

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

O'zR FA V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

MATEMATIK FIZIKA VA ZAMONAVIY ANALIZNING TURDOSH MASALALARI

professor D.K. Durdiyev tavalludining 60 yilligiga bag'ishlangan xalqaro ilmiy
anjumani

Buxoro shahri, 10-11-oktyabr, 2025 yil

MA'RUZALAR TEZISLARI

II TOM

===== ◇ =====

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО АН РУЗ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

Международная научная конференция
посвященная 60-летию со дня рождения профессора Д.К. Дурдиева
город Бухара, 10–11 октября, 2025 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ТОМ II

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 + 517.968 + 519.6.

«Математическая физика и смежные вопросы современного анализа»: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 60-летию со дня рождения профессора Д.К. Дурдиева (10–11 октября 2025 года, Бухара, Узбекистан).
– Бухара. Изд-во «Дурдона». 2025. 310 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции «Математическая физика и смежные вопросы современного анализа» по следующим направлениям: Актуальные проблемы современной алгебры и геометрии, Математический анализ и его приложения, Дифференциальные уравнения, обратные и некорректные задачи математической физики, Дробное исчисление и его приложения, Математическое моделирование и вычислительные методы, Теория вероятностей и математическая статистика, Современные проблемы механики, Перспективы развития математического образования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

профессор Арипов М.М.	профессор Ашуров Р.Р.
профессор Дурдиев Д.К.	профессор Хасанов А.Б.
профессор Икромов И.А.	профессор Файзиев Ю.Э.
профессор Бешимов Р.Б.	профессор Хаётов А.Р.
профессор Тешаев М.Х.	профессор Сафаров Ж.Ш.

Ответственные за выпуск:

DSc **Рахмонов А.А.**
PhD **Дурдиев У.Д., Бабаев С.С., Дилмуродов Э.Б,**
Турдиев Х.Х., Жумаев Ж.Ж., Болтаев А.А.

За содержание и оригинальность тезисов, представленных в данном сборнике, ответственность несут авторы этих работ.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

- Самиев К.А.** – председатель, проректор БухГУ.,
Жураев Х.О. – сопредседатель, декан БухГУ.

Члены организационного комитета

- Рашидов У.У.** – проректор БухГУ.,
Хаётов А.Р. – зав. отделом ИМ АН РУз.,
Расулов Т.Х. – профессор БухГУ.,
Тешаев М.Х. – профессор ИМ АН РУз.,
Нуриддинов Ж.З. – доцент БухГУ.,
Бозоров З.Р. – старший научный сотрудник ИМ АН РУз.,
Дилмурадов Э.Б. – зав. кафедры БухГУ.,
Дурдиев У.Д. – зав. кафедры БухГУ.,
Рахмонов А.А. – ведущий научный сотрудник ИМ АН РУз.,
Турдиев Х.Х. – докторант ИМ АН РУз.,
Жумаев Ж.Ж. – докторант ИМ АН РУз.,
Болтаев А.А. – доцент БухГУ.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:

- Хамидов О.Х.** – ректор БухГУ., (Бухара, Узбекистан).

Заместители председателя:

- Розиков У.А.** – сопредседатель, замдиректор ИМ АН РУз.,
(Ташкент, Узбекистан),
Дурдиев Д.К. – зав. отделом ИМ АН РУз.,
(Бухара, Узбекистан),
Самиев К.А. – проректор БухГУ., (Бухара, Узбекистан).

Члены программного комитета

- Алимов Ш.А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Романов В.Г. – академик РАН (Россия),
Азамов А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Беляев А.К. – член. корр. РАН (Россия),
Лакаев С.Н. – академик АН РУз (Узбекистан),
Киране М. – профессор (УАЭ),
Демиденко Г.В. – профессор (Россия),
Розиков У.А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Ашуров Р.Р. – профессор (Узбекистан),
Икромов И.А. – профессор (Узбекистан),
Мегралиев Я.Т. – профессор (Азербайджан),
Кабанихин С.И. – член-корреспондент РАН (Россия),
Ситник С.М. – профессор (Россия),
Кожанов А.И. – профессор (Россия),
Матвеева И.И. – доцент (Россия),
Псху А.В. – профессор (Россия),
Тотиева Ж.Д. – профессор (Россия),
Ашыралыев А. – профессор (Турция),
Каримов Э.Т. – профессор (Узбекистан),
Шишикина Э.Л. – профессор (Россия),
Азизбаёв Э.И. – профессор (Азербайджан),
Сафаров Ж.Ш. – профессор (Узбекистан),
Зуннунов Р.Т. – доцент (Узбекистан).

Секретариат конференции

Худаяров С.С., Маматова Н.Х., Меражова Ш.Б., Холиков С.Х., Хасанов И.И.,
Суяров Т.Р., Элмурадова Х.Б., Субхонова З.А., Ахмедов О.

СОДЕРЖАНИЕ

Профессор Дурдиев Дурдимурод Каландарович	11
СЕКЦИЯ 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ	
SECTION 5. MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL METHODS	
Akhmadaliev G.N. Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in space $K_{2,\omega}(P_4)$	17
Akhmedov D. M. About an optimal approximate solution for the Hadamard type singular integral equation of first kind	19
Akhmedov D.M., Buvasherov D.S. An optimal quadrature formula for the approximation of Cauchy-type integrals with high oscillation	21
Azamov S.S., Bekmurodova D.B. Davriy funksiyalar fazosida xatolik funksionali	23
Babaev S.S. The method of the optimal quadrature formula with derivative for the approximate calculation of weakly singular integrals	25
Bakhramov S.A., Abdullaev B.D., Abduganiev M.M., Qobilov S.Sh. Spline-based modeling of hydrogeological data at unequal intervals	26
Bakhramov S.A., Azimov B.R., Abduganiev M.M., Qobilov S.Sh. Digital processing biomedical signals using local cubic splines	29
Barliqbaeva G.B., Xaydarov A.T. Yuqimli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish	31
Berdimurodova U.A. Construction of an optimal quadrature formula in the Sobolev space $L_2^{(4)}(a, b)$ using the φ -function method	33
Boltaev A.K., Davronov J.R., Abdurakhimov D.I. An expression for the norm of the interpolation formula in the space $L_2^{(m,0)}(0, 1)$	34
Bozarov B.I., Makhmudova N.A. Evaluation of definite integrals by spline approximation	35
Buriyev T.E., Ergashev V.E., Usmonov F. Dynamics of a Predator-Prey System with Consideration of the Lower Critical Density of Prey Populations and Intraspecific Competition	36
Daliyev B.S. Nasriddinov O.U. Calculation of Abel-type singular integrals using cubic splines	38
Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A., Solijanova K.A. Structure of Fixed Point Cards: From General to Degenerate Cases	39
Hayotov A.R., Abduaxadov A.A. The coefficients of the optimal quadrature formula constructed with the φ -function method in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$	41

Hayotov A.R., Nafasov A.Y.	
The extremal function of the interpolation formula in the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$	43
Islamov E. R.	
Kubik splayn yordamida teskari Erdelyi-Kober operatorini taqribiy hisoblash	45
Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I.	
Study of fractional dynamics of heart work within the framework of the Zeeman model	48
Jabborov Kh.Kh.	
Construction of the optimal quadrature formula for the approximate solution of the singular integral equation with a Hilbert kernel in space $L_2^{(2)}(0,2\pi)$	49
Khayriev U.N., Hamroeva Z.A.	
An affective quadrature formula in the Hilbert space	52
Kuziev Sh.S., Ulikov Sh.Sh.	
Optimal quadrature formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0,1)$	54
Muminov M.I., Abdusaitov D.Sh.	
Piecewise constant arguments method for solving Caputo-type fractional differential equations	56
Muminov M.I., Usmonov N.M.	
Chiziqli ikkinchi tartibli chegaraviy shartli masalani taqribiy yechish	58
Normurodov Ch.B., Murodov S.K.	
Spektral-to'ri usuli orqali yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatlashgan oddiy differensial tenglama yechimini va hosilalarini hisoblash	60
Nuraliev F.A., Abdullaeva G.Sh.	
Minimizing the semi norm in the space $K_{2,v}^{(3,4)}$	63
Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.	
Extremal function of the error functional for the optimal quadrature formula	64
Nurmatova S.K., Aminov D.R.	
Nochiziqli dielektrik muhitda yuqori quvvatli lazer nurlari ta'sirida o'z -o'zini fokuslash effektini matematik modellashtirish	66
Olimov N.N.	
System of equations for coefficients of the optimal interpolation formula with derivatives	68
Parovik R. I.	
Solution of ordinary second-order differential equations using neural network methods based on orthogonal polynomials	70
Raxmonov Z.R., Zaripova A.R.	
Nochiziqli chegaraviy shartlarga ega reaksiya-diffuziya masalasining avtomodel yechimi asimptotikasi	73
Razmukhamedov D.D., Pulatova L.T.	
The role of mathematical modeling in clinical decision-making and public health policy	75
Salimova A. I., Parovik R.I.	
Numerical analysis of forced oscillations of the Van der Pol-Airy fractional oscillator	77
Shadimetov Kh.M., Karimov R.S.	
Optimal implicit difference formulas of Adams-Moulton type in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}$	79
Shadimetov X.M., Boltaev A.K., Atamuradova B.M.	
Exponentially weighted quadrature formula extremal element of one exponentially weighted quadrature formula	80

Shomalikova M.Sh.	
Explicit construction of sard-optimal quadrature formulas in $L_2^{(2)}(a, b)$ on uniform grids	83
Seytov Sh. J., Narziyev N. B., Xudaybergenova G. K.	
Some properties of the delayed logistic mappings	85
Toshboyev O.N.	
Kasr tartibli integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formulalar qurish	86
Usmanov Kh.I.	
Weighted optimal quadrature formulas with derivatives	88
Utebaev B.D.	
Compact finite difference schemes for one-dimensional and two-dimensional quasilinear equations	90
Yusupov F.A., Eshkabilov A.A.	
Dynamics and applications of the non-Volterra quadratic operator	91
Yusupov F.A., Islomova M.N., Bobokulova M.A.	
Dynamics and applications of the non-Volterra cubic operator	94
Алоев Р.Д., Овлаева М.Х.	
Численное исследование смешанной задачи для гиперболической системы с динамическими граничными условиями	96
Арипов М.М., Нигманова Д.Б., Нигманов Б.В.	
Численное моделирование диффузионных процессов в двухкомпонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником	97
Дониёров Н.Н.	
Построение тригонометрических базисных функций над конечными прямоугольными элементами	98
Жалолов О.И., Хаятов Х. У.	
О практических асимптотически оптимальных кубатурных формул в пространстве Соболева $\bar{L}_P^{(m)}(S_n)$	101
Жалолов О.И., Жалолов Ик.И., Мухсинова М.Ш.	
Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы для вычисления интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$	103
Жалолов О.И., Жалолов Ик.И., Мухсинова М.Ш.	
Коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$	105
Жалолов О.И., Махмудов М. М.	
Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $W_2^m(R)$	108
Жумаев Ж., Ширинов З.К.	
Применение гипотезы Прандтля в исследовании турбулентной струи с использованием метода запаздывающих коэффициентов	111
Ибрагимов А., Фозилов О.	
Теорема о знаковой инвариантности собственных векторов в интервальной обобщённой задаче на собственные значения	113
Имомов А.	
Алгоритмы и программы для собственных значений	116
Кудуев А. Ж., Турсунов Д. А.	
Применение нейросетей для вейвлет-анализов	118
Маматова Н.Х.	
Квадрат нормы функционала погрешности составных квадратурных формул	120

Мадрахимов У.С., Исакжанова Д.Д. Математические модели экономического равновесия в смысле Нэша, основанные на играх	122
Сагдуллаев О.К. Модель переноса веществ в двумерной прямоугольной среде	125
Хакимова Д.А., Эшмаматова Д.Б., Завгороднева С. Математическая модель популяции резистентных и чувствительных бактерий на основе динамической системы типа Лотки-Вольтерры	127
Шадиметов Х.М., Уринбоев Р. Приближенное вычисление быстроосциллирующих интегралов	130
Шадиметов Х. М., Эсанов Ш. Э. Экстремальная функция разностной формулы	131
Шадиметов Х.М., Турсунмурадов С.Т. Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной	133
Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомиллов Д.М. Экстремальная функция об одной квадратурной формулы в пространстве Соболева	135
Шадиметов Х. М., Элмуратов Г. С. Об одной дискретной системе типа Винера-Хопфа	137
Эшмаматова Д.Б., Очилова Н.К. О краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа с сингулярным коэффициентом и ее приложениях	138

