the formulated problem.

LITERATURE

1. Ochilova N.K., Yuldashev T.K. On a nonlocal boundary value problem for a degenerate parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative.//Lobachevski Journal of Mathematics (1) 2022. p.229-236.

Time-fractional equation with Bessel operator: nonclassical initial and boundary conditions

Rakhmatova N.J.
Bukhara University of Innovation, Bukhara, Uzbekistan;
nigora.raxmatova99@mail.ru

We consider the following time-fractional partial differential equation involving a Bessel-type operator:

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{k}{x}u_x(x,t) + f(x,t)g(t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{1}$$

in a rectangular domain $\Omega := \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, $k \geq 1$ given real number.

which is known as the Bessel-type differential operator of order k. This operator arises naturally in the context of problems with cylindrical symmetry or singular coefficients and is widely used in mathematicsl physics, particularly in the study of diffusion and wave propagation in heterogeneous media.

The initial and boundary conditions are given as follows:

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2}$$

$$|u(0,t)| < \infty, \quad u_x(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where $0 < \alpha < 1$ and

$$\partial_t^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(z)dz}{(x-z)^\alpha}.$$

Find a function u(x,t) that satisfies equation (1) and the following conditions:

$$u, \quad u_x, \quad u_{xx}, \quad \partial_{0t}^\alpha u \in \mathbb{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{2,\alpha}(\Omega), \quad x^k u_x(x,t) \in \mathbb{C}(\bar{\Omega}). \tag{4}$$

It is necessary to determine the function $g(t)$ if the following additional information is known about the solution of the direct problem (1)–(3):

$$u(x_0,t) = h(t), 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

$g(t)-$ smooth function.

The solution to the inverse problem (1)-(5) is the function $u(x,t)$ and $g(t)$ from class (4).

Many problems related to fractional differential equations involving Caputo derivatives and Bessel-type operators, including initial-boundary value problems and inverse problems, have been investigated in works [1]-[4]. These studies highlight the importance of Bessel operators in modeling processes with cylindrical symmetry, singular coefficients, and anomalous diffusion.

In this work, we establish the existence and uniqueness of the solution to the initial-boundary value problem for a time-fractional differential equation with the Caputo derivative of order $0 < \alpha < 1$, and the Bessel-type operator.We employ the Laplace transform and the method of separation of variables to construct the solution explicitly. The solvability of the problem is analyzed, and sufficient conditions on the data functions $\varphi(x)$ and $f(x,t)$ are obtained to guarantee the existence of a classical solution. The proof relies on the fundamental properties of the Mittag-Leffler function and Bessel functions, which play a key role in the representation of the solution. This approach not only clarifies the well-posedness of the problem but also provides a basis for the development of numerical methods for more general fractional models.

References

1. Sabitov K.B., Zaitseva N.V. Initial value problem for $B-$hyperbolic equation with integral condition of the second kind. Differential Equations. 2018. Vol.54, pp. 121-133.
2. Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. Comput. Math. Appl. 2010. Vol.59, pp. 1766-1772.
3. Almusalhi F., Al-Salti N., Kerbal S. Inverse Problems of a Fractional Differential Equation with Bessel Operator. Math. Model. Nat. Phenom. 2017. Vol.12, Issue 3, pp. 105-113.
4. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2011. Vol.382, pp. 426-447.

Identification of a time-dependent coefficient in a distributed-order diffusion equation

Rahmonov A.A., Durdiev D.K.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
araxmonov@mail.ru, durdiev65@mail.ru.

In the present work, we investigate both the initial-boundary value direct problem and the associated inverse problem of determining a zero-order time-dependent coefficient in the distributed-order time-fractional diffusion equation. We first analyze the direct problem under Robin-type boundary conditions and establish its well-posedness. Building on these results, we then address the inverse problem. In particular, we prove the local existence of a solution to the inverse problem and derive stability estimates, which demonstrate the robustness of the recovery with respect to perturbations in the data.

Inverse source problem for the time-fractional parabolic equation with space-dependent coefficients on metric graphs

Sobirov Z.A.[1], Narziyeva I.A.[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent 100174, Uzbekistan
National University of Uzbekistan, Tashkent 100174, Uzbekistan
z.sobirov@nuu.uz, ironarziyeva4@gmail.com

In this work, we investigate the initial-boundary problem for time-fractional parabolic-type equation on a metric graph $\mathcal{G}$. A graph consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_k\}_{k=1}^{j}$ and edges $E = \{e_k\}_{k=1}^{n}$. Each edge e_k is assigned an interval $(0, l_k)$ and has coordinates x_k. The set of boundary vertices is denoted by $\partial\mathcal{G} \subset V$. We set $C[\mathcal{G}]$ as a space of functions u defined on the graph and uniformly continuous on each of its edges. We consider the following time-fractional parabolic equation with the Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) = F(x,t), \quad x \in e_k, \quad t \in (0,T], \tag{1}$$

where

$$\mathcal{L}u\Big|_{e_k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^{(k)}(x)\frac{\partial u^{(k)}(x,t)}{\partial x}\right) + b^{(k)}(x)u_x^{(k)}(x,t) + c^{(k)}(x)u^{(k)}(x,t),\ x \in e_k, \tag{2}$$

where $0 < A_0 \le a^{(k)}(x) \le A_1 < +\infty,\ k = \overline{1,n}$, and we suppose that $a, b, c \in C[\mathcal{G}]$, $c(x) > 0$, $g(x,t)$ is given function, $f(t)$ is an unknown function. We have to find the solution $u(x,t)$ in a bounded domain $\mathcal{G}_T = \{\mathcal{G} \times [0,T]\}$ satisfying the initial conditions

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in e_k, \tag{3}$$

the vertex conditions at inner vertices

$$\begin{cases} u^{(i)}(\nu,t) = u^{(j)}(\nu,t) \ \forall i,j \in I(\nu), t \in [0,T], \\ \sum\limits_{e_k \sim \nu} \sigma_{e_k,\nu} a^{(k)}(\nu) \frac{\partial}{\partial x} u^{(k)}(\nu,t) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\mathcal{G}, \end{cases} \tag{4}$$

and at each boundary vertex, Dirichlet conditions

$$u(\nu,t) = 0, \quad \nu \in \partial\mathcal{G}, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

We will set the direct problem $(1)-(5)$, and show that there exists a unique weak solution with Galerkin approximation method.
For formulating the inverse problem, let $F(x,t) = f(t)g(x,t)$ where $f(t)$ is an unknown function and $g(x,t)$ is a given function, and we will find the pair of functions $\{u(x,t), f(t)\}$ in the following equation

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) = f(t)g(x,t), \quad x \in e_j, \quad t \in (0,T], \tag{6}$$

and an integral over-determination condition with some generalized function $\eta(x)$

$$\int_{\mathcal{G}} \eta(x) \partial_{0,t}^{\alpha} u(x,t) d\mathcal{G} = E(t), \ t \in [0,T]. \tag{7}$$

We will show that inverse problem $(1)-(7)$ has unique weak solution. The methodology involved transforming the given equation into an operator equation, subsequently solved using a priori estimates. This approach is classified as a functional method. The method was adapted and enhanced, originally inspired by Ladyzhenskaya [1], to tackle fractional order equations on metric graphs.

LITERATURE

1. Ladyzhenskaya O. A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki, Nauka, Moscow, (1973). [in Russian].

Inverse source problem for the space-time fractional diffusion equation on metric graphs

Sobirov Z.A.[1], Turemuratova A.A.[2]

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

National University of Uzbekistan, Branch of the Russian Economic University named after G. V. Plekhanov in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;

[1]z.sobirov@nuu.uz, [2]turemuratova_a@nuu.uz

A graph $\mathcal{G}$ consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_i\}_{i=1}^{j}$ and a set $E = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ of edges. A metric graph is a graph in which each edge is associated with a positive number, called the length of this edge. Each edge e_i is assigned the interval $(0, l_i)$, $i = \overline{1,n}$, and the coordinates x_i are defined on each edge. We will say that a vertex ν is in incident with an edge e_i if it is the end of this edge, and denote this as $e_i \sim \nu$. The number of elements of the set $I(\nu) = \{e : e \sim \nu, e \in E\}$ is called vertex valency ν. If the valency of a vertex is equal to one, then it is called a boundary vertex. Let $\partial\mathcal{G} \subset V$ be the set of boundary vertices of the graph. During this work, we suppose that $\mathcal{G}$ is a connected graph with a non-empty set of boundary vertices.

We consider the following fractional diffusion equation on the graph $\mathcal{G}$

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u^{(i)}(x,t) + \mathcal{L}u^{(i)} = F^{(i)}(x,t) = f^{(i)}(x)g(t), \quad x \in e_i, \quad t \in (0,T], \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

where $\partial_{0,t}^{\alpha}$ denotes the generalized left Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ concerning the time variable t,

$$\mathcal{L}u^{(i)} = \frac{1}{r^{(i)}(x)} \partial_{x,l_i}^{\beta} \left(p^{(i)}(x) D_{0,x}^{\beta} u^{(i)}(x,t) \right), \tag{2}$$

$f^{(i)}(x,t)$ are given functions, $0 < a_0 \le p^{(i)}(x) \le a_1 < +\infty$, $0 < R_0 \le r^{(i)}(x) \le R_1 < +\infty$ and we suppose that $r, p \in C[\mathcal{G}]$, $\mathrm{D}_{0,x}^{\beta}$ and ∂_{x,l_i}^{β}, $i = \overline{1,n}$ stand for the left Riemann Liouville and the right Caputo fractional derivative of order $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, respectively, with respect to the spatial variable x. Also, $f^{(i)}(x)$ are unknown functions and $g(t)$ is a given function. So, we are searching for the solution $\{u(x,t), f(x)\}$ to equation (1) within a bounded domain $G_T = \mathcal{G} \times (0,T]$, while satisfying the following initial conditions

$$u^{(i)}(x,0) = \varphi^{(i)}(x), \quad x \in \bar{e}_i, \ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

the vertex conditions

$$\begin{cases} I_{0,x}^{1-\beta} u^{(i)}(\nu,t) = I_{0,x}^{1-\beta} u^{(j)}(\nu,t), \ \forall i,j \in I(\nu), \ t \in [0,T], \\ \sum\limits_{e_i \sim \nu} \sigma_{e_i,\nu} p^{(i)}(\nu) D_{0,x}^{\beta} u^{(i)}(\nu,t) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\mathcal{G}, \end{cases} \tag{4}$$

where $I(\nu)$ is the index set of the edges incident to a vertex ν, $\sigma_{e_i,\nu} = 1$ if ν is the right end of the edge e_i, $\sigma_{e_i,\nu} = -1$ if ν is the left end of the edge e_i, $I_{0,x}^{1-\beta}$ is the left Riemann-Liouville fractional integral of order $1-\beta$, Dirichlet conditions

$$I_{0,x}^{1-\beta} u(\nu,t) = 0, \quad \nu \in \partial\mathcal{G}, \ t \in [0,T], \tag{5}$$

and an additional final-time condition

$$u^{(i)}(x,T) = \psi^{(i)}(x), \quad x \in \bar{e}_i, \ i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

where $\varphi^{(i)}(x)$, $\psi^{(i)}(x)$, $i = \overline{1,n}$ are known functions.

This study examines both direct and inverse problems. The direct problem involves finding a solution $u(x,t)$ for problem (1)-(5). The inverse problem, in contrast, requires determining the right-hand side of equation (1), specifically the source function $f(x)$, under the additional final-time condition specified in (6).

Klimek et al. demonstrated the existence of strong solutions to the non-homogeneous space-time fractional diffusion equation in [1]. Their problem is defined on an interval, whereas the present study considers a metric graph. Furthermore, their operator differs, resulting in distinct boundary value problems. Inverse problems are addressed in [2]. In [2], the formulation is similar to that of Klimek et al., but the focus is on the inverse problem with condition (6), where the right-hand side of the equation depends solely on x.

LITERATURE

1. Klimek M., Malinowska A. B., Odzijewicz T. Applications of the fractional Sturm-Liouville problem to the space-time fractional diffusion in a finite domain. Frac. Calc. and Frac. Analysis. 2016. Vol. 19, Issue 2.
2. Muhammad Ali, Sara Aziz, Salman A. Malik. Inverse source problem for a space-time fractional diffusion equation. Fract. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, Issue 3, pp. 844–863.

Kernel identification problem in a time-fractional model of superdiffusion with damping

Subhonova Z.A.
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan;
subhonovaziyoda5@gmail.com

We consider a time-fractional superdiffusion model with damping, governed by the integro-differential equation

$$\left(\mathbb{D}_t^{(\alpha)}u\right)(t,x) - u_{xx}(t,x) + q(t)u_t(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_0^T, \tag{1}$$

where $1 < \alpha < 2$, $\mathbb{D}_t^{(\alpha)}$ is the Caputo-Dzhrbashyan fractional derivative, that is

$$\left(\mathbb{D}_t^{(\alpha)}u\right)(t,x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u_\tau(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau - t^{-\alpha+1}\frac{u_t(0,x)}{\Gamma(2-\alpha)},$$

and $Q_0^T := \{(t,x) : x \in \mathbb{R}, 0 < t \le T\}$. The function $q(t)$ represents a time-dependent damping coefficient, which plays a crucial role in the system's dynamic behavior.

The primary objective of this paper is twofold. First, we address the direct problem, which involves determining the solution $u(t,x)$ given the initial conditions

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

as well as the source term $f(t,x)$, and the damping coefficient $q(t)$.

In the next step, we assume that the scalar coefficient q is unknown along with u, and we aim to determine both. Let's formulate the *inverse problem* with the following form: find the function $q(t) \in C[0,T]$, in (1), if $u(t,x)$ the solution to the Cauchy problem (1), (2) satisfies the condition

$$u|_{x=0} = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

where $g(t)$ is given function, that satisfies the matching conditions

$$\varphi(0) = g(0), \quad \psi(0) = g'(0). \tag{4}$$

Using work [2], we get the solution of the problem (1)-(2) in the following form

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_{\mathbb{R}} Z_1(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} Z_2(t,x-\xi)\psi(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Y(t-\tau,x-\xi)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Y(t-\tau,x-\xi)q(\tau)u_\tau(\tau,\xi)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

where the triple $Z_1(x,t), Z_2(x,t), Y(x,t)$ represents the fundamental solution of the one-dimensional fractional diffusion equation with the Caputo-Dzhrbashyan derivative, expressed in terms of the H-Fox function:

$$Z_j(t,x) = \frac{t^{j-1}}{\sqrt{\pi}|x|}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha}\,\Big|\,{}^{(j,\alpha)}_{(\frac{1}{2},1),(1,1)}\right], \quad j = 1,2,$$

$$Y(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|} t^{\alpha-1} H^{2,0}_{1,2} \left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha} \Big|^{(\alpha,\alpha)}_{(\frac{1}{2},1),(1,1)} \right]. \tag{6}$$

Lemma 1. *Let $q \in C[0,T]$, $\varphi \in C^3_b(\mathbb{R})$, $\psi \in C^2_b(\mathbb{R})$, and $f \in C([0,T]; C^2_b(\mathbb{R}))$. Then there exists a unique solution of the problem (1)-(2) with $u \in C^{\alpha,2}(Q^T_0) \cap C^1_t(\bar{Q}^T_0)$, where $\alpha \in (1,2)$.*