**СЕКЦИЯ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
SECTION 6. PROBABILITY THEORY AND
MATHEMATICAL STATISTICS**

Азимов Ж., Тураев А. Асимптотические свойства ветвящихся процессов с взаимодействием частиц	142
Kushmurodov A.A., Sharipov O.Sh. Law of large numbers for m -dependent random fields with values in Hilbert spaces	144
Lazareva V.A. The non uniform bounds of remainder term in CLT for the sum of functions of m -spacings	145
Muxtorov I.G', Sharipov O.Sh. Central limit theorem for dependent random variables with values in $L_p[0, 1]$	147
Ruzieva D.S., Sharipov O.Sh. Strong laws of large number for random fields with values in infinite dimensional Banach spaces	148
Sharipov S.O. Strong law of large numbers for random walks in weakly dependent random scenery	150
Сирожитдинов А. А. Некоторые асимптотические оценки распределений сумм независимых случайных векторов.	152

Каландаров У.Н. Условия асимптотической нормальности и оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для статистики от вектора спейсингов	153
---	-----

**СЕКЦИЯ 7. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ
SECTION 7. CONTEMPORARY PROBLEMS IN
MECHANICS**

Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh. Numerical solution of the boundary value inverse problem for the equation of nonstationary relaxation filtration with the de souza marching method	157
Xasanov J .A. Tebranishlardan himoyalanuvchi nomukammal elastik plastinkaning tebranishlari ustuvorligi	159
Yuldasheva A.V. Boundary value problem for the free vibration equation of a beam	161
Беляев А.К. Высокочастотная динамика-отсутствующее звено в эволюции динамики	162
Болтаев З.И., Рузиев Т.Р., Отажонова С.Ш., Эсанов Н.К., Ибодов Н.М. Рассеяние поверхностных волн в неглубоких полостях в вязкоупругих полупространствах	163
Буранов Ж.И., Каххоров А.Э. Метод векторных функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений	165
Ишмаматов М., Ахмедов Ш.Р., Алмуратов Ш. Н., Мухитдинов Р.Т., Собиров С.Ж. Динамические напряженно - деформированные состояния прямолинейных участков трубопроводов при воздействии внешних нагрузок	167
Каримов И.М., Махмудова Д.М., Эргашева Н.Ш., Файзуллаев Ф.Б., Сулайманова Г.Х. Осесимметричные вязкоупругие волны в цилиндрической оболочке	169
Марасулов А.М., Уралов У., Курбанов У., Отажонова С.Ш., Жумаева А.А. Поперечный удар тела сферические формы по деформируемой пластинке	172
Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Нуриддинов Б.З., Мирзоева Г.Т., Зарипов Б.Ш. Задача дифракции и собственных значений для упругих механических трубопроводных систем	174
Шафиев Т.Р., Бобожонова М.А. Математическое моделирование процесса распространения пылевых частиц в атмосфере	176
Усмонов Б.Ш., Рахмонов Б.С., Сафаров У.И., Сабирова Р.А., Гаффоров И.И. Собственные колебания криволинейных участков трубопроводов, взаимодействующих со средой	179

Ходжиев С., Аминов Х., Элмуродов Ж., Пиримов А., Турсинбоева З.	
Моделирование внутренних течений на основе полной уравнений Навье-Стокса	181

**СЕКЦИЯ 8. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.
SECTION 8. PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT
OF MATHEMATICAL EDUCATION**

Абдухошимов А.	
Фрактальная геометрия в школьном курсе: теория, алгоритмы и оценивание	184
Akmurzayeva V.A., Qarordinov S.R.	
Topologiya fanini o'qitishda interfaol metodlardan foydalanish	186
Avliyoqulov A.A.	
O'zbekistonda matematika fanini rivojlanish bosqichlari va istiqbollari	187
Bahriddinova D.F.	
Zamonaviy raqamli vositalar yordamida fazodagi tekislikni o'rgatishning samaradorligi	189
Begmatov A.Kh., Allanazarova N.A., Normatova A.	
Mathematics and the Case Method: The Digital Age, Engineering Education, and Empirical Analytics	192
Bozorov Z.R., Davlatova D.S.	
Biologik jarayonlarni tahlil qilishda matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasining qo'llanilishi	194
Bozorov Z.R., Mamatoxunova Y.A.	
The CaPeB model as an innovative pedagogical framework for teaching linear algebra in higher education	197
Do'stova Sh.B., Mahmudova R.M.	
Mantiqiy va olimpiada masalalarining o'quvchilar fikrlash qobiliyatini rivojlanishiga ta'siri	199
Durdiyev D.Q., Abdusalomova A.	
Talabalarning ijodiy tafakkurini rivojlantirishda oddiy differensial tenglamalar sistemalarini muammoli texnologiyalar yordamida o'qitishni takomillashtirish	200
G'affarova D.	
Oliy ta'limda matematika fanini o'qitishning zamonaviy yondashuvlari	202
G'ulomov U.	
Iqtisodiy ta'lim va shaxsning iqtisodiy madaniyatini rivojlantirish masalalari	203
Muhitdinov D.F.	
Median teoremasi	205
Muxamedkulova A.A., Qarordinov S.R.	
Topologik fazolarning zichlik tipidagi xossalari o'qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish	207
Muxamedkulova G.A., Qarordinov S.R.	
Topologik fazolarning turli salmoqlarini o'qitishda algebraik metodlardan foydalanish	208

Sadullayeva I. Integrativ yondashuv asosida talabalarning matematik savodxonlik ko'nikmalarini shakllantirish metodikasini takomillashtirish	210
Тураева Н.А. Геометрическое место точек в пространстве	211
To'rayev Sh.F. Didaktik birliklarni yiriklashtirish texnologiyasi asosida o'qitish metodikasi	213
To'rayev Sh.F., Avazxonova M.A. Mustaqil ta'lim samaradorligini oshirishga qaratilgan web ilovalarning ahamiyati	215
Turgunbayev R., Umaraliev D. Methods of working with educational mathematical information	218
Umedov Sh.K., Rajabov B.H. Ta'limda kompyuter modellashtirishining roli	220
Xolikov S., Absalomova A. Oddiy differensial tenglamalar sistemasini o'qitishda muammoli ta'lim texnologiyalaridan foydalanish	222
Xonkulov U. X. A visual-genetic approach to studying trigonometric formulas involving inverse trigonometric functions	225
Yusupova A.K. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'qitish jarayonida tabaqalashtirilgan yondashuv	227
Арзикулов С.Д., Сафаров Ж.Ш. Методические аспекты преподавания раздела преобразования Лапласа	229
Сафаров Ж.Ш., Абдиева З.А., Хуррамова М.Ж. О нестандартных методах решений некоторых дифференциальных уравнений	230

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Д.К. ДУРДИЕВУ – 60 ЛЕТ

10 октября 2025 года исполняется 60 лет известному математику, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему Бухарским отделением института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, профессору Бухарского государственного университета Дурдимуроду Каландаровичу Дурдиеву.

Его родители - Дурдиев Каландар и Дурдиева Пулатгул - были тружениками колхоза имени Навои Алатского района Бухарской области. Они воспитали своего сына трудолюбивым, целеустремлённым и исключительно порядочным человеком.

В 1972 году Дурдимурод Каландарович пошёл в первый класс средней школы №12 имени Фурката Алатского района. Учёба в 9-10 классах, по его признанию, стала поворотным моментом в его профессиональной жизни: именно тогда в его жизни открылся "мир увлечённости наукой". Учителя математики Ёшузак Тухтаев и физики Чори Очилов, а также их коллеги сыграли важную роль в формировании в школе атмосферы дружеской конкуренции. Благодаря этому у обычных, в целом, подростков успешно развивались интерес к науке, стремление к познанию нового и навыки самостоятельного, творческого мышления. Интерес к математике и физике, возникший ещё в школьные годы, впоследствии привёл его к научной деятельности в сфере высшей математики.

В 1982 году, окончив школу с золотой медалью, Д.К. Дурдиев поступил на отделение прикладной математики факультета прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета (ныне - Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека). "Учёба в университете стала для меня своего рода продолжением школы - только на новом, более высоком уровне, - вспоминал будущий учёный. - С одной стороны - высококлассные, требовательные преподаватели, с другой - целеустремлённые, ориентированные на учёбу студенты".

После службы в армии в 1983-1985 годах он продолжил учёбу в том же университете. В 1986 году Д.К. Дурдиев перевёлся на механико-математический



факультет Новосибирского государственного университета. С теплотой и благодарностью Дурдимурод Каландарович вспоминает, как в этом университете вели занятия выдающиеся математики и талантливые педагоги: М.М. Лаврентьев, С.К. Годунов, В.Г. Романов, Б.Н. Врагов, А.Б. Кажихов, Г.В. Демиденко, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин и другие. Особенно он отмечает великолепные спецкурсы, "в которых обучали самым современным методам теории некорректных и обратных задач для дифференциальных уравнений которые читали М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин.

Студенческая, как и школьная, жизнь проявила лучшие черты характера Д.К. Дурдиева - гармоничное сочетание отличной учёбы, помощи однокурсникам, активной исследовательской работы и яркой гражданской позиции. Особенно выделялись его организаторские способности: три года подряд - в 1987, 1988 и 1989 годах - он был командиром студенческого строительного отряда "Лучо" при Новосибирском государственном университете. Под его руководством отряд, сформированный из студентов университета, в летние каникулы участвовал в строительных работах в Якутии, на Дальнем Севере России. Д.К. Дурдиев окончил Новосибирский государственный университет в 1990 году. В том же году он успешно сдал вступительные экзамены и был принят в аспирантуру при этом университете. Свою научную деятельность будущий учёный начал ещё в студенческие годы, занимаясь исследованиями под руководством выдающегося математика, лауреата Государственных премий, члена-корреспондента РАН (впоследствии академика), профессора В.Г. Романова. Ранние научные работы Д.К. Дурдиева были посвящены обратным задачам для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа - одному из новых направлений в теории обратных задач для уравнений математической физики. В 1992 году, Д.К. Дурдиев успешно защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения - на тему "Обратные задачи для гиперболических уравнений с памятью" на специализированном совете Новосибирского государственного университета и досрочно окончил аспирантуру.

Он с 1993 года начал работать доцентом кафедры математического анализа Бухарского государственного университета, а затем занял должность заведующего кафедрой математики. Наряду с педагогической и административной деятельностью Д.К. Дурдиев продолжал активную научную работу в Бухарском государственном университете. Результаты своих исследований он обсуждал со своим наставником В.Г. Романовым из института Математики Сибирского отделения РАН, а также с учёными других авторитетных научных учреждений. Его научные изыскания в этот период, являвшиеся продолжением кандидатской диссертации, были посвящены исследованию про-

цессов распространения волн в средах с последствием и изучению свойств этих сред. Если первые работы Д. К. Дурдиева были посвящены изучению задач определения одномерного ядра интегрального оператора, входящего в гиперболическое уравнение с интегральным членом, то впоследствии аналогичные исследования были выполнены для гораздо более сложного случая, когда ядро зависит не только от временной, но и от пространственной переменной. Исследованы задачи об определении нескольких коэффициентов, входящих в различные дифференциальные уравнения. Во всех изучаемых задачах установлены теоремы единственности и оценки устойчивости.

Полученные результаты легли в основу докторской диссертации, успешно защищённой в 2010 году на специализированном учёном совете НИИ Математики и Информационных технологий АН РУз под председательством академика Ш.А. Аюпова по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения. Тема диссертации - "Обратные задачи для сред с последствием". Результаты диссертационной работы были также опубликованы в одноимённой монографии Д.К. Дурдиева, изданной в 2014 издательством "Турон-Икбал" в Ташкенте.

С 2012 года он совместно со своей ученицей из России Ж.Д. Тотиевой начал проводить исследования в области прямых и обратных задач для системы уравнений вязкоупругости, основанных на модели Больцмана. Основной особенностью работ в этом направлении стало систематическое использование локализованных в точке или на границе источников, инициирующих процесс распространения волн. С одной стороны, это повышало прикладную значимость рассматриваемых задач, а с другой - позволило говорить о формировании нового научного направления в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Результаты этих исследований были представлены в международной монографии Д.К. Дурдиева и Ж.Д. Тотиевой *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations*, опубликованной издательством *Springer* в 2023 году. Кроме того, совместно со своим учеником Ж.Ш. Сафаровым он провёл исследования по обратным задачам определения сверточного ядра для более общих интегро-дифференциальных уравнений, важной особенностью которых является наличие в принципиальной части уравнения общего гиперболического оператора второго порядка. Рассматривались случаи, в которых прямая задача формулировалась как задача Коши, так и как начальная-краевая задача.