Lemma 2. *Let $u_x(t,x)$ be a classical solution to the problem (1)-(2) with $\varphi(0) = g(0)$, $\psi(0) = g'(0)$, $\varphi'(x), \psi'(x)$ and $f_x(t,x)$. Moreover, let, $\vartheta(t,x) = u_x(t,x)$. Then, the problem (1)-(3) is equivalent to the problem of determining the functions $\vartheta(t,x) \in C^{\alpha,2}(Q^T_0) \cap C^1(\bar{Q}^T_0)$ and $q(t) \in C[0,T]$ from the system of equations:*

$$(\mathbb{D}^{(\alpha)}_t \vartheta)(t,x) - \vartheta_{xx}(t,x) + q(t)\vartheta_t(t,x) = f_x(t,x), \quad (t,x) \in Q^T_0, \tag{7}$$

$$\vartheta|_{t=0} = \varphi'(x), \quad \vartheta_t|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\vartheta_x|_{x=0} = (\mathbb{D}^\alpha_t g)(t) + q(t)g'(t) - f(0,t). \tag{9}$$

Lemma 3. *If $q(t) \in C[0,T]$, $f(t,x) \in C([0,T]; C^3_b(\mathbb{R}))$, $\varphi(x) \in C^4_b(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^3_b(\mathbb{R})$, then there exists a unique solution to the direct problem 2 such that $\vartheta(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q^T_0) \cap C^1_t(\bar{Q}^T_0)$.*

The inverse problem of determining the function $q(t)$ from equations (7)-(9) is analyzed using the contraction mapping principle.

$$q(t) = [g'(t)]^{-1} \Big(f(0,t) - (\mathbb{D}^{(\alpha)}_t g)(t) + \vartheta_{0x}(t,0) \Big)$$

$$-[g'(t)]^{-1} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} Y_\xi(t-\tau,\xi) q(\tau) \vartheta_\tau(\tau,\xi) d\xi \tag{10}$$

Theorem 1. *Let $f \in C([0,T]; C^3_b(\mathbb{R}))$, $\varphi \in C^4_b(\mathbb{R})$, $\psi \in C^3_b(\mathbb{R})$, $g \in C^1[0,T]$ with $|g'(t)| \geq g_0 > 0$. Assume the compatibility conditions $\varphi(0) = g(0)$ and $\psi(0) = g'(0) \neq 0$ are satisfied. Then, for sufficiently small $T^* > 0$, there exists a unique solution to the inverse problem (7)-(9), such that $\vartheta \in C^{2,\alpha}(Q^{T^*}_0) \cap C^1(\bar{Q}^{T^*}_0)$ and $q \in C[0,T^*]$..*

LITERATURE

1. Kilbas A.A., Saigo M. H transforms: theory and applications. Chapman Hall/CRC, New York, 2004.
2. Kochubei A.N. Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients. Applicable analysis. -2014. 93(10). 2211–2242.
3. Subhonova Z.A. and Rahmonov A.A. Problem of determining the time dependent coefficient in the fractional diffusion-wave equation, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(3), 687–700.

Inverse problem of determining the coefficient for a two-dimensional telegraph equation with a conformable fractional derivative over time

Suyarov T.R.[1], Durdiev D.K.[2]
[1,2]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]tsuyarov007@gmail.com, [2]durdimurod@inbox.ru

In this work, we investigate the local existence and global uniqueness of a nonlinear inverse problem for determining a non-stationary coefficient in a telegraph equation, including the Conformable fractional derivative with initial-boundary conditions and overdetermination conditions.

In the domain $\Omega = D \times (0, T]$, where $D = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, we consider a two-dimensional telegraph equation of Conformable fractional order [1]:

$$\mathbb{T}_t^{(2\alpha)} u(x, y, t) + 2b\mathbb{T}_t^{(\alpha)} u(x, y, t) - \Delta u + q(t)u(x, y, t) = f(x, y, t), (x, y, t) \in \Omega, \tag{1}$$

with initial conditions

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$\mathbb{T}_t^{(\alpha)} u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{3}$$

and nonlocal boundary conditions

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, (y, t) \in [0, 1] \times [0, T], \tag{4}$$

$$u_y(x, 0, t) = u_y(x, 1, t),\ u(x, 0, t) = 0,\ (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]. \tag{5}$$

where $\overline{D} = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operator, $\mathbb{T}_t^{(\alpha)}$ is called the corresponding (Conformable) fractional derivative of order α $(0 < \alpha \le 1)$ in t (see. [2]), and $\mathbb{T}_t^{(2\alpha)}$ denotes the composition $\mathbb{T}_t^{(\alpha)}(\mathbb{T}_t^{(\alpha)})$, where $f(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ and $\psi(x, y)$ are given functions.

The inverse problem consists in finding the function $q(t) \in C[0, T]$, if, with respect to the solution of the direct problem (1)-(2), the overdetermination condition is known:

$$\iint\limits_D w(x, y)u(x, y, t)dxdy = H(t), \tag{6}$$

where $H(t)$, $w(x)$ are given functions. To study the direct and inverse problems, we will use the following conditions.

Assume that throughout this article, given functions φ, ψ, f, w and h satisfy the following conditions:

A1) $\{\varphi, \psi\} \in C^3(\overline{D}), \left\{\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \frac{\partial^4\psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right\} \in L_2(D)$; $\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0$, $\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(1, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = 0$, $\varphi_y(x, 0) = \varphi_y(x, 1)$, $\varphi_{yy}(x, 0) = 0$. $\psi(0, y) = \psi(1, y) = 0$, $\psi_{xx}(0, y) = \psi_{xx}(1, y) = 0$, $\psi(x, 0) = 0$, $\psi_y(x, 0) = \psi_y(x, 1)$, $\psi_{yy}(x, 0) = 0$.

A2) $f(x, y, \cdot) \in C[0, T], t \in [0, T]$, $f(\cdot, \cdot, t) \in C^3(\overline{D})$, $\frac{\partial^4 f(x,y,t)}{\partial x^i \partial y^j} \in L_2(D)$ $f(0, y, t) = f(1, y, t) = 0$, $f_{xx}(0, y, t) = f_{xx}(1, y, t) = 0$, $f(x, 0, t) = 0$, $f_y(x, 0, t) = f_y(x, 1, t)$, $f_{yy}(x, 0, t) = 0$.

A3) $w(x, y) \in C^2(\overline{D}); w(0, y) = w(1, y) = 0$, $w(x, 1) = w(x, 0), w_y(x, 1) = 0$.

A4) $(\mathbb{T}_t^{(2\alpha)} H)(t) \in C[0, T]$, $|H(t)| \ge H_0 > 0$, H_0 is a given number,

$$\iint\limits_D w(x, y)\varphi(x, y)dxdy = H(t)|_{t=0+},$$

$$\iint\limits_{D} w(x,y)\psi(x,y)dxdy = (\mathbb{T}_t^{\alpha}H)(t)|_{t=0+}.$$

Using the results presented above, we obtain:

Theorem 1. *If $q(t) \in C[0,T]$, A1), A2) and condition* $0 \le b^2 < 5\pi^2$ *are satisfied, then there exists a unique solution $u(x,t) \in C^2(\Omega)$ to the direct problem (1)-(5).*

Theorem 2. *Let A1)-A4) be satisfied. Then there exists a number $T^* \in (0,T)$ such that there exists a unique solution $q(t) \in C\,[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(6).*

Let T be a positive fixed number. Suppose that:

$B1)$ $\{\varphi(\cdot,\cdot),\, \psi(\cdot,\cdot)\} \in C^4(\overline{D})$, $\varphi(0,y) = \varphi(1,y) = 0$, $\varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xx}(1,y) = 0$, $\varphi(x,0) = 0$, $\varphi_y(x,0) = \varphi_y(x,1)$, $\varphi_{yy}(x,0) = 0$. $\psi(0,y) = \psi(1,y) = 0$, $\psi_{xx}(0,y) = \psi_{xx}(1,y) = 0$, $\psi(x,0) = 0$, $\psi_y(x,0) = \psi_y(x,1)$, $\psi_{yy}(x,0) = 0$.