Уравнения, изучаемые в данном направлении, тесно связаны с дробными диффузионно-волновыми уравнениями. Д.К. Дурдиев, опираясь на известную формулу Хилле-Тамаркина-Джрбашяна, доказал, что если ядро в инте-

гралах интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности и волновых уравнений выбрать в специальной форме через функции Миттага-Леффлера, то такие уравнения оказываются эквивалентны дробным диффузионно-волновым уравнениям с производной Герасимова-Капуто по времени.

С 2021 года Д.К. Дурдиев совместно со своими учениками активно занимается обратными задачами для дифференциальных уравнений с дробными производными, преимущественно для дробных диффузионно-волновых уравнений. Им были адаптированы методы исследования обратных задач, применявшиеся ранее для классических уравнений диффузии и колебаний, к более сложному случаю - уравнениям с дробными производными различных типов. В результате были получены новые теоремы существования и единственности решений, а также оценки устойчивости. Результаты проведённого цикла исследований нашли отражение в монографии: *D.K. Durdiev, Inverse Problems for Fractional Diffusion Equations, Springer, Singapore, 2025.*

Д.К. Дурдиев исследовал ряд обратных задач, связанных с определением неизвестных коэффициентов при младшем члене в уравнениях смешанного парабола-гиперболического типа с характеристическими и нехарактеристическими линиями изменения типа. Им доказаны новые теоремы о корректности таких задач в смысле Адамара при различных условиях переопределения.

Он активно занимается научным руководством студентов, бакалавров, магистрантов, соискателей степени PhD, а также докторантов, тем самым сформировав крепкую научную школу. Под его руководством успешно защитили свои диссертации одиннадцать кандидатов (PhD) и три доктора наук. Многие из его учеников - докторанты, магистранты и специалисты - в настоящее время являются преподавателями различных вузов Узбекистана и России. Они в полной мере следуют основным принципам своего наставника: высокой требовательности к себе и своим ученикам, преданности делу, добросовестности, самоотдаче и высокому профессионализму.

Д.К. Дурдиев с 2020 года возглавляет Бухарское отделение Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан. За более чем 30 лет активной научной деятельности он опубликовал свыше 200 научных работ, большая часть которых вышла в высокорейтинговых международных журналах, таких как *Physica D, Fractional Calculus and Applied Analysis, Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Дифференциальные уравнения и др. Он входит в состав редакционных коллегий журналов *SOCAR Proceedings, Uzbek Mathematical Journal, Вестник Полоцкого государственного университета*, а также ряда научных изданий Бухарского государственного университета.

Педагогическая карьера Д.К. Дурдиева началась 5 января 1993 года, когда его пригласили преподавателем на кафедру "Математический анализ" Бухарского государственного университета. За 32 года работы он прошёл путь от ассистента до профессора, занимал должности заведующего кафедрой, декана физико-математического факультета и факультета экономики, а также проректора по учебной работе БухГУ. В 2019 году была издана книга Д.К. Дурдиева "Уравнения в частных производных рекомендованная Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов бакалавриата по направлениям "Математика" и "Прикладная математика и информатика" университетов. Кроме того, он является автором нескольких учебных и учебно-методических пособий по дифференциальным уравнениям, предназначенных для студентов бакалавриата и магистратуры. В настоящее время он продолжает педагогическую деятельность в Бухарском государственном университете, являясь профессором кафедры дифференциальных уравнений.

Всегда рядом с Дурдимуродом Каландаровичем находятся самые близкие ему люди, полностью разделяющие его научные интересы и гражданскую позицию (жена Маралджан Кадилова - доцент кафедры зелёной экономики Бухарского государственного университета; сын Умиджан Дурдиев - заведующий кафедрой дифференциальных уравнений того же университета; сын Дилшод Дурдиев - постдокторант-исследователь в Дармштадтском университете Германии; дочь Дилноза Дурдиева - магистрантка Узбекского государственного университета мировых языков; дочь Дурдона Дурдиева - ученица частной Кембриджской школы в Бухаре). Д.К. Дурдиев - известный учёный, талантливый педагог, требовательный руководитель и мудрый наставник. В беседе с ним всегда ощущается постоянный поток новых научных идей и свежих мыслей. В эти дни он отмечает свой 60-летний юбилей.

От всей души поздравляем Дурдимуроода Каландаровича и желаем ему крепкого здоровья, радости в жизни, новых творческих успехов и благодарных учеников!

Сафаров Ж.Ш., Тотиева Ж.Д., Бозоров З.Р., Меражова Ш.Б., Алимов Х.Н., Нуриддинов Ж.З., Рахмонов А.А., Жумаев Ж.Ж., Турдиев Х.Х., Дурдиев У.Д., Холиков С.Х., Болтаев А.А., Атоев Д.Д.!

**СЕКЦИЯ 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
SECTION 5. MATHEMATICAL MODELING AND
COMPUTATIONAL METHODS**

**Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in
space $K_{2,\omega}(P_4)$**

Akhmadaliev G.N.

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
ahmadaliyev78@mail.ru

In the present work we use the methods of functional analysis to get a new numerical integration formulas of high accuracy.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\varphi(x_{\beta}) \tag{1}$$

with the error functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\delta(x - x_{\beta}) \tag{2}$$

where C_{β} are the coefficients and x_{β} are the nodes of formula (1), $x_{\beta} \in [0, 1]$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0, 1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function, function $f(x)$ belongs to Hilbert space $K_{2,\omega}(P_4)$. The norm of functions in this space is defined by the following equality

$$\|\varphi(x)|K_{2,\omega}(P_4)| = \left\{ \int_0^1 \left(\varphi^{(4)}(x) - \omega^2\varphi^{(2)}(x) \right)^2 dx \right\}^{1/2}, \text{ where } \omega \neq 0. \tag{3}$$

The error of the quadrature formula (1) is the difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\varphi(x_{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx. \tag{4}$$

The error of the formula (1) is a linear functional in $K_{2,\omega}(P_4)$, where $K_{2,\omega}(P_4)$ is the conjugate space to the space $K_{2,\omega}(P_4)$:

By the Cauchy-Schwartz inequality

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|f|_{K_{2,\omega}(P_4)}\| \cdot \|\ell|_{K_{2,\omega}(P_4)}\|$$

the error (4) of formula (1) is estimated with the help of the norm

$$\|\ell|_{K_{2,\omega}(P_4)}\| = \sup_{\|\varphi|_{K_{2,\omega}(P_4)}\|=1} |(\ell, \varphi)|.$$

of the error functional (2). Consequently, estimation of the error of the quadrature formula (1) on functions of the space $K_{2,\omega}(P_4)$ is reduced to finding the norm of the error functional ℓ in the conjugate space $K_{2,\omega}(P_4)$.

The main aim of the present paper is to solve the Sard problem in the space $K_{2,\omega}(P_4)$ using S.L.Sobolev's method for any number $N + 1$ of the nodes x_β , i.e. finding the coefficients C_β satisfying the following equality

$$\|\dot{\ell}|_{K_{2,\omega}(P_4)}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|_{K_{2,\omega}(P_4)}\|. \quad (5)$$

Thus, in order to construct the optimal quadrature formula in the sense of Sard in the space $K_{2,\omega}(P_4)$ we need consequently to solve the following problems.

Problem 1. *Find the norm of the error functional ℓ of quadrature formulas (1) in the space $K_{2,\omega}(P_4)$.*

Problem 2. *Find the coefficients C_β which satisfy equality (5) when the nodes x_β are fixed.*

In the present paper we have solved Problem 1 and 2.

We have found the explicit form of the optimal coefficient, Furthermore, using the optimal coefficients we have calculated the norm of the error functional for optimal quadrat formula.

LITERATURE

1. Sobolev S.L. *Introduction to the theory of cubature formulas*, Nauka, Moscow, 1974, 808 pages. (in Russian)

About an optimal approximate solution for the Hadamard type singular integral equation of first kind

Akhmedov D. M.^{1,2}

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

²Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: axmedovdilshod@mail.ru

Hypersingular integral equations are a type of integral equation where the kernel the function inside the integral is highly "singular," meaning it has an infinitely large value at a certain point. This singularity is of a higher order than what's found in more common singular integral equations. These equations are a powerful tool for analyzing complex, three-dimensional problems in various fields, including:

Aerodynamics and Fluid Dynamics: Studying how air and fluids move around objects; Elasticity: Analyzing how materials deform under stress; Wave Theory: Understanding the diffraction of electromagnetic and acoustic waves; Ecology: Modeling certain environmental systems;

Often, hypersingular integral equations are derived from Neumann boundary value problems. These are mathematical problems for equations like the Laplace or Helmholtz equations, where you're given the values of the function's derivative on the boundary of a region, not the function's value itself. The process of converting these boundary value problems into integral equations involves using a concept called the double-layer potential.

We consider the following hypersingular integral equation first kind

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-t)^2} dx = \varphi(t), \tag{1}$$

here the functions $g(x)$ and $\varphi(x)$ satisfy the Hölder condition (or belongs to the class H), $-1 < t < 1$. We integrate the left side of the integral equation (1) by parts and obtain the following

$$\frac{g(-1)}{-1-t} + \frac{g(1)}{1-t} + \int_{-1}^1 \frac{g'(x)}{(x-t)} dx = \varphi(t), \tag{2}$$

For integral equation (1) or (2) to have a unique solution in the given class, the value of the function $g(x)$ at the boundaries of the segment must be equal to zero, i.e.:

$$g(1) = g(-1) = 0,$$

or

$$\int_{-1}^1 g'(x) dx = 0. \tag{3}$$

We introduce denotation $g'(x) = \rho(x)$, and get

$$\int_{-1}^1 \frac{\rho(x)}{x-t} dx = \varphi(t), \quad -1 < t < 1. \quad (3)$$

The unique exact analytical solution of the integral equation (4) that satisfies condition (4) is equal to the following [1]

$$\rho(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} \varphi(x)}{x-t} dx. \quad (5)$$

In the present paper, we construct an optimal quadrature formula in the space $L_2^{(1)}(-1, 1)$ for the approximate calculation form (5). We consider the following quadrature formula

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} \varphi(x)}{x-t} dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi(x_\beta), \quad -1 < t < 1, \quad (6)$$

in the Sobolev space $L_2^{(1)}(-1, 1)$. This space is a Hilbert space of classes of all real valued functions φ defined in the interval $[-1, 1]$ that differ by a polynomial of degree first and square integrable with derivative of order two. Here $C[\beta]$ are the coefficients, $x_\beta = h\beta - 1$ are the nodes of the quadrature formula, N is a natural number, $h = \frac{2}{N}$.

For the optimal coefficients of the quadrature formula form (6) for the high-precision approximate calculation of the analytical solution (5) of the integral equation form (1), the following theorem holds true.

Theorem. Coefficients of the optimal quadrature formulas (6), with equally spaced nodes in the space $L_2^{(1)}(-1, 1)$, have the following form

$$\begin{aligned} C[0] &= h^{-1} \left[f_1(h) + \frac{\pi}{4} (2t^2 + 2t - 1) - \frac{h}{2} \pi t \right], \\ C[\beta] &= h^{-1} \left[f_1(h\beta - h) - 2f_1(h\beta) + f_1(h\beta + h) \right], \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ C[N] &= h^{-1} \left[f_1(1-h) - \frac{\pi}{4} (2t^2 - 2t - 1) - \frac{h}{2} \pi t \right], \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} f_1(h\beta) &= \left(\frac{h\beta - 1}{2} - t \right) \sqrt{1 - (h\beta - 1)^2} \\ &+ \left(t^2 - t(h\beta - 1) - \frac{1}{2} \right) \arcsin(h\beta - 1) \end{aligned}$$

$$+(t - (h\beta - 1))\sqrt{1 - t^2} \ln \left| \frac{1 - t(h\beta - 1) + \sqrt{(1 - t^2)(1 - (h\beta - 1)^2)}}{h\beta - 1 - t} \right|.$$

REFERENCES

1. I.K. Lifanov, *Hypersingular integral equations and their applications*, Chapman and Hall, 2004.

An optimal quadrature formula for the approximation of cauchy-type integrals with high oscillation

Akhmedov D. M.^{1,2}, Buvashero D. S.^{1,3}

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

²Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;

³Tashkent State Technical University named after Islam Karimov, Tashkent, Uzbekistan;

dilshodbuvashero@gmail.com

The rapid and accurate evaluation of oscillatory integrals is one of the major issues arising in many fields, especially in the computational electromagnetics, optics, and quantum mechanics. Evaluation of Cauchy-type singular integrals with oscillatory kernels is particularly challenging due to singularity and rapid oscillation. Standard quadrature formulas fail to achieve satisfactory accuracy and stability in such cases. The construction of optimal quadrature formulas for singular integrals with high oscillations has been considered in [1,2].

In the present work, we investigate the construction of optimal quadrature formula for these type of integrals.

We consider a quadrature formula

$$\int_0^1 \frac{e^{2\pi i \omega x} \varphi(x)}{x - t} dx \cong \sum_{\beta=0}^N A_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

with error functional

$$R_N(x) = \frac{\varepsilon_{[0,1]}(x) e^{2\pi i \omega x}}{x - t} - \sum_{\beta=0}^N A_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

where A_β are coefficients of the quadrature formula, the quadrature nodes are defined by $x_\beta = h\beta$, $\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, and $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(0, 1)$. $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ denotes the indicator function of the interval $[0, 1]$, and $\delta(x)$ is the Dirac delta-function.

The square of the norm of the error functional (2) is expressed as

$$\begin{aligned} \|R_N\|_{L_{0,1}^{(1)*}}^2 = & - \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi\omega(x-y))|x-y|}{2(x-t)(y-t)} dx dy \right. \\ & - \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 \frac{A_\beta^R \cos(2\pi\omega x) + A_\beta^I \sin(2\pi\omega x)}{(y-t)} |y-h\beta| dy \\ & \left. + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (A_\beta^R A_\gamma^R + A_\beta^I A_\gamma^I) \frac{|h\beta-h\gamma|}{2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

where $A_\beta = A_\beta^R + iA_\beta^I$.

Minimizing the error functional norm (3) by Lagrange multipliers' method, we obtain the following system

$$\begin{cases} \sum_{\gamma=0}^N A_\gamma \frac{|h\beta-h\gamma|}{2} + \lambda = f_\omega(h\beta), & \beta = 0, 1, \dots, N \\ \sum_{\gamma=0}^N A_\gamma = g_\omega, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} g_\omega = e^{2\pi i\omega t} \left[\ln \frac{1-t}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i\omega)^n ((1-t)^n - (-t)^n)}{n n!} \right], \\ f_\omega(h\beta) = \frac{e^{2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega h\beta} + 1}{2\pi i\omega} + e^{2\pi i\omega t} (t-h\beta) \left[\ln \frac{t(1-t)}{(h\beta-t)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i\omega)^n}{n n!} ((1-t)^n + (-t)^n - 2(h\beta-t)^n) \right]. \end{cases}$$

The solution of the system determines the optimal coefficients A_β , $\beta = \overline{0, N}$, of the quadrature formula (1) that minimizes the error in the Sobolev space $L_2^{(1)}(0, 1)$.

The following result for the coefficients is obtained by applying the Sobolev method to the corresponding.

Theorem 1. *The coefficients A_β of quadrature formula (1) determined by the following expression:*

$$A_\beta = \begin{cases} h^{-1} \left(\frac{h}{2} g_\omega + f_\omega(h) - f_\omega(0) \right), & \beta = 0 \\ h^{-1} (f_\omega(h(\beta-1)) - 2f_\omega(h\beta) + f_\omega(h(\beta+1))), & 1 \leq \beta \leq N-1 \\ h^{-1} (f_\omega(h(N-1)) - f_\omega(hN) + \frac{h}{2} g_\omega), & \beta = N. \end{cases}$$

REFERENCES

1. Jianbing Li , Xuesong Wang, Tao Wang, Evaluation of Cauchy principal value integrals of oscillatory kind. // *Applied Mathematics and Computation*. 2010. Vol. 1, No. 4. P. 65–74.
2. Akhmedov D. M., Buvasherov D. S., An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space. // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2025. No. 4(68). P. 65–74.

Davriy funksiyalar fazosida xatolik funksionali

Azamov S.S., Bekmurodova D.B.

Toshkent Davlat Transport Universiteti doktoranti, Toshkent, O‘zbekiston;
 azamovss2018@gmail.com, bekmurodovadilorom50@gmail.com

Texnikada uchraydigan ko‘plab jarayonlarni matematik modellashtirish natijasida aniq integrallarni hisoblash masalasi yuzaga keladi. Bunday integrallarni analitik usullar yordamida yechish ko‘pincha murakkab yoki imkonsiz bo‘ladi. Shu sababli, aniq integrallarni taqribiy usullar yordamida hisoblashga ehtiyoj tug‘iladi. Ushbu ishda davriy funksiyalarning ma’lum bir sinfi uchun aniq integrallarni taqribiy hisoblashga bag‘ishlangan.

Bu ishda $\widetilde{S}_2(P_m)$ Gilbert fazosida, variatsion usul yordamida xatolik funksionalini minimallashtiruvchi ekstremal funksiya yordamida normani aniqlash masalasi ko‘rib chiqiladi.

Biz quyidagi kvadratur formulaga qaraymiz.

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk) \tag{1}$$

bunda $h = \frac{1}{N}$, C_k - kvadratur formulaning koeffitsiyentlari, va $\varphi(x) \in \widetilde{S}_2(P_m)$. $\widetilde{S}_2(P_m)$ fazoga tegishli funksiyaning normasi

$$\|\varphi|_{\widetilde{S}_2(P_m)}\| = \left[\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \tau \varphi^{(m-1)}(x) + \sigma \varphi^{(m-2)}(x) \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

ko‘rinishda.

Bunda $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$. (1)- kvadratur formulaning xatoligi

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk) \tag{3}$$

ℓ xatolik funksionalining ko'rinishi quyidagicha:

$$\ell(x) = \left(e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk) \right) * \phi_0(x), \quad (4)$$

$\varepsilon_{(0,1]}(x)$ esa $(0, 1]$ intervalning xarakteristik funksiyasi, δ -esa Dirakning delta funksiyasi,

$$\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta), \quad * - \text{o'rama amali.}$$

(1)- kvadratur formula xatoligining absolyut qiymati Koshi-Shvars tengsizligi bilan quyidagicha baholanadi

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}} \|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)}^*}$$

$\widetilde{S_2(P_m)}^*$ fazo $\widetilde{S_2(P_m)}$ fazoga qo'shma fazo.

Gilbert fazolarida chiziqli va uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasidan foydalanib (3) - funksionalga mos ψ_ℓ ekstremal funksiyani aniqlaymiz[1].

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{\widetilde{S_2(P_m)}} \quad (5)$$

va

$$\|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)}^*} = \|\psi_\ell(x)\|_{\widetilde{S_2(P_m)}} \quad (6)$$

$\widetilde{S_2(P_m)}$ fazoga tegishli $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi quyidagi

$$(\varphi, \psi)_\ell = \int_0^1 (\varphi''(x) + \tau\varphi'(x) + \sigma\varphi(x))(\psi''(x) + \tau\psi'(x) + \sigma\psi(x))dx \quad (7)$$

kabi aniqlanadi.

Furye koeffitsientlarini aniq va ishonchli sonli hisoblash uchun funksional yondashuv asosida optimal kvadratur formulasini qurish uchun avvalo, xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi topiladi. Ekstremal funfsiyadan foydalanib xatolik funksionali normasining umumiy ko'rinishi aniqlanadi.

ADABIYOTLAR

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных форма *М.: Наука, 1974, 808.*

UDK 519.652

The method of the optimal quadrature formula with derivative for the approximate calculation of weakly singular integrals

Babaev S.S.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
 bssamandar@gmail.com, samandar.babayev@tiu.uz

In this work, the problem of constructing the optimal quadrature formulas with multiple nodes, which include derivatives of higher order in the sense of Sard is discussed for the numerical integration of weighted integrals in the Hilbert space of real-valued functions. A sequential optimisation method is used to construct the optimal quadrature formula in this work.

We consider a quadrature formula of the following form:

$$\int_t^1 \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-2} C_{\beta,\alpha}^{(L)} \varphi^{(\alpha)}(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,m-1}^{(W)} \varphi^{(m-1)}(x_\beta), \quad (1)$$

where, x_β are nodes of quadrature formula (1) and function φ belongs to the linear space $W_2^{(m,m-1)}(t, 1)$ which is defined as

$$W_2^{(m,m-1)}(t, 1) = \{ \varphi : [t, 1] \rightarrow \mathbb{R} | \varphi^{(m-1)} \text{ is abs. cont, and } \varphi^{(m)} \in L_2(t, 1) \}.$$

Here, $C_{\beta,\alpha}^{(L)}$ are known coefficients of the optimal quadrature formula in $L_2^{(m)}(t, 1)$ space for $\alpha = \overline{0, m-2}$, $C_{\beta,m-1}^{(W)}$ are unknown coefficients of the quadrature formula (1).

To do this, first, a derivative quadrature formula was built in the $L_2^{(m)}$ space by the method of successive optimization (such as [1]). First, the optimal quadrature formula exact for a constant function is constructed. Then, for the case $m = 2$, an optimal quadrature formula is constructed that is exact for functions 1 and x . In this way, in the quadrature formula, the coefficients of the highest order derivative are the unknown part, and the coefficients of the lower order derivatives are the coefficients of the lower order quadrature formula. Thus, we examine the construction of an optimal quadrature formula of the following form, which is exact for the exponential function e^x and any polynomial of degree $\leq m - 2$ (for instance see, [2]).

Initially, the norm of the error functional is found using the extremal function of the error functional of the quadrature formula. Since the error functional is

defined on the Hilbert space, the quadrature formula that we are constructing is exact for the zero element of the space, that is, we have the conditions that the influence of the error functional on these functions is equal to zero. Then, the Lagrange function is constructed to find the conditional extremum of the error functional norm. Thereby, a system of linear equations is obtained for the coefficients of the optimal quadrature formula. Then, we solve this system of linear algebraic equations using the Sobolev method and obtain an analytical expression for the coefficients of the optimal quadrature formula.

In the numerical results, an algorithm for solving integral equations using the quadrature formula is given, and several integral equations are solved based on this algorithm and their errors are evaluated.

References

1. Shadimetov Kh.M. A method of construction of weight optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space. Uzbek Mathematical Journal, No. 3, 2018, Pp. 140–146.

2. Hayotov A.R. and Babaev S.S. An optimal quadrature formula with derivative for weakly singular integrals. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025,
<https://doi.org/10.1002/mma.70034>.

Spline-based modeling of hydrogeological data at unequal intervals

Bakhramov S.A.¹, Abdullaev B.D.², Abduganiev M.M.³, Qobilov S.Sh.⁴

¹ The National University of Uzbekistan, Department of Computing Mathematics and Information Systems, Tashkent, Uzbekistan;
baxramovsayfiddin@gmail.com

² Institute of Hydrogeology and Engineering Geology State Establishment, laboratory of Groundwater monitoring and regional studies, Tashkent, Uzbekistan;
botir@mail.ru

³ Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Department of Artificial intelligence, Tashkent, Uzbekistan;
mr_muhriddin_20@mail.ru

⁴ Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Department of Artificial intelligence, Tashkent, Uzbekistan;
qobilov.sirojiddin92@gmail.com

Groundwater plays a crucial role in drinking, agriculture, and industry and thus proper evaluation of the reserves and seasonal variation is imperative. But

the inequalities of data distribution and technological constraints decrease the degree of prediction. Kriging and IDW techniques are common GIS techniques that cause serious irregular network errors. This paper uses a node independent spline model to predict groundwater levels indicating it is more accurate and reliable than Kriging.

Accurate groundwater forecasting and monitoring are essential for drinking, agriculture, and industry, yet traditional GIS methods like Kriging and IDW often lose precision and produce significant errors in sparse or irregular networks, whereas the node-independent spline model reconstructs smooth, continuous surfaces with high accuracy. This study applies the spline model to estimate groundwater levels and compares it with Kriging, demonstrating superior accuracy, efficiency, and reliability for improving groundwater monitoring and management.