$B2)$ $f(x,y,\cdot) \in C[0,T], t \in [0,T]$, $f(\cdot,\cdot,t) \in C^4(\overline{D})$, $f(0,y,t) = f(1,y,t) = 0$, $f_{xx}(0,y,t) = f_{xx}(1,y,t) = 0$, $f(x,0,t) = 0$, $f_y(x,0,t) = f_y(x,1,t)$, $f_{yy}(x,0,t) = 0$.

The fulfillment of conditions $B1), B2)$ implies that conditions $A1)$, $A2)$ are also satisfied.

Consider the set D_{μ_0} of given functions (φ,ψ,h,f) for which $B1), B2)$, $A4)$ are satisfied and

$$\max\left\{\|\varphi\|_{C^4(\overline{D})}, \|\psi\|_{C^4(\overline{D})}, \|H\|_{C^2[0,T]}, \|f\|_{C\left([0,T],C^4(\overline{D})\right)}\right\} \le \mu_0$$

Denote by G_{v_1} the set of functions $q(t)$ that for some $T > 0$ satisfy the following condition $\|q\|_{C[0,T]} \le \mu_1, \mu_1 > 0$.

Theorem 3. *Let $(\varphi,\psi,H,f) \in D_{\mu_0}, \left(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{H},\tilde{f}\right) \in D_{\mu_0}$ and $q,\tilde{q} \in G_{\mu_1}$, Then, for solution to the inverse problem (1)-(6) holds the following stability estimate:*

$$\|q-\tilde{q}\|_{C[0,T]} \le r\Bigg[\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4(\overline{D})} + \left\|\psi-\tilde{\psi}\right\|_{C^4(\overline{D})}$$

$$+\|H-\tilde{H}\|_{C^4[0,T]} + \|f-\tilde{f}\|_{C\left([0,T],C^4(\overline{D})\right)}\Bigg],$$

where the constant r depends only on μ_0, μ_1, T, α.

LITERATURE

1. D. K. Durdiev, T. R. Suyarov, Kh. Kh. Turdiev, An inverse coefficient problem for the fractional telegraph equation with the corresponding fractional derivative in time, Russian Math. (Iz. VUZ). 2025. **69**(2) P. 32-44.

2. R. Khalil, M. Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A New Definition of Fractional Derivative, Computational and Applied Mathematics. (2014) Vol. 246. P. 65–70.

Kaputo kasr tartibli diffuziya tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasining klassik yechimi uchun mavjudlik shartlari

Temirov M.S.

Buxoro davlat universiteti magistranti

Kasr tartibli diffuziya tenglamasi

$$D_t^{\alpha}u(t,x) = a^2\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

quyidagi boshlang'ich shart

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

bilan berilgan bo'lsin, bu yerda D_t^α -Kaputo kasr tartibli hosila ($0 < \alpha < 1$), $k > 0$ esa diffuziya koeffitsienti.
Ushbu ish (1),(2) Koshi masalasi yechimini beruvchi formulani topishga bag'ishlanadi, ya'ni quyidagi o'rinli
Teorema. Faraz qilaylik $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz va cheklangan bo'lsin, u holda (1),(2) Koshi masalasining yechimi mavjud va u

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(t, x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

yordamida aniqlanadi, bu yerda G_α -kasr tartibli diffuziya yadrosi bo'lib, Furye almashtirishi orqali hosil qilinadi.

Fractional-order mixed partial differential equation: inverse source problem related to the wave-diffusion process

Toshpulatov M.[1]
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan;
muzaffar.toshpulatov89@gmail.com

We consider the following mixed equation

$$\frac{1-sgn(t-a)}{2}\cdot {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x)$$

$$+\frac{1+sgn(t-a)}{2}\cdot {}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) - u_{xx}(t,x) = h(t,x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, where $J = \{(t,x) : t = a, 0 < x < 1\}$, $\Omega_1 = \{(t,x) : 0 < x < 1, 0 < t < a\}$, $\Omega_2 = \{(t,x) : 0 < x < 1, a < t < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ such that $b > a$, $1 < \beta_1 \le 2, 0 < \beta_2 \le 1$, $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $h(t,x)$ is a given function.

FORWARD PROBLEM. Find a regular solution of (1) in Ω, satisfying the following conditions:

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, 0 \le t \le b, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) = \lim_{t\to a-} u_t(t,x), 0 < x < 1. \tag{4}$$

DEFINITION. Function $u(t,x)$ is called a **regular solution** of (1) in Ω, if $u(t,x) \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}(t,x) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x) \in C(\Omega_1 \cup J)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) \in C(\Omega_2 \cup J)$ and satisfies (1) in Ω.

The given function $\varphi(x)$ must satisfy the following conditions:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

If $h(t,x)$ is unknown, we formulate the following inverse problem by imposing an additional condition on the time variable.

INVERSE SOURCE PROBLEM. To find a pair of functions $\{u(t,x), h(t,x)\}$, satisfying (2)-(4) together with the final-time measurement

$$u\,(b,x) = \psi\,(x)\,,\ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

where $\psi(x)$ is a given function.

FORMAL SOLUTION. We search for a solution to the problem as follows:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_1W_k(t) \cdot \sin k\pi x, 0 \le t \le a, \tag{6}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_2W_k(t) \cdot \sin k\pi x, a \le t \le b. \tag{7}$$

We substitute (6) and (7) into (1) and will get the following fractional differential equations:

$$^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta} \cdot {}_1W_k(t) + (k\pi)^2 \cdot {}_1W_k(t) = h_k, 0 < t < a, \tag{8}$$

$$^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta} \cdot {}_2W_k(t) + (k\pi)^2 \cdot {}_2W_k(t) = h_k, a < t < b, \tag{9}$$

where $h_k(t) = 2\int_0^1 h(t,x)\sin k\pi x dx$ are the Fourier coefficients of the function $h(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)\sin k\pi x$.

Our equation incorporates a regularized Prabhakar derivative [1] . There are very few inverse problems associated with this operator. One of them is examined in the article [2]. We utilize the solution of the Cauchy problem to find the solution of the inverse problem, more detailed information about which can be found in articles [3] and [4].

LITERATURE

1.Prabhakar, T.R., A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Math,1971. Vol.1 No. 19, P. 7-15.

2. Javed, S., Malik, S.A., Operational calculus for Hilfer-Prabhakar operator: Applications to inverse problems. Phys. Scr. 2023. 98(10), 105220.

3. Rani, N., Fernandez, A., Solving prabhakar differential equations using Mikusinski's operational calculus. Comput. Appl. Math.2022. 41(107),P. 1-15.

4. Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M., On a mixed equation involving Prabhakar fractional order integral-differential operators. Trends in Mathematics, Extended Abstracts 2021/2022 Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center2. 2024. P.221-230.

Inverse problem for the abstract diffusion-wave equation with Caputo fractional derivative

Turdiev H.H.[1], Durdiev D.K.[2]

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan;
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
[1]hturdiev@mail.ru, [2]durdievdd@gmail.com

In this article, we'll consider an abstract fractional diffusion-wave equation in the Hilbert space H:

$$\partial_{0+,t}^{\alpha} u(t) + A^{\beta}u(t) + q(t)u(t) = f(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

with conditions

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t(t)\big|_{t=0} = \psi, \tag{2}$$

where $\partial_{0+,t}^{\alpha}$ is the Caputo fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ in the time variable t (see definition 1, 2 in preliminaries), $0 < \beta < 1$, $f(t) \in C((0,T);H)$ is a given function, φ, ψ are known elements of H, H is a separable Hilbert space equipped with the inner product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$, $A: H \to H$ is an arbitrary self-adjoint, a densely defined, positive, unbounded operator in H with the domain of definition $D(A) \subset H$. Assume that operator A has a set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$ and a complete set of orthonormal eigenfunctions $\{e_k\}$. Let the sequence of eigenvalues of the operator A have no finite limit point. Using renumbering of eigenvalues, we can number them in a non-decreasing manner, i.e., $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$.