This study employs Kriging, Inverse Distance Weighting (IDW), and a node-independent bicubic spline model to interpolate and model groundwater hydrogeological data. Each method has its own principles, advantages, and limitations, and their results were comparatively analyzed. The study also develops a bicubic spline interpolation model within spline theory, focusing on cases independent of node points, where equidistant node spacing and strict interpolation conditions are not required.

The bicubic spline is derived from a local cubic spline, enabling smooth and accurate reconstruction of hydrogeological data measured at irregularly spaced networks. The spline function $S_i(x)$ under consideration satisfies the following properties:

$$S_i(x) \in C^2[x_i, x_M], \quad S_i(x) > 0, \text{ if } x \in (x_{i-2}, x_{i+2}), \quad S_i(x) \equiv 0, \text{ if } x \notin (x_{i-2}, x_{i+2})$$

Given function values $f_i = f(x_i)$, the spline is expressed as:

$$S_3(x) = \sum_{i=3}^{M-2} f_i S_i(x)$$

Using basis functions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, the local cubic spline becomes:

$$S_3(x) = \varphi_1(t)f_{i-1} + \varphi_2(t)f_i + \varphi_3(t)f_{i+1} + \varphi_4(t)f_{i+2}$$

where $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t = \frac{x-x_i}{h}$, and:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{6}(1-t)^3; & \varphi_2(t) &= \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4); \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{6}(1+3t+3t^2 - 3t^3); & \varphi_4(t) &= \frac{1}{6}t^3 \end{aligned}$$

Extending to two variables, let $f(x_i, y_j) = f_{i,j}$, where $i = 3, \dots, M - 2$, $j = 3, \dots, N - 2$. The bicubic spline approximation is:

$$S(x, y) = \frac{2}{3} \sum_{i=3}^{M-2} \sum_{j=3}^{N-2} f_{ij} S_i(x) S_j(y)$$

The bicubic spline is expressed using tensor products of basic functions with parameters t and u defined similarly for both coordinate directions.

$$\begin{aligned} S(x, y) = & 1/6 (\phi_1(t) [\phi_1(u) f_{i-1,j-1} + \phi_2(u) f_{i-1,j}] + \phi_2(t) [\phi_2(u) f_{i,j-1} + \\ & + \phi_2(u) f_{i,j} + \phi_3(u) f_{i,j+1} + \phi_4(u) f_{i,j+2}] + \phi_3(t) [\phi_1(u) f_{i+1,j-1} + \\ & + \phi_2(u) f_{i+1,j} + \phi_3(u) f_{i+1,j+1} + \phi_4(u) f_{i+1,j+2}] + \phi_4(t) [\phi_1(u) f_{i+2,j-1} + \\ & + \phi_2(u) f_{i+2,j} + \phi_3(u) f_{i+2,j+1} + \phi_4(u) f_{i+2,j+2}]) \end{aligned}$$

where

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3; \\ \varphi_2(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4); \\ \varphi_3(t) = \frac{1}{6}(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3); \\ \varphi_4(t) = \frac{1}{6}t^3. \end{cases}$$

In this study, Spline, IDW, and Kriging models were used to reconstruct hydrogeological data from irregular networks, with the proposed spline model generating a 3D field graph and enabling a comparative analysis of accuracy, efficiency and errors.

Table 1. Analysis of absolute and relative errors of the models

№	Models	Absolute Error, Δ_1	Relative Error, Δ_2
1	Spline	0.4031	0.035072
2	IDW	1.1377	0.119173
3	Kriging	0.9531	0.099833

The results demonstrate the high accuracy and efficiency of the proposed spline model for reconstructing hydrogeological data distributed over irregular intervals. The spline model outperforms traditional interpolation methods, such as Kriging and IDW, particularly in regions with unevenly distributed data.

Conclusion. This research evaluated the effectiveness of the spline, IDW, and Kriging methods of interpolation to reproduce irregular networks of hydrogeological data and established that the spline node-independent method, by replicating smooth and continuous surfaces with greater accuracy and lower error, is considerably more efficient than either the IDW or Kriging methods. The spline technique proves to be a strong and versatile instrument in modeling hydrogeological data with extensive applicability.

LITERATURE

1. Oliver, M. A., Webster, R. A tutorial guide to geostatistics: Computing and modelling variograms and kriging // Catena. 2014. Vol. 113. P. 56–69.
2. Yu Ge, Junjun Shi, Yaohui Li, Jingfang Shen. An Efficient Kriging Modeling Method Based on Multidimensional Scaling for High-Dimensional Problems // Algorithms. 2022. Vol. 15, No. 3.
3. Webster, R., Oliver, M.A. Geostatistics for Environmental Scientists. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.
4. Gundogdu, K.S., Guney, I. Spatial Analyses of Groundwater Levels Using Universal Kriging // Journal of Earth System Science. 2007. Vol. 116. P. 49–55.
5. Bakhromov S. Comparative analysis of methods for approximation of functions by polynomial splines // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781. P. 020069.
6. Zaynidinov H., Nurmurodov J., Qobilov S. Digital Signal and Image Processing Using Neural Networks // Seminar on Information Systems Theory and Practice (ISTP). 2024. P. 3–8.
7. Bakhromov S., Jumaev J., Kobilov S., Tukhtasinov M. Analysis of the construction of local interpolation cubic splines on the basis of detailed data // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781. P. 020077.

Digital processing biomedical signals using local cubic splines

Bakhrarov S.A.¹, Azimov B.R.², Abduganiev M.M.², Qobilov S.Sh.²

¹ The National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

² Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan;

baxramovsayfiddin@gmail.com, bunyodbekazimov11@gmail.com,
mr_muhriddin_20@mail.ru, qobilov.sirojiddin92@gmail.com

Rapid evolution takes place in the field of biomedical signal processing. Regardless of what organism, biosignals are constantly produced. The term biosignal is normally used to describe bio electrical signals though it could also refer to electrical and non-electrical signals. EEG is comparatively different since it captures electrical activity that is initiated on the central nervous system, providing a complimentary view of neuronal activity. Both ECG and EEG, with the support of spectral decomposition, allow extracting clinically significant features.

Among the piecewise polynomial methods, cubic spline functions are considered to be the simplest in construction and have a high degree of smoothness. This, in turn, means that their model is convenient and has a high level of accuracy

in digital signal processing. Below we will consider the construction of the Bezier spline function, which is one of the piecewise polynomial methods:

In the general case, the construction of a Bezier spline function of degree $n = 3$ for the points f_i is given by

$$BS_3(k) = f(k_0)B_{0,3}(k) + f(k_1)B_{1,3}(k) + f(k_2)B_{2,3}(k) + f(k_3)B_{3,3}(k). \quad (1)$$

The Natural spline function is widely used in digital signal processing, and its construction method is presented below

We search for the function $S(k) = S_i(k)$ in the interval $[k_i, k_{i-1}]$ ($i = \overline{1, n-1}$) in the form of a third-degree polynomial (2):

$$NS_3(x) = \sum_{i=0}^N \left(a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \right), \quad i = 0, 1, \dots \quad (2)$$

where $k_{i-1} \leq k \leq k_i, i = 1, 2, \dots, N$, and a_i, b_i, c_i, d_i are the coefficients to be determined.

When constructing a natural spline function, it is necessary to solve the system of equations, and it is solved by the run-in method. Below, we will consider the construction of the local cubic Hermite spline method:

$$S_3(x) = \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)h_i f'_i + \varphi_4(t)h_i f'_{i+1}. \quad (3)$$

Let's consider the reconstruction of the EEG signal presented in the experimental data. We implement it using the natural spline $NS_3(x)$, the Bezier spline $BS_3(x)$ and the locally interpolated cubic Hermite spline $S_3(x)$.

The results show that the Bezier spline does not always pass through the nodal points. The natural spline and the Local Cubic Hermite spline approximate the signal well.

In conclusion, it is worth noting that all organs of our body are controlled by the brain. Digital processing of biomedical EEG signals measured from the brain using the Hermite spline model makes it possible to study not only medical signals, but also arbitrary one-dimensional signals by digitally processing their properties. It is clear that at present this issue is not only a medical problem, but also becomes one of the social tasks.

Yuqimli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish

Barliqbaeva G.B., Xaydarov A.T.

¹Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti magistranti; e-mail: gulayimbakhadirovna0509@gmail.com

²Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti dotsenti

Mazkur ishda yuqumli kasalliklarning populyatsiya bo'yicha tarqalish dinamikasini matematik modellashtirish masalalari tadqiq etilgan. Epidemik jarayonlarning shakllanishi va rivojlanish bosqichlari SIR, SEIR, SIS, SIRS kabi klassik kompartmentli modellar doirasida tahlil qilingan. Kompartmentli modellar infeksiyalarning uzoq muddatli rivojlanishini tavsiflash, shuningdek, turli profilaktik choralar samaradorligini baholash imkonini beradi. Tadqiqot natijalari amaliy epidemiologik strategiyalarni ishlab chiqish uchun ilmiy asos bo'lib xizmat qiladi.

Epidemiya-bu odamlar orasida infeksiyon kasallikning ma'lum bir mintaqada doirasida ommaviy tarqalishi bo'lib, pandemiya esa butun dunyo miqyosida tarqalishi bilan tavsiflanadi. Masalan, COVID-19 pandemiyasi ikki yarim yil davomida 500 milliondan ortiq kishiga yuqib, 6 milliondan ortiq o'lim holatiga sabab bo'ldi. Bu esa epidemiyalarni modellashtirishning dolzarbligini yanada kuchaytirdi.

Infeksiyalar tarqalishini modellashtiruvchi matematik modellar ularning qo'llanilish maqsadiga ko'ra quyidagi toifalarga bo'linadi [1]:

- epidemiyalar o'chog'ini real vaqt rejimida mavjud ma'lumotlar asosida aniqlovchi modellar;
- infeksiyaning tarqalishini bashoratlash uchun mo'ljallangan mashinali o'rganish usullari;
- turli epidemiyaga qarshi choralar sharoitida infeksiyaning tarqalishini tahlil qilish va oldindan aytish uchun mo'ljallangan modellar.

SIR modeli (Susceptible-Infected-Recovered) eng asosiy model bo'lib, populyatsiyani infeksiyaga moyil, infeksiyalangan va sog'aygan guruhlariga ajratadi [2].

SIR modeliga ko'ra, populyatsiya uchta asosiy guruhga ajratiladi:

- S (Susceptible) – infeksiyaga moyil, hali yuqtirmaganlar,
- I (Infected) – infeksiyalangan shaxslar,

- R (Recovered) – sog'aygan yoki vafot etgan.

Vaqt o'tishi bilan quyidagi o'tishlar yuz beradi:

$$S \rightarrow I$$

$$I \rightarrow R$$

Bugungi kunga kelib, SIR modeliga asoslangan turli xil modifikatsiyalangan modellarning butun bir oilasi mavjud bo'lib, ular uchun ochiq kodlar asosida hisoblash paketlari ham ishlab chiqilgan [4].

- SIRS modeli

$$Vospirchimli \rightarrow Yuqtirgan \rightarrow Sog'aygan \rightarrow Yanavospirchimli.$$

Bu model vaqtinchalik immunitet shakllanadigan infeksiyalar dinamikasini tavsiflash uchun qo'llaniladi. Ya'ni, sog'aygan individlar ma'lum vaqt o'tishi bilan yana infeksiyaga moyil holatga qaytadi.

- SEIR modeli

$$Vospirchimli \rightarrow Infeksiyabilankontaktdabo'lganlar(Exposed) \\ \rightarrow Yuqtirgan \rightarrow Sog'aygan.$$

Ushbu model inkubatsiya davriga ega bo'lgan kasalliklar tarqalishini modellashtirishda ishlatiladi. "Exposed" holati \forall individ virus bilan aloqada bo'lgan, ammo hali kasallik alomatlari namoyon bo'lmagan bosqichni bildiradi.

SIRS, SEIR, SIS, MSEIR kabi modifikatsiyalangan modellarda vaqtinchalik immunitet, inkubatsiya davri va tug'ma himoya kabi epidemiologik omillar hisobga olingan. Ushbu modellar yordamida kasalliklarning tarqalish trayektoriyasi va profilaktik choralarining ta'siri o'rganiladi.

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, matematik modellashtirish nafaqat kasalliklarning erta aniqlanishi va prognozlanishini ta'minlaydi, balki qaror qabul qiluvchilarga profilaktika va cheklov choralarini ilmiy asoslangan holda belgilash imkonini ham beradi.

Xulosa qilib aytganda, matematik modellashtirish yuqumli kasalliklar tarqalishini nazariy va amaliy jihatdan chuqur tahlil qilish, prognozlash va samarali qarorlar qabul qilish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. В.А. Акимов, М.В. Бедило, Е.О. Иванова. Математические модели эпидемий и пандемий как источников чрезвычайных ситуаций биологосоциального характера. *Технологии гражданской безопасности*, том 19, 2022, 3 (73).

2. Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Зятыков Н.Ю. и др. Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области, 2020.

3. О.И. Канищева, В.С. Боровков. Математическое моделирование динамики развития инфекционных заболеваний с использованием библиотек Python Numpy и Matplotlib, 2023.

4. N.B. Noll, I. Aksamentov, V. Druelle, A. Badenhorst, B. Ronzani, G. Jefferies, J. Albert, R. Neher. COVID-19 Scenarios: an interactive tool to explore the spread and associated morbidity and mortality of SARS-CoV-2. *medRxiv*, 2020.

Construction of an optimal quadrature formula in the Sobolev space $L_2^{(4)}(a, b)$ using the φ -function method

Berdimuradova U. A.

V.I.Romanovskiy Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan; e-mail:
umidapulato娃27@gmail.com

In this work, we focus on constructing an optimal quadrature formula in the Sobolev space $L_2^{(4)}(a, b)$. The study is carried out using the φ -function method, which provides a systematic approach to determining the coefficients of the quadrature formula. At the first stage, the coefficients are expressed in terms of φ -functions. Then, we obtain the general representation of the φ -function, which allows us to derive explicit forms of the coefficients.

An important feature of this research is that the quadrature nodes can be chosen arbitrarily. Furthermore, the quadrature formula is constructed not only on the basis of the function values but also by including its first, second, and third derivatives at the nodes. Such an extension considerably increases the accuracy and stability of the formula, especially for functions with high smoothness.

The obtained results demonstrate that the proposed approach can serve as an effective tool for numerical integration in applied mathematics and computational problems. In particular, the method can be applied in the numerical solution of differential equations, boundary value problems, and models in physics and economics where both function values and their derivatives are available.

We note that, particular case $m = 2$ optimal quadrature formula have been constructed in the work [1].

REFERENCES

1. Hayotov A.R., Berdimuradova U.A. An optimal quadrature formula with derivatives for arbitrarily fixed nodes in the Sobolev space // *Problems of computational and applied mathematics*. 2025, 2(64), P. 64-73.

An expression for the norm of the interpolation formula in the space

$$L_2^{(m,0)}(0,1)$$

Boltaev A. K.¹, Davronov J. R.², Abdurakhimov D. I.³

¹ Nordic International University, Tashkent, Uzbekistan;

e - mail a.boltayev@nordicuniversity.org

^{2,3} Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;

e - mail javlondavronov77@gmail.com

e - mail dilshodabduraximov5@gmail.com

Let us consider the following interpolation formula:

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x) \varphi(x_\beta). \quad (1)$$

with the error functional

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta). \quad (2)$$

where $C_\beta(x)$ are the coefficients, $x_\beta \in [0, 1]$ are the nodes of formula (1), $\delta(x)$ is the Dirac delta-function, and the function $\varphi(x)$ belongs to the Hilbert space $L_2^{(m,0)}(0,1)$. The norm of functions in this space is defined as follows:

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}(0,1)} = \left[\int_0^1 \left([\varphi^{(m)}(x)]^2 + \varphi^2(x) \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

The *error* of interpolation formula (1) at the point $x = z$ is called the difference

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta) \right) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

The problem of constructing optimal interpolation formulas in the space $L_2^{(m,0)}(0,1)$ is the computation of the following value:

$$\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)*}}}. \quad (5)$$

The error of formula (1) is a linear functional in $L_2^{(m,0)*}(0, 1)$, where $L_2^{(m,0)*}(0, 1)$ is the conjugate space to $L_2^{(m,0)}(0, 1)$.

This problem consists of two parts: first, we must compute the norm $\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}}$ of the error functional ℓ in the space $L_2^{(m,0)*}(0, 1)$, and then minimize it with respect to the coefficients $C_\beta(z)$ and nodes x_β .

Now we turn to solving the first part of this problem, i.e., computing the norm of the error functional ℓ . For this, we use the concept of the extremal function of the error functional ℓ , introduced by S.L. Sobolev [1-3].

A function ψ_ℓ , for which the equality

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\|, \tag{6}$$

holds, is called the extremal function of the error functional ℓ .

Theorem 1. The extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ of the optimal interpolation formula (1) has the form:

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_m(x),$$

where

$$G_m(x) = -\frac{\text{sign}(x)}{2m} \sum_{k=1}^m e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m}} \cos \left(x \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m} + \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right)$$

m is an even natural number.

The proof of the theorem is given in [4]. In addition, the square of the norm of the error functional (2) is computed as follows:

$$\|\ell(x, z)\|_{L_2^{(m,0)*}}^2 = \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z) C_\gamma(z) G_m(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta G_m(z - x_\beta).$$

REFERENCES

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.// М.: Наука. - 1974. - 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы Новосибирск.:// Издательство ИМ СО РАН. - 1996. - 484 с.
3. Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева.// Ташкент.: Издательство "Fan va texnologiya". - 2019. - 224 с.
4. Давронов Ж.Р. Об одной дискретной системе типа Винера-Хопфа// Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022. Но. 5/1(44). -С. 84-92.

Evaluation of definite integrals by spline approximation

Bozarov B.I., Makhmudova N.A.

Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan;

b.bozarov@mail.ru, makhmudovanasiba74@gmail.com

In many practical applications, it is necessary to evaluate the definite integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

A wide range of numerical methods has been developed for this purpose. However, when the function $f(x)$ exhibits strong oscillations on the interval $[a, b]$, the approximation error may increase significantly. To address this issue, the interval is partitioned into a grid

$$\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\},$$

and the integral is expressed as a sum of subintegrals:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

On each subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, the function $f(x)$ is approximated by a cubic polynomial of the form

$$S_3(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Substituting this approximation into the integral yields

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(h_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - h_i^3 \frac{c_i + c_{i+1}}{12} \right),$$

where the unknown coefficients c_i ($i = 1, \dots, n-1$) are determined from the following system of equations:

$$c_0 = 0, \quad h_i c_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3, \quad c_n = 0.$$

Literature

1. R. L. Burden, J. D. Faires. Numerical analysis. Nelson Education, Ninth Edition, Canada, 2016.
2. Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. (2007). Numerical Mathematics (2nd ed.). Springer.

Dynamics of a predator-prey system with consideration of the lower critical density of prey populations and intraspecific competition

Buriyev T.E.¹, Ergashev V.E.², Usmonov F.³

^{1,2,3}Samarqand State University, Samarqand, Uzbekistan
 tolibjonb@yahoo.com, vafokulyusuf@gmail.com,
 usmonovfayziraxmon@gmail.com

The present work is devoted to a qualitative and numerical study of a generalized Lotka-Volterra predator-prey model.

In the classical Volterra model, we additionally introduce intra- and inter-population interaction factors. It is known that taking into account the nonlinearity of reproduction in an isolated population at low density, together with the factor of natural mortality, leads to the effect of a lower critical population density, known as the **Allee effect**. Considering this effect, the equation for the prey population in dimensionless variables takes the following form:

$$\dot{x} = x(x - l)(1 - x) - xy \tag{1}$$

For the predator population, an additional intraspecific competition factor is introduced into the original equation of the classical model. Taking into account the above-mentioned factors, the model is described by a system of two ordinary differential equations depending on four parameters in dimensionless variables:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x - l)(1 - x) - xy \\ \dot{y} = -\gamma y(m - x + \varepsilon y) \end{cases} \tag{2}$$

This system was partially studied for $\varepsilon = 0$ in paper [3] and in the book by A.D.Bazykin[1]. The purpose of the present work is to carry out a complete qualitative study of the system for $\varepsilon \neq 0$. For any values of the parameters, the origin is a singular point of the system, and there exist two singular points on the Ox-axis: $A(l, 0)$ and $B(1, 0)$. In addition, in the parameter space there exists a region whose points correspond to the existence of two nontrivial singular points in the first quadrant of the phase plane: $_1(x_1, y_1)$ and $_2(x_2, y_2)$. The abscissas of the nontrivial singular points are the roots of a quadratic equation.

$$\varepsilon x^2 - (\varepsilon(1 + l) - 1)x + \varepsilon l - m = 0. \tag{3}$$

The existence of a region in the parameter plane $(l, m)(l, m)(l, m)$ corresponding to the simultaneous existence of nontrivial singular points is studied. The nature of the nontrivial singular points and their bifurcations under parameter variations are determined. The bifurcation analysis of the nontrivial singular points has shown that in the system's parameter space there exists a region whose points

correspond to the existence of a limit cycle in the neighborhood of one of the nontrivial singular points. The study of the system has revealed that the model predicts the possibility of four different regimes of system dynamics:

- 1) With low adaptability of the predator to the prey, the predator population always goes extinct;
- 2) With increasing adaptability, stable stationary coexistence of predator and prey becomes possible;
- 3) Coexistence of populations is possible only in an auto-oscillatory regime, with the oscillation amplitude increasing as the predator's adaptability grows;
- 4) If the predator's adaptability is too high, both populations are doomed to extinction under any initial

Literature

1. Bazykin, A.D. *Mathematical Biophysics of Interacting Populations*. Moscow: Nauka, 1986. (in Russian).
2. Bazykin, A.D., Buriyev, T.E. Dynamics of a Predator–Prey System Taking into Account Predator Saturation, Predator Competition for Prey, and Prey Competition. *Studia Biophysica*, 1981, vol. 2, pp. 123–130. (in Russian).
3. Bazykin, A.D., Berezovskaya, F.S. The Allee Effect, the Lower Critical Population Size, and the Dynamics of a Predator–Prey System. In: *Problems of Ecosystem Monitoring and Modeling*. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1979, vol. 2, pp. 161–175. (in Russian).

Calculation of Abel-type singular integrals using cubic splines

Daliyev B.S., Nasriddinov O.U.

Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan;
bahtiyordaliyev@gmail.com, notadavlat@umail.uz

Singular integrals of Abel type frequently arise in mathematical physics, inverse problems, and applied analysis. Their direct evaluation is often complicated by the presence of a weak singularity, which increases the approximation error when standard quadrature rules are applied. To overcome this difficulty, spline-based approximation methods provide an effective tool due to their smoothness and high-order accuracy.

Consider the Abel-type singular integral in the form

$$I(f) = \int_a^b \frac{f(x)}{(x-t)^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in (a, b).$$

The function $f(x)$ is approximated on the interval $[a, b]$ by piecewise cubic splines,

$$S_3(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

where the spline coefficients are determined from interpolation conditions and smoothness constraints. Substituting $S_3(x)$ into the integral reduces the problem to evaluating integrals of cubic polynomials with weak singularities, which can be computed analytically or with high precision numerically.

The spline-based scheme yields improved stability and accuracy compared to classical quadrature methods, especially when the integrand is oscillatory or when t is close to the integration nodes. Numerical experiments confirm that the error decreases rapidly with mesh refinement, demonstrating the efficiency of the proposed approach.

The use of cubic splines for approximating Abel-type singular integrals provides a reliable and accurate computational technique. This method combines the smoothness of spline functions with the ability to handle singular behavior, making it suitable for practical applications in physics and engineering.

LITERATURE

1. R. L. Burden, J. D. Faires. Numerical analysis. Nelson Education, Ninth Edition, Canada, 2016.
2. Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. (2007). Numerical Mathematics (2nd ed.). Springer.

Structure of Fixed Point Cards: From General to Degenerate Cases

Eshmamatova D. B.^{1,2}, Tadzhieva M. A.^{1,2}, Solijanova K. A.¹

¹Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, kamolasolijanova@gmail.com

Lotka–Volterra type operators naturally arise in the study of population dynamics, evolutionary games, and interacting species models. Their discrete versions are closely related to combinatorial structures such as tournaments and skew-symmetric matrices. Understanding the fixed point structure of these operators is important for describing the long-term behavior of the system ([1]-[3]).

In this paper, we investigate the structure of the set of fixed points (called the *fixed point card*) and provide a characterization of fixed points arising from strong and homogeneous tournaments. We focus on the case when the corresponding

skew-symmetric matrix is not in general position, a situation that has received little attention so far. Our results extend the known classification of fixed point cards to degenerate cases, where infinitely many fixed points may appear.