Definition 1. A function $u(t) \in C([0,T]; D(A^\beta)) \cap C^1((0,T]; H)$ with the properties $D_t^\alpha u(t) \in C((0,T]; H)$, $A^\beta u(t) \in C((0,T]; H)$ and satisfying conditions (1),(2), is called the solution of direct problem.

Inverse problem. Given $\alpha,\ \beta,\ f(t)$ and $\varphi,\ \psi$, find a function $q(t)$ satisfying the problem (1)-(2) and the additional condition

$$\Phi[u(t)] = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where $\mu: [0,T] \to \mathbb{R}$ is a given function, $\Phi: D(\Phi) \subset H \to \mathbb{R}$ is a known linear bounded functional.

Definition 2. The problem of determining the function $q(t)$ from equation (1) using the additional condition (3) imposed on the solution of the direct problem (1)-(3) is called the inverse problem.

Fractional differential equations have found applications in various areas of modern science, such as dynamic processes in porous media, diffusion transport, electrical networks, control theory of dynamic systems, viscoelasticity, and more. Time-space fractional diffusion and diffusion-wave equations are formulated by replacing the conventional time and space derivatives with their fractional counterparts [1]-[3].

In this paper, the following assumptions are made:

(I1) $\varphi \in D\left(A^{2\beta}\right),\ \psi \in D\left(A^{2\beta}\right),\ f \in C\left([0,T]; D\left(A^\beta\right)\right)$;

(I2) $\mu(t) \in C^1[0,T]$ and satisfy the conditions $|\mu(t)| \geq \mu_0 > 0$ where μ_0 is given number;

(I3) $\mu(0) = \Phi[\varphi]$, $\mu'(0) = \Phi[\psi]$;

(I4) $\Phi: \{\Phi[e_k]\} \in l^2(\mathbb{N})$, where $\mathbb{N}$ denotes the set of natural numbers.

Theorem 1. Let (I1)-(I4) be held. Then the problem of finding a solution of (1)-(3) is equivalent to the problem of determining the function $q(t) \in C[0,T]$ satisfying

$$q(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\Phi[f](t) - \partial_{0+,t}^\alpha \mu(t) - \Phi[A^\beta u](t)\right),$$

where

$$A^\beta u(t) = A^\beta Z_1(t)\varphi + A^\beta Z_2(t)\psi$$
$$+\int_0^t A^\beta Y(t-s) f(s) ds - \int_0^t A^\beta Y(t-s) q(s) u(s) ds,$$

$$Y(t)h = \sum_{k=1}^\infty (h, e_k)\, t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_k^\beta t^\alpha\right) e_k, \quad h \in H,\ t > 0,$$

$$Z_1(t)\varphi = \sum_{k=1}^\infty (\varphi, e_k)\, E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k^\beta t^\alpha\right) e_k,\ Z_2(t)\psi = t\sum_{k=1}^\infty (\psi, e_k)\, E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k^\beta t^\alpha\right) e_k.$$

LITERATURE

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Application of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematical Studies, Elsevier, Amsterdam, 2006.
2. S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
3. G. Sorrentinos, Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams. In: Proceedings of IMAS, Saint Louis, Mo, USA, 2006.

Inverse problem for time fractional diffusion equation with nonlocal boundary and local initial condition

Turdiev H.H.[1], **Jo'raqulova A.I.**[2]
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
[1]hturdiev@mail.ru

In the domain $\Omega_T := \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$ consider the time-fractional diffusion equation

$$\partial_{0+}^{\alpha} u(x,t) = u_{xx} + q(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

and nonlocal family of boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) + \delta u(1,t), 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where ∂_{0+}^{α} is the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$, $f(x,t), \varphi(x)$ are given functions and δ is real constant.

The direct problem is to determine the solution $u(x,t)$ that satisfies (1)-(3), when the function $q(t)$ is known.

Inverse problem. Find the function $q(t), t > 0$ in (1), if the solution of the nonlocal boundary and local initial problem (1)-(3) satisfies condition:

$$u(x_0,t) = h(t),\ x_0 \in (0,1), \tag{4}$$

where $h(t)$ is known functions.

Theorem 1. Suppose that the following conditions hold:

$A_1)$ $\varphi \in C^1[0,1],\ \varphi'' \in L_2(0,1),\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1) + \alpha\varphi(1);$
$A_2)$ $h(t) \in C^1[0,T],\ D_{0+}^{\alpha} h(t) \in C[0,T],\ |h(t)| \geq h_0 > 0,\ h(0) = \varphi(x_0);$
$A_3)$ $f(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_T\right);$

then, there exists a unique solution of the inverse problem (1)-(4).

Inverse problem with a dynamical condition for the sub-diffusion equation involving the Hilfer-Prabhakar integral-differential operator

Turdiev Kh.N.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
xurshidjon2801@gmial.com

We consider the following time-fractional sub-diffusion equation

$${}^{PH}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu} u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

in a rectangular domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < x \leq 1, 0 < t \leq T\}$. Here $f(t,x)$ is a given function and

$${}^{PH}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta;\mu} y(t) = I_{0t}^{\alpha,\mu(m-\beta),-\gamma\mu,\delta}\left[\frac{d^m}{dt^m} I_{0t}^{\alpha,(1-\mu)(m-\beta),-\gamma(1-\mu),\delta} y(t)\right]$$

represents the Hilfer-Prabhakar fractional derivative [1] and

$${}^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \int\limits_0^t (t-\xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta (t-\xi)^{\alpha}\right] y(\xi)\, d\xi, \quad t > 0$$

represents the Prabhakar fractional integral [2]. We note that above-given definitions are valid for α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$, $m = [\beta] + 1$, such that $\alpha > 0$, $0 < \beta \leq 1$ and $0 \leq \mu \leq 1$.

Here $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ is the Prabhakar function [2]:

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \frac{z^m}{m!}.$$

Inverse-initial problem. To find a pair of functions $\{u(t,x), \varphi(x)\}$ satisfying that:
i) $u(t,x) \in C(\Omega) \cap C^2_x(\Omega)$, ${}^{PH}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu}_{0t} u(t,x) \in C(\Omega)$, $f(t,x) \in C(\Omega)$;
ii) Eq. (1) in Ω;
iii) the initial condition

$$I^{\alpha,(1-\mu)(1-\beta),-\gamma(1-\gamma),\delta}_{0t} u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1;$$

iv) the boundary condition

$$u(t,0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

together with the Neumann-Wentzell condition

$$u_x(t,0) + \rho u_{xx}(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \;\; \rho > 0;$$

v) the over-determination condition

$$u(\xi, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

for fixed $\xi \in (0,T]$. Here $\psi(x)$ is given function.

We have proved the theorem for this inverse-initial problem.

Theorem. Let $\rho = 1/x_0 \sin x_0$. If $\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = \beta$, $\lambda > 0$, $\delta < 0$, $\beta > 2\theta$, $0 \leq \theta < 1/2$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi'(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = \psi'''(1) = 0$,

$$\psi(x) \in C^3[0,1], \; \psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1),$$

$$f(0,x) = f_t(t,0) = f_t(t,1) = f_{tx}(t,1) = f_{txx}(t,0) = f_{txx}(t,1) = f_{txxx}(t,1) = 0,$$
$$f(t,x) \in C(\Omega), \; f_{txxx}(t,x) \in C(\Omega), \; f_{txxxx}(t,\cdot) \in L_2(0,1),$$

then there exist a unique solution of the inverse-initial problem.