Consider the Lotka–Volterra operator of the following form defined on the 4-dimensional simplex $S^4 \subset \mathbb{R}^5$ (the set of vectors with nonnegative coordinates summing to one):

$$V_1 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 + a_{25}x_5), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x'_5 = x_5(1 - a_{15}x_1 - a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases}$$

In general position, all even-order principal minors of the associated skew-symmetric matrix A_1 are nonzero [4]. These minors are squares of certain expressions, which we denote as:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45} + a_{25}a_{34}, \\ \Delta_2 &= a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34}, \\ \Delta_3 &= a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24} + a_{12}a_{45}, \\ \Delta_4 &= a_{12}a_{35} - a_{15}a_{23} + a_{13}a_{25}, \\ \Delta_5 &= a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}. \end{aligned}$$

We mainly study the situation when the matrix is not in general position, i.e., when at least one of the expressions Δ_i vanishes. In particular, we consider the case when one edge of the fixed point card is unoriented (corresponding to infinitely many fixed points) and analyze the properties of points on that edge. If a homogeneous tournament has four cyclic triples and the associated skew-symmetric matrix is in general position, the fixed point card has $2^4 = 16$ possible forms. However, if the matrix is not in general position, the operator admits infinitely many fixed points.

Theorem. If $\Delta_1 = 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0$, then the fixed point card of the operator V_1 is cyclic and has the following form:

$$M_{135} \rightarrow M_{145} \rightarrow M_{245} \rightarrow M_{235} \rightarrow M_{135}.$$

There are infinitely many fixed points on the edge connecting the fixed points x_{235} and x_{245} . Their general form is:

$$x^* = \left(0, \frac{\Delta_3 a_{35} - \Delta_4 a_{45}}{\Delta_3 \delta_{235} - \Delta_4 \delta_{245}}, \frac{\Delta_3 a_{25}}{\Delta_3 \delta_{235} - \Delta_4 \delta_{245}}, \right)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\Delta_4 a_{25} \\ & \Delta_3 \delta_{235} - \Delta_4 \delta_{245} \end{aligned} \right), \frac{\Delta_3 a_{23} - \Delta_4 a_{24}}{\Delta_3 \delta_{235} - \Delta_4 \delta_{245}} \right),$$

where

$$\delta_{235} = a_{23} + a_{25} + a_{35}, \quad \delta_{245} = a_{24} + a_{25} + a_{45}.$$

Thus, the obtained description shows that degeneracy of the skew-symmetric matrix leads to the appearance of infinitely many fixed points located on certain edges of the simplex. This enriches the known classification of fixed point cards and opens the way for further study of stability and bifurcation phenomena in such systems.

REFERENCES

1. Moon J.W. Topics on Tournaments, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
2. Kasteleyn P.W. Dimer Statistics and Phase Transitions, Journal of Mathematical Physics, 1963, Vol.4, No.2, pp.287–293.
3. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2012.
4. D.B. Eshmatova, M.A. Tadzhieva. Analysis and classification of fixed points of operators on a simplex, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No.2(114), 2024.

The coefficients of the optimal quadrature formula constructed with the φ -function method in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$

Hayotov A.R.¹, Abduaxadov A.A.²

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
hayotov@mail.ru

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan; alibekabduaxadov@gmail.com

In this study, we consider the problem of constructing an optimal quadrature formula of the form

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k} f'(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

which involves both the values of the function and its first derivative at certain nodes $x_k \in [a, b]$. The goal is to determine the coefficients A_{0k}, A_{1k} that minimize the worst-case integration error over the Sobolev-type space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$, equipped with the norm

$$\|f\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \left(\int_a^b (f''(x) + \sigma f'(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

The problem is approached in the sense of Sard optimality, which reduces to minimizing the norm of a linear functional defined by the error of the quadrature formula. By applying the Cauchy-Schwarz inequality, the error functional can be bounded by the product of the norm of the integrand in the given Sobolev space and the L_2 -norm of an auxiliary function $\varphi(x)$ defined by the quadrature coefficients and the form of the formula. Therefore, the optimality problem becomes equivalent to minimizing the quantity

$$F_n(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

subject to the constraint that $\varphi(x)$ satisfies the adjoint condition of the integration operator, derived via Green's formula. Here A_0, A_1 depends on the values of φ at nodes.

To solve this minimization problem, we divide the interval $[a, b]$ into n subintervals and construct piecewise-defined functions $\varphi_k(x)$ on each subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, which solve the differential equation

$$y''(x) - \sigma y'(x) = 1,$$

and determine their coefficients C_k, D_k by minimizing the corresponding functionals

$$\mathcal{F}_k(C_k, D_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x) dx.$$

These lead to explicit expressions for $\varphi_k(x)$ in exponential-polynomial form. Using these expressions, we then compute the optimal coefficients A_{0k} and A_{1k} for the quadrature formula, ensuring that the overall error is minimized.

LITERATURE

1. Ghizzett A. and Ossicini A. Quadrature Formulae. Berlin: Academie Verlag, 1970.
2. Lanzara F. On optimal quadrature formulae // Journal of Ineq. App. 200. Vol. 5, P. 201–225.

The extremal function of the interpolation formula in the space $W_2^{(3,2)}(0, 1)$

Hayotov A. R.¹, Nafasov A. Y.²

^{1,2}V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,;

¹Central Asian University, Tashkent 111221, Uzbekistan;

²Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: ¹hayotov@mail.ru, ²nafasov.azam@list.ru

The extremal function plays a crucial role in the process of constructing optimal interpolation formulas, since it provides a direct link between the error functional and the norm in the Hilbert space. In particular, the extremal function in the space $W_2^{(2,1)}(0, 1)$ was used to compute the norm of the error functional, and based on this norm, a system of equations determining the coefficients of the optimal interpolation formula was derived [1]. Let the space $W_2^{(3,2)}(0, 1)$ be equipped with the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(3)}(x) + \varphi^{(2)}(x)) (\psi^{(3)}(x) + \psi^{(2)}(x)) dx,$$

and corresponding norm

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^1 (\varphi^{(3)}(x) + \varphi^{(2)}(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Consider the interpolation formula of the form

$$P\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,0}(z) \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1}(z) \varphi'(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2}(z) \varphi''(h\beta),$$

where $h = 1/N$. The error functional is then

$$R(\varphi) = \varphi(z) - P\varphi(z).$$

In the space $W_2^{(3,2)}(0, 1)$, the error functional $R(x, z)$ at each fixed point $x = z$ in the interval $[0, 1]$ takes the following form:

$$\begin{aligned} R(x, z) = & \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,0} \delta(x - h\beta) + \\ & + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \delta'(x - h\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \delta''(x - h\beta) \end{aligned} \tag{1}$$

According to the Riesz representation theorem, for each bounded linear functional R on $W_2^{(3,2)}(0,1)$ there exists a unique extremal function $\psi_R \in W_2^{(3,2)}(0,1)$ such that

$$R(\varphi) = \langle \psi_R, \varphi \rangle, \quad \|R\|^2 = \langle \psi_R, \psi_R \rangle.$$

The extremal function can be written as

$$\psi_R(x) = -(R * G_3)(x) + c_1 + c_2x + de^{-x}, \quad (2)$$

where G_3 is the Green's function associated with the differential operator of the space, c_1, c_2 , and d are constants determined by the exactness conditions of the interpolation formula.

Now we compute the convolution in the expression of the extremal function

$$\begin{aligned} (R * G_3)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(y) \cdot G_3(x-y) dy \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x-z)}{2} \cdot \left(\frac{e^{x-z} - e^{-(x-z)}}{2} - (x-z) - \frac{(x-z)^3}{6} \right) \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,0} \frac{\operatorname{sgn}(x-h\beta)}{2} \cdot \left(\frac{e^{x-h\beta} - e^{-(x-h\beta)}}{2} - (x-h\beta) - \frac{(x-h\beta)^3}{6} \right) \\ &\quad + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} \frac{\operatorname{sgn}(x-h\beta)}{2} \cdot \left(\frac{e^{x-h\beta} + e^{-(x-h\beta)}}{2} - 1 - \frac{(x-h\beta)^2}{2} \right) \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} \frac{\operatorname{sgn}(x-h\beta)}{2} \cdot \left(\frac{e^{x-h\beta} - e^{-(x-h\beta)}}{2} - (x-h\beta) \right). \end{aligned}$$

Thus, for the convolution we have

$$\begin{aligned} (R * G_3)(x) &= G_3(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,0} G_3(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} G_3'(x-h\beta) - \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} G_3''(x-h\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

Taking into account (3) the extremal function (2) can be written in the form

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= G_3(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,0} G_3(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,1} G_3'(x-h\beta) \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,2} G_3''(x-h\beta) + c_1 + c_2x + de^{-x}. \end{aligned}$$

The significance of the extremal function is that it allows us to compute the squared norm of the error functional in closed form, reducing the minimization problem to solving a system of linear equations for the coefficients of the interpolation formula [2].

In the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ it provides the exact form of the squared norm of the error functional, thus enabling the determination of optimal coefficients. This approach ensures that the resulting interpolation formulas are of minimal error and can be effectively applied in computational mathematics, approximation theory, and the numerical solution of differential equations.

LITERATURE

1. Hayotov A. R., Nafasov A. Y. On an optimal interpolation formula with derivative in a Hilbert space. // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2025. 3(67): 107-115.
2. Sobolev S. L. On interpolation of functions of n variables, in: Selected works of S.L. Sobolev// *Springer US*. 2006. 451–456.

Kubik splayn yordamida teskari Erdelyi-Kober operatorini taqribiy hisoblash

Islamov E. R.

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona shahar, O'zbekiston;
e.islamov@pf.fdu.uz

Kasr tartibli Erdelyi-Kober integral operatori quyidagi ko'rinishda aniqlanadi [1]:

$$I_{\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} f(t) dt$$

bu yerda $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$.

(1) operator ko'plab murakkab (singulyar koeffisientli) tenglamalarga qo'yilgan masalalarni sodda ko'rinishga keltirib yechishda samarali qo'llaniladi. [2-7] adabiyotlarda Erdelyi-Kober operatorlarini almashtirish operatori xossalari ega ekanligi isbotlangan va ularning masalalarga tadbirlari keltirilgan. [8] adabiyotda Erdelyi-Kober integral operatorini to'rtburchaklar usuli, trapetsiyalar usuli hamda o'rta qiymat usuli bilan yaqinlashtirish keltirib o'tilgan. [9] maqolada esa Erdelyi-Kober operatorini kubik splayn yordamida taqribiy hisoblash usuli bayon etilgan. [10] maqolada singulyar koeffisientli to'lqin tenglamasiga qo'yilgan masalani Erdelyi-Kober operatorini yordamida taqribiy yechish usuli ko'rsatib o'tilgan.

Erdelyi-Kober operatoriga teskari operatorining ko'rinishini quyidagicha bo'ladi

$$(I_{\sigma,\eta}^{\alpha})^{-1} f(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^k x^{\sigma(\eta+k)} I_{\sigma,\eta+\alpha}^{k-\alpha} f(x)$$

bu yerda $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $k = [\alpha] + 1$.

Ko'p hollarda masalalarni yechishda Erdelyi-Kober operatoriga teskari bo'lgan (2) operatorni ham hisoblashga to'g'ri keladi. Boshqa kasr tartibli operatorlar singari bu operatorni ham har doim analitik ko'rinishdagi ifodasini topish qiyin, ba'zida esa buning imkoni bo'lmaydi. Shuning uchun (2) teskari Erdelyi-Kober operatorini yuqori aniqlikda taqribiy hisoblash usullarini topish muhim ahamiyatga ega.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[0, b]$ oraliqni n ta bo'lakka bo'lishdan hosil bo'lgan $w = \{x_i; i = 0, \dots, n; x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ to'rda berilgan bo'lsin.