REFERENCES

1. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Ž. Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications. Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 242, P. 576–589.
2. Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Mathematical Journal. 1971. Vol. 19, P. 7–15.

О существовании собственных значений краевой задачи с интегральным условием сопряжения для смешанного типа с оператором Герасимова–Капуто

Ахмадов I. A.

Навоийский государственный университет, Навои, Узбекистан;
e-mail: ahmadov.ilhom@mail.ru

В последние годы значительно возрос интерес к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа, в частности с участием операторов дробного порядка. Подобные задачи находят широкое применение в моделировании процессов, где наблюдается как диффузионный, так и волновой характер распространения, а также эффекты памяти и наследственности.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка и интегральным условием сопряжения. Доказано существования и единственность классического решения задачи A_α для уравнения смешанного типа дробного порядка. Изучены спектральные свойства задачи A_α для уравнения смешанного типа с производной дробного порядка в смысле оператора Герасимова–Капуто.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками $AA_0 = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\}$, $A_0B_0 = \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\}$, $BB_0 = \{x = 1,\ 0 \le y \le 1\}$, а при $y < 0$ характеристиками: $AC:\ x + y = 0,\ BC:\ x - y = 1$, уравнения

$$g(x;y) = Lz(x,y) \equiv \begin{cases} {}_cD_{0x}^{\alpha} z(x,y) - z_{yy}(x,y), & y \ge 0, \\ z_{xx}(x,y) - z_{yy}(x,y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ${}_cD_{0x}^{\alpha}\,[\bullet]$ — оператор дробного порядка α в смысле Герасимова–Капуто [5]:

$$ {}_cD_{0x}^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt, & 0 < \alpha < 1, \\ f'(x), & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2}$$

Задача A_α**.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$z(x,y)|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{3}$$

$$[z_x(x,y) + z_y(x,y)]|_{BC} = 0. \tag{4}$$

и условию сопряжения

$$z_x(x,+0) = z_x(x,-0),$$
$$z_y(x,+0) = az_y(x,-0) - b\int_0^x z_y(t,-0)\,dt, \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, причем $a^2 + b^2 > 0$.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ - пространство квадратично суммируемых функций на [0,1], $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Определение 1. Классическим решением задачи A_α назовем функцию $z(x,y)$ из класса

$$Q_1 = \{z(x,y):\ z(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\},$$

удовлетворяющую условиям (3), (4), (5) и обращающую уравнение (1) в тождество.

Определение 2. Функцию $z(x, y) \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи A_α, если существует последовательность функций $\{z_n(x, y)\}, z_n(x, y) \in Q_1$, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5) задачи A_α, такая, что последовательности $z_n(x, y)$ и $Lz_n(x, y)$ сходятся в L_2 к функциям $z(x, y)$ и $g(x, y)$ соответственно,т.е.

$\| z_n(x, y) - z(x, y)\|_0 \to 0$, $\| Lz_n(x, y) - g(x, y)\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. Для любой функции $g(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $g(0, y) = 0$, существует единственное классическое решение $z(x, y) \in Q_1$ задачи A_α, удовлетворяющее неравенству

$$\|z(x, y)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1 \|g(x, y)\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Теорема 2. Пусть $2/3 < \alpha \le 1$. Тогда для любой функции $g(x, y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $z(x, y)$ задачи A_α. Это решение принадлежит классу

$$Q_2 = \left\{z(x, y) : z(x, y) \in W_2^1(\Omega) \cap W^{1,2}_{2\,x,y}(\Omega_0) \cap C(\overline{\Omega})\right\}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|z(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \le C_2 \|g(x, y)\|_{L_2(\Omega)}$$

и может быть представлено в виде

$$z(x, y) = \iint_\Omega K(x, y; x_1, y_1) g(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1,$$

где $K(x, y; x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Теорема 3. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что уравнение $Lz(x, y) = \lambda z(x, y)$ имеет нетривиальное решение $z(x, y) \in Q_1$.

LITERATURE

1. Kal'menov T.Sh. On the spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. Differential Equations. 1977. 13(8). P. 1418–1425.
2. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. On the spectral theory of equations of mixed type. Tashkent: Mumtoz suz, 2005. 356 p.
3. Sadybekov M.A., Dildabek G., Ivanova M.B. Spectral properties of a Frankl type problem for parabolic-hyperbolic equations. Electronic Journal of Differential Equations. 2018.. 2018(65). P. 1–11.
4. Sabitov K. B. , Karamova A. A. Spectral properties of solutions of the Tricomi problem for equations of mixed type with two lines of degeneracy, and their applications. Russian Mathematics,. 2001. 65(4). P.769–785.
5. Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005. 200 p.
6. Ahmadov I.A. Об одной задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова–Капуто в области с отходом от характеристики, Uzbek Mathematical Journal. 2023. Vol. 71(2). P. 41–50.
7. Islomov B. I., Akhmadov I. A. A nonlocal boundary value problem with the Frankl condition for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the fractional Gerasimov–Caputo operator. Lobachevskii J Math. 2022. 43(3). P. 755–761.

Сингулярные уравнения Гельмгольца дробного порядка

Джабраилов А.Л.[1], Шишкина Э.Л.[2]

ФГБОУ ВО кЧеченский государственный университет им. А.А. Кадыровањ;

Воронежский государственный университет, Белгородский государственный национальный исследовательский университет;

ahmed0065@mail.ru, ilinadico@mail.ru

Мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $(B_\gamma)_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}$, $t>0$, $\gamma>0$, и Δ_γ — оператором Лапласа–Бесселя $\Delta_\gamma=\sum\limits_{k=1}^{n}(B_{\gamma_k})_{x_k}$. Для работы с такими операторами будут нужны следующие пространства и преобразования.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство , $\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$. Мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i>0$, $i=1,...,n$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$. Пространство $L_p^\gamma=L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$, $1\le p<\infty$ состоит из измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из своих переменных x_i, $i=1,...,n$ таких, что если $f\in L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty$, $x^\gamma=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i}$.

Нормированная функция Бесселя j_ν, определяется формулой $j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\ J_\nu(x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода. Для $x\in\mathbb{R}^n$ используем обозначение

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i).$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f\in L_1^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx.$$

Пусть $f\in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и является функцией ограниченной вариации по каждой из переменных x_i, $i=1,...,n$ в окрестности точки x непрерывности f. Тогда обратное многомерное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\,d\xi.$$

Нас интересует вопрос о дробных степенях оператора $(I-\Delta_\gamma)$, где I — тождественный оператор. Для построения таких дробных степеней нам потребуется многомерный обобщенный сдвиг вида

$$({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)={}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$, $i=1,\ldots,n$

$$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i.$$

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$ дается формулой $(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y g)(x)y^\gamma\,dy$.

Обобщенное ядро Бесселя определим равенством

$$G_\alpha^\gamma(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|),$$

где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Обобщенный потенциал Бесселя определяется как обобщенная свертка с ядром $G^\gamma_\alpha(x)$ и реализует отрицательную дробную степень оператора $(I-\Delta_\gamma)$ [**?**]:

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G^\gamma_\alpha(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy.$$

Определим оператор $(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}$ посредством предельного перехода в L^γ_p:

$${}_1(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\left(x\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}^{L^\gamma_p}(F^{-1}_\gamma\left[\left(1+|\xi|^2\right)e^{\xi|\xi|}\right](x)*\varphi\left(x\right))_\gamma.$$

Связь операторов $(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)$ и ${}_1(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}$ дается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in L^\gamma_p,\ 1\le p\le\infty$. Тогда обобщенный потенциал Бесселя $u\left(x\right)=G^\alpha_\gamma\varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения дробного порядка вида*

$${}_1(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}u\left(x\right)=\varphi\left(x\right).$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (FEGS-2023-0003).