$y = f(x)$ funksiya $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalar to'plamida bog'langan bo'lakli ko'phadlardan bo'lgan interpolyatsion splayn bilan almashtiriladi [9], va quyidagicha belgilanadi

$$f(x) \cong s(x) = \begin{cases} s_0(x), & \text{agar } x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x), & \text{agar } x \in [x_1, x_2], \\ \dots \\ s_{n-1}(x), & \text{agar } x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

bu yerda $s_i(x) = \sum_{k=0}^3 A_{i,k} x^{3-k}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

(2) teskari Erdelyi-Kober operatoridagi $f(x)$ funksiyani $s(x)$ splayn bilan almashtiramiz

$$(I_{\sigma,\eta}^{\alpha})^{-1} f(x) \cong (I_{\sigma,\eta}^{\alpha})^{-1} s(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^k x^{\sigma(\eta+k)} I_{\sigma,\eta+\alpha}^{k-\alpha} s(x)$$

(4) tenglikning o'ng tomonini soddalashtirib hisoblash natijasida $0 < \alpha < 1$

bo'lgan xol uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} (I_{\sigma, \eta}^{\alpha})^{-1} s(x) \Big|_{x=x_r} &= \sum_{j=0}^3 \frac{\Gamma(\alpha + \eta + (3-j)/\sigma + 1)}{\Gamma(\eta + (3-j)/\sigma + 1)} A_{r-1, j} x_r^{3-j} \\ &+ \begin{cases} 0, \text{ agar } r = 1; \\ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{i=0}^{r-2} (X_{i+1})^{\sigma(\eta+\alpha+1)} \sum_{j=0}^3 \frac{A_{i, j} x_{i+1}^{3-j}}{Q_j} {}_2F_1(Q_j, \alpha + 1; Q_j + 1; X_{i+1}^{\sigma}), \\ \text{ agar } r > 1; \end{cases} \\ &- \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{i=0}^{r-1} (X_i)^{\sigma(\eta+\alpha+1)} \sum_{j=0}^3 \frac{A_{i, j} x_i^{3-j}}{Q_j} {}_2F_1(Q_j, \alpha + 1; Q_j + 1; X_i^{\sigma}), \quad r = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Bu yerda $Q_j = \eta + \alpha + \frac{3-j}{\sigma} + 1$, $X_i = \frac{x_i}{x_r}$. (5) formuladan teskari Erdelyi-Kober operatorini taqribiy hisoblashda foydalanamiz.

Ushbu usulning yaqinlashish xatoligi aniqlandi hamda turg'unlik bahosi olindi. Aniq misollar bilan sonli usul tekshirilib, olingan natijalar grafik va jadvallarda e'lon qilindi.

ADABIYOTLAR

1. Самко С.Г., Килбасс А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Karimov, Shakhobiddin T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order. (2018) Filomat, 32 (3), pp. 873 - 883, DOI: 10.2298/FIL1803873K.
3. Karimov, Sh. T. Method of solving the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator. (2017) Russian Mathematics, 61 (8), pp. 22 - 35, DOI: 10.3103/S1066369X17080035.
4. Sitnik S.M., Karimov S.T. Solution of the Goursat Problem for a Fourth-Order Hyperbolic Equation with Singular Coefficients by the Method of Transmutation Operators. (2023) Mathematics, 11 (4), art. no. 951, DOI: 10.3390/math11040951.
5. Karimov S.T., Shishkina E.L. Some methods of solution to the Cauchy problem for a inhomogeneous equation of hyperbolic type with a Bessel operator. (2019) Journal of Physics: Conference Series, 1203 (1), art. no. 012096, DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012096.
6. Karimov S.T. On One Method for the Solution of an Analog of the Cauchy Problem for a Polycaloric Equation with Singular Bessel Operator. (2018) Ukrainian Mathematical Journal, 69 (10), pp. 1593 - 1606, DOI: 10.1007/s11253-018-1457-4.

7. Urinov A.K., Karimov S.T. On the Cauchy Problem for the Iterated Generalized Two-axially Symmetric Equation of Hyperbolic Type. (2020) Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (1), pp. 102 - 110, DOI: 10.1134/S199508022001014X. ((19639412400).

8. Płociniczak, Ł. and Sobieszek, S. Numerical schemes for integro-differential equations with Erdélyi–Kober fractional operator. Numer Algor 76, 125–150 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11075-016-0247-z>

9. Karimov, S.T., Islamov, E.R. Approximation of the Erdélyi–Kober operator using cubic spline interpolation. Lobachevskii J Math 45, 4534–4547 (2024). <https://doi.org/10.1134/S199508022460523X>

10. E.R.Islamov. Vaqt bo'yicha Bessel operatori qatnashgan chegaraviy masalani taqribiy yechish. Namangan davlat universiteti ilmiy axborotnomasi, [2025-3]. 17-25.

Study of fractional dynamics of heart work within the framework of the Zeeman model

Israyiljanova G. S.¹, Karimov Sh.T.¹, Parovik R.I.²

¹Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
e-mail: gulbaxor19802020@gmail.com

²Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia;
e-mail: parovik@ikir.ru

The following Cauchy problem is investigated [1]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \varepsilon_2 \partial_{0t}^\beta y(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Here $\varepsilon_1 = \varepsilon\theta^{\alpha-1}$, $\varepsilon_2 = \theta^{\beta-1}$, θ is a parameter with the dimension of time. Fractional derivatives of orders $0 < \alpha, \beta < 1$ in (1) are understood in the sense of Gerasimov-Caputo [2,3]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad \partial_{0t}^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}. \quad (2)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Euler gamma function.

The Cauchy problem (1) in the case when $\alpha = 1$ and $\beta = 1$ turns into the well-known Cauchy problem proposed by E. C. Zeeman to describe the dynamic modes of the heart's operation [4].

Using a numerical method based on a nonlocal explicit finite-difference scheme, oscillograms and phase trajectories of the dynamic system (1) were constructed and studied. Using the double recalculation method, it was shown that the numerical method converges to the first order. The numerical algorithm was implemented in the FRACDYNZE computer program developed in the Python programming language.

LITERATURE

1. Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I. Mathematical fractional Zeeman model for describing cardiac contractions // Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2024, Vol. 48. No. 3. P. 83-94. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94>.
2. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20. 790809.
3. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent // Geophys. J. Int. 1967. Vol. 13. P. 529–539.
4. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse // Salvador symposium on Dynamical Systems. 1973. P. 683–741.

Construction of the optimal quadrature formula for the approximate solution of the singular integral equation with a Hilbert kernel in space $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$

Jabborov Kh. Kh.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan;
jabborovx@bk.ru

This work considers the problem of constructing an optimal quadrature formula for the approximate calculation of integral expressions involved in the analytical solution of integral equations, particularly the following singular integral equation with a Hilbert kernel

$$a \cdot g(t) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cot \frac{x-t}{2} dx = \varphi(t). \quad (1)$$

Equation (1) is called a *singular integral equation with a Hilbert kernel*, where $0 < t < 2\pi$, $\varphi(t)$ is a given function and $g(t)$ is the unknown function. $\varphi(t)$ is a sufficiently smooth function. The solution of equation (1) is as follows [1]:

$$g(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \varphi(t) - \frac{b}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx + \frac{b^2}{2\pi a(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx. \quad (2)$$

It is known that the definite integral in expression (2) cannot always be calculated exactly. Below, we will address the problem of constructing an optimal quadrature formula for the approximate calculation of this integral. Let us consider the following quadrature formula

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta), \quad (3)$$

where $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 < t < 2\pi$, C_β are the coefficients of the quadrature formula (3), x_β are the nodes and N is a natural number.

In this case, $\varphi(x)$ the function $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ is an element of the space, which is defined as follows

$$L_2^{(2)}(0, 2\pi) = \{\varphi(x) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi'(x) - \text{abs.cont}, \varphi''(x) \in L_2(0, 2\pi)\}.$$

For the functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ of the $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ space, the scalar product is introduced as follows:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi''(x) \psi''(x) dx. \quad (4)$$

Also, in this space, the norm corresponding to the scalar product (4) is defined as follows

$$\|\varphi\|_{L_2^{(2)}(0, 2\pi)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\varphi''(x))^2 dx}.$$

The difference between the definite integral and the quadrature sum

$$(\ell, \varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta) \quad (5)$$

is called the *error of the quadrature formula*.

The

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0, 2\pi]}(x) \cot \frac{x-t}{2} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta).$$

the *error functional* corresponds to the form. Here, $\varepsilon_{[0,2\pi]}(x)$ is the characteristic function of the segment $[0, 2\pi]$ and $\delta(x)$ is the Dirac delta-function.

Using the above data, as well as concepts such as the definition of the norm of a linear functional, the Cauchy-Schwarz inequality, the definition of an extremal function, and the Riesz theorem, we obtain the following result for the upper bound of the error (5).

Theorem. The square of the norm of the error function $\ell(x)$ in the $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ space is

$$\begin{aligned} \|\ell\|^2 = & \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_2(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^{2\pi} G_2(x - x_\beta) \cot \frac{x-t}{2} dx + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_2(x-y) \cot \frac{x-t}{2} \cot \frac{y-t}{2} dx dy. \end{aligned}$$

It will be in the form $G_2(x)$ -Green's function and $G_2(x) = \frac{|x|^3}{12}$.

It should be noted that a quadrature formula of the form (3) with coefficients that give the minimum value to the norm of this error functional is called an *optimal quadrature formula*[2]. In our future work, we will focus on finding the coefficients of optimal quadrature formulas of the form (3).

REFERENCES

1. Mikhlin S. G. *Integral equations and their applications to some problems of mechanics, mathematical physics, and engineering*. Moscow. 1949.
2. Kh.M. Shadimetov, A.R. Khayotov. *Optimal approximation of the error functionals of quadrature and interpolation formulas in the spaces of differentiable functions*. Monograph. Tashkent, 2022.

An affective quadrature formula in the Hilbert space

Khayriev U. N.^{1,2,3}, Hamroeva Z. A.²

¹Cyber University of Uzbekistan, Nurafshon, Uzbekistan

e-mail: khayrievu@gmail.com

²Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;

e-mail: u.n.xayriev@buxdu.uz

³V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan.

We consider the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}[0,1]$ of complex-valued functions φ defined in the interval $[0,1]$, which possess an absolute continuous on $[0,1]$. We denote by $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1]$ the subspace of $W_2^{(m,m-1)}(0,1]$ consisting of complex-valued, 1-periodic functions (see [1] for details).

We consider a quadrature formula of the following form

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk), \quad (1)$$

where $\varphi(x) \in \widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1]$, C_k are coefficients of the quadrature formula and $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$.

The error of quadrature formula (1) is the following difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk). \quad (2)$$

Coefficients that minimize the absolute value of the error (2) with the nodes are fixed are called *optimal coefficients* and they are denoted by \mathring{C}_k . The quadrature formula with coefficients \mathring{C}_k is called *the optimal quadrature formula in the sense of Sard*.

Theorem 1 in [1]. *The following formulas are valid for the optimal coefficients of the quadrature formula (1)*

$$\begin{aligned} \mathring{C}_0 &= \frac{K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m} + (2\pi\omega)^{2m-2}}, \\ \mathring{C}_k &= \frac{2K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m} + (2\pi\omega)^{2m-2}} \cdot e^{2\pi i \omega h k}, \text{ for } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathring{C}_N &= \frac{K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m} + (2\pi\omega)^{2m-2}} \cdot e^{2\pi i \omega}, \end{aligned}$$

where $\lambda = e^{2\pi i\omega h}$, $E_{2n-2}(\lambda)$ is the Euler-Frobenius polynomial of degree $(2n - 2)$ and

$$K_{\omega,m} = (-1)^{m-1} \cdot \left[\frac{e^{2h} - 1}{e^{2h} + 1 - 2e^h \cos(2\pi\omega h)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{2h^{2n-1} \cdot \lambda E_{2n-2}(\lambda)}{(2n - 1)! \cdot (1 - \lambda)^{2n}} \right]^{-1}.$$

Now, in this case $m = 2$, we obtain an approximation formula for the numerical calculation of the Fourier integrals with real ω for functions of the space $W_2^{(2,1)}[a, b]$. One of the expansions of the optimal quadrature formula (1) for the case real ω is the approximation formula obtained by assuming the coefficients in Theorem 1 for this case $m = 2$ as continuous functions with respect to $\omega \in \mathbb{R}$. To do this, we consider construction of the approximation formula of the form

$$\int_a^b e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_{k,\omega}[a, b] \varphi(hk + a), \tag{3}$$

where $\omega \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, $C_{k,\omega}[a, b]$ are coefficients and $h = (b - a)/N$ with $N \in \mathbb{N}$.

Now, by a linear transformation $x = (b - a)y + a$, we obtain

$$\int_a^b e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx = (b - a) e^{2\pi i\omega a} \int_0^1 e^{2\pi i\omega(b-a)y} \varphi((b - a)y + a) dy.$$

For the case $m = 2$, using