Список литературы

1. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential, Axioms. – 2021. – Vol. 10, no. 3. – P. 1–20.

Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа с дробными производными

Исломов Б.И. [1], **Абсоатова Х. Г.** [2]

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан;
Наманганский Государственный Университет, г.Наманган, Узбекистан;
islomovbozor@yandex.com, rhmtvfarhod@gmail.com

Благодарности. *Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект* ***ФЗ-202009211****).*

Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие производные дробного порядка, имеют важные приложения в различных областях [1]–[6] и полученные результаты, безусловно, представляют большое значение из-за их новизны. Такие дифференциальные уравнения в частных производных невозможно классифицировать из-за наличия дробной производной, так как не удается написать соответствующее характеристическое уравнение.

В связи с этим предлагаю следующее определение классификации таких уравнений по типам.

Определение 1. Дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие производную дробного порядка γ, назовем параболическим, эллиптическим и гиперболическим, если при каком-то значении γиз промежутка его изменения они становятся соответственно дифференциальным уравнением параболического, эллиптического и гиперболического типов по существующей классификации дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 2. Если в различных частях области задания дифферен-циальное уравнение в частных производных, содержащее дробную производ-ную, принадлежит различным типам в указанном выше смысле, то такое дифференциальное уравнение следует называть уравнением смешанного типа в этой области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_cD_{0y}^{\alpha}u + \mu_1 u_{xx}(x,0), \quad (x,y) \in \Omega_1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \\ u_{xx} - {}_cD_{0y}^{\beta}u + \mu_2 u_{xx}(x,0) \quad (x,y) \in \Omega_2, \quad 1 < \beta \leq 2 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y): \ 0 < x < l, \ -p < y < q \ \}$, где

$$\Omega_1 = \Omega \ \cap \ \{(x,y): \ 0 < x < l, \, 0 < y < q\},$$

$$\Omega_2 = \Omega \ \cap \ \{(x,y): \ 0 < x < l, \, -p < y < 0\},$$

$$J = \{(x,y): \ 0 < x < l, \ y = 0\}, \ \ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J,$$

а $p > 0, \ \ q > 0, \, l, \, \mu_j \geq 0 \, (j = 1,2)$ – заданные действительные числа, ${}_cD_{0y}^{\gamma}$– оператор дробного порядка в смысле Капуто [2], [7, с. 38].

Класс C_θ^k***.*** Через $C_\theta^k(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до $k-$ го порядка включительно в области M.

Задача TD_p**.** Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J), \quad {}_cD_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega_1), \quad {}_cD_{0y}^{\beta}u \in C(\Omega_2),$$
$$y^{1-\alpha}u_y(x,y) \in \ C(\Omega_1 \cup J), \quad (-y)^{1-\beta}u_y(x,y) \in \ C(\Omega_2 \cup J) \ ; \tag{2}$$
$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$$
$$u(0,y) = 0, \qquad u(l,y) = 0, \qquad -p \leq y \leq q \, ;$$
$$u(x,-p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \, ;$$
$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} (-y)^{1-\beta}u_y(x,y), \quad (x,0) \in J;$$

где $\psi(x)$ –заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0.$$

В данной работе доказаны теоремы единственность и существования решения задачи TD_p. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда и при определен-ных ограничения на заданных функции показана его сходимость в классе (2). Установ-лена устойчивость решения относительно граничная функция $\psi(x)$ в классе непрерыв-ных и квадратично-суммируемых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН. 2000. 299с.

2. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.Нальчик, 2005.186 с.

3. Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic

Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain. Lobachevskii J.of Math.. 2020. **41**(9). P. 1801–1810.
4. Ашуров Р. Р., Зуннунов Р.Т. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной.Обратные задачи. arXiv:2103. 14966v1 [math.AP] 27 Mar 2021.С. 1-13.
5. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными. Изв. вузов. Матем. 2022. № 9. С. 83–94.
6. Islomov B., Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with Caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order. Russian Mathematics. 2020. **64**(10). P. 29–42.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука Техника. 1987. 688 с.

Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа с дробными производными

Исломов Б.И.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан;
e-mail: islomovbozor@yandex.com

Благодарности. *Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект **ФЗ-202009211**).*

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного гиперболического уравнения, когда нагруженые части содержит операторы дробных производ-ных Римана - Лиувилля.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+\mu_1\, D_t^{\beta_1}u(x,t)\Big|_{x=x_0}, & 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u_{tt}-u_{xx}+\mu_2 D_{0\eta}^{\beta_2}u(0,\eta), & -\infty<x<0, \quad t>0,\\ u_{tt}-u_{xx}+\mu_3 D_{0\xi}^{\beta_3}u(\xi,0), & 0<x<+\infty, \quad t<0, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup J_1\cup J_2$, где

$$\Omega_1=\{(x,t):\ 0<x<+\infty,\ \ 0<t<+\infty\},$$

$$\Omega_2=\{(x,t):\ -\infty<x<0,\ \ 0<t<+\infty\},$$

$$\Omega_3=\{(x,t):\ 0<x<+\infty,\ \ -\infty<t<0\},$$

$$J_1=\{(x,t):\ 0<x<+\infty,\ \ t=0\}, J_2=\{(x,t):\ x=0,\ \ 0<t<+\infty\},$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J_2,$$

$\Omega_2^*=\Omega_1\cup\Omega_3\cup J_1$, а $D_t^\gamma u(x,t)$ и $D_{0\xi}^\gamma u(x,t)$ операторы дробных производных Римана-Лиувилля вида[1]:

$$D_t^\gamma u(x,t)=\begin{cases} D_{tx}^\gamma u(x,t) & \text{при} \ \ t<x,\\ D_{xt}^\gamma u(x,t) & \text{при} \ \ t>x, \end{cases}$$

$$D_{tx}^\gamma u(x,t)=\frac{sign(x-t)}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^x\frac{u(x,z)}{|x-z|^\gamma}\,dz. \tag{2}$$

В уравнении (1) $x_0>0$, $\xi=x+y$, $\eta=y-x$, μ_j $(j=\overline{1,3})$ − заданные действительные числа, причем

$$\mu_j\geq 0, \qquad 0\leq\beta_j<1, \ \ (j=\overline{1,3}), \tag{3}$$

Определение 1. *Через* $AC^n(V)$, *где* $n = 1, 2, \ldots .$ $, V-$*отрезок, обозначим класс функций* $f(x)$, *непрерывно дифференцируемых на* V *до порядка* $n-1$, *причем* $f^{(n-1)}(x) \in AC(V)$ *и* $AC^1(V) = AC(V)-$*класс абсолютно непрерывных функций.*

Определение 2. *Пусть* $0 \leq c < 1$ *и* $f(x) \in AC([0,1])$, *тогда* $D_{0x}^c f\,(x)$ *существует почти всюду на* $(0,1)$ *и может быть представлена в виде[1]:*

$$D_{0x}^c f\,(x) = \frac{1}{\Gamma(1-c)}\left[f(0)x^{-c} + \int_0^x (x-t)^{-c} f'\,(t)\,dt\right].$$

Для уравнения (1) в области Ω поставлена краевая задача с условием Трикоми, а также доказана существование и единственность решения этой задачи.

Задача $AT(\Omega)$**.** Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1^*) \cap C^1(\Omega_2^*)$, $u(x,t) \in AC\,[0,+\infty)$ *для* $\forall x, t \in [0,+\infty)$;
2) $u(x,t) \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_j $(j = \overline{1,3})$;
3) $u\,(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,t)|_{t=-x} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

$$u(x,t)|_{x=-t} = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)-$заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Теорема. *Если функция* $\varphi_1(x)$*и* $\varphi_2(t)$ *непрерывна и ограничена на свой области определения* $0 \leq x < +\infty,$ $-\infty < t \leq 0$ *и* $-\infty < x \leq 0,$ $0 \leq t < +\infty$ *соответ-ственно, то в области* Ω *решение задача* $AT(\Omega)$ *однозначно разрешима.*

Теорема доказывается методом интегральных уравнений. Согласно этого задача $AT(\Omega)$ эквивалентным образом сведется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Однозначная разрешимость задачи следует из однозначной разрешимости интегрального уравнения Вольтерра[2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987. 688 с.
2. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз. 1959. 232 с

Кратные операторы ЭрдейиЦКобера дробного порядка и их применение к решению граничных задач

Каримов Ш.Т., Исмоилов М.Х.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shaxkarimov@gmail.com, ismoilovmuhtorzon140@gmail.com

В работе A. Erdelyi и H. Kober [1] была введена следуюшая модификация дробного интегрирования:

$$I_{\eta,\alpha}\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\alpha-1} t^{2\eta+1}\varphi(t)dt, \tag{1}$$

$$K_{\eta,\alpha}\varphi(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{\alpha-1} t^{1-2\alpha-2\eta}\varphi(t)dt \tag{2}$$

которые оказались весьма полезными при исследовании интегральных операторов, интегральных уравнений и в других областях математики. Операторы (1), (2) и их обобщения получили название операторов Эрдейи-Кобера.

В работах A. Erdelyi подробно изучалась композиция операторов (1) и (2) с дифференциальным оператором Бесселя

$$B_\eta^x = x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}x^{2\eta+1}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}. \tag{3}$$

В работе [2], [3] изучены применение оператора Эрдейн-Кобера для решение задачи дифференциальных уравнение в частных производных.

Двухпараметрический двукратный оператор Эрдейн-Кобера имеет вид

$$\begin{gathered} I_{n_2,\alpha_2}^{n_1,\alpha_1} f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \times \\ \times \int\limits_0^1 \left(1-\sigma_1^2\right)^{\alpha_1-1} \sigma_1^{2n_1+1} \left[\int\limits_0^1 \left(1-\sigma_2^2\right)^{\alpha_2-1} \sigma_2^{2n_2+1} f\left(x\sigma_1\sigma_2\right) d\sigma_2\right] d\sigma_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Интегралы Эрдейн-Кобера обладают свойством оператора преобразования.

Данный факт вытекает из следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0, f(x) \in C^4(0,b), b > 0$, *функции* $x^{2\eta_1+1}f(x)$, $x^{2\eta_2+1}f(x)$ *интегрируемы в нуле и* $\lim_{x\to 0} x^{2\eta_1+1}f'(x) = 0, \lim_{x\to 0} x^{2\eta_2+1}f'(x) = 0$. *Тогда имеет место равенство,*

$$B_{\eta_2+\alpha_2}^x I_{\eta_2,\alpha_2} B_{\eta_1+\alpha_1}^x I_{\eta_2,\alpha_1} f(x) = I_{\eta_2,\alpha_2} I_{\eta_2,\alpha_1} B_{\eta_2}^x B_{\eta_1}^{xt_1} f\left(xt_1t_2\right) \tag{5}$$

В работе изучено применение соотношения (5) к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвчртого порядка

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha_2}{x}\cdot\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha_1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x).$$

Литература

1. Erdelyi A., Kober H. Some remarks on Hankel transforms// Quart. J.Math. Oxford, 1940. -v. II, -є 43. - P. 212-221.
2. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. -М.:Физматлит, 2018.
3. А.К.Уринов, Ш.Т.Каримов, Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных.-"Фарг' она 2021.

Уравнение Коши-Эйлера дробного порядка

Махамуд А.А., [1], Шишкина Э.Л.[2]

ФГАОУ ВО кБелгородский государственный национальный исследовательский университетъ

ФГБОУ ВО кВоронежский государственный университетъ

1269765@bsuedu.ru, ilinadico@mail.ru

В статье [1] рассмотрены следующие обобщения дробных интегралов и производных Адамара. Пусть $c \geq 0$. Дробный интеграл адамаровского типа при $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^c \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \qquad x > 0,$$

дробная производная адамаровского типа при дробных $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,c}f)(x), \qquad x > 0,$$

где $x\frac{d}{dx}$ — оператор Эйлера, $n = [\alpha] + 1$. В случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}_H\mathfrak{D}^{n}_{0+,c}f)(x) = \frac{1}{x^c}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c f(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}^{0}_{0+,c}f)(x) = ({}_H\mathfrak{I}^{0}_{0+,c}f)(x) = f(x).$$

При $c = 0$ операторы ${}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,c}$ и ${}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,c}$ дают дробные степени оператора Эйлера $x\frac{d}{dx}$.

Для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится во всякой точке $x > 0$ при $\alpha > 0$ и $c > 0$ выполняются равенства

$$({}_H\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,c}y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} -\alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c x^k \frac{d^k y}{dx^k}$$

и

$$({}_H\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,c}y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c x^k \frac{d^k y}{dx^k},$$

где $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right\}_c$ — обобщенные функции Стирлинга вида

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}(c+j)^{\alpha}, \qquad \alpha, c \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Для таких функций справедливо равенство

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right\}_c = c^{\alpha}.$$

Преобразование Меллина функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ имеет вид

$$\varphi^*(s) = \mathcal{M}[\varphi(x)](s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

где $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, такое, что указанный интеграл существует.

В качестве пространства оригиналов выбираем пространство P^b_a, где $-\infty < a < b < \infty$. Пространство P^b_a является линейным пространством функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, таких, что $x^{s-1}\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ для каждого $s \in \{p \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} p \leq b\}$.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (1) от нее существует и выполняется условие*

$$x^s\left(x\frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x)\bigg|_{x=0} = x^s\left(x\frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x)\bigg|_{x=\infty} = 0, \qquad m = 0, 1, ..., k-1,$$

тогда решение неоднородного уравнение Коши-Эйлера вида

$$L_{\vec{\alpha}}y = \sum_{k=0}^{n} b_k({}_H\mathbb{D}^{\alpha_k}_{0+,c}y)(x) = \varphi(x), \qquad \alpha_k > 0, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\varphi^*(s)}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k(c-s)^{\alpha_k}}\right](x).$$

Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (FEGS-2023-0003).

LITERATURE

1. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. Numer. Funct. Anal. Optim.. – 2003. – Vol. 24, no (7–8). – P. 673–711.

Прямые задачи для диффузионного уравнения дробного порядка с сингулярными коэффициентами

Хасанов И.[1], Расулова Н.[2]

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
ihasanov998@gmai.com, niginabonurasulova63@gmail.com

В данной работе исследуется начально-краевая задача для дифференциального уравнения, содержащего дробную производную

$$\mathcal{D}^{\alpha}_t u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

с начальным

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in [0,l], \tag{2}$$

и граничным условиями

$$\lim_{x\to 0} x^k \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0, u(l,t) = 0, t \in [0,T]. \tag{3}$$

В задаче (1)-(3) $\mathcal{D}^{\alpha}_t$ обозначает дробную производную Римана - Лиувилля в смысле Капуто, где параметры принимают значения $k \in (-1,0)$, $T > 0$, $l > 0$, $\Omega_T = \{(x,t)|x \in (0,l), t \in (0,T]\}$.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, принадлежащую классу $C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)$, такую, что $x^k u_x(x,t) \in C(\Omega_T), \varphi(x), \psi(x)$ и удовлетворяющую следующим условиям: дифференциальному уравнению (1), начальному условию (2), граничным условиям (3) где $\varphi(x), \psi(x)$ и $f(x,t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Список литературы

1. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В., Вторая начально-граничная задача для B- гиперболического уравнения, Изв. вузов. Матем., 2019, номер 10, 75-86.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differetial equations. North–Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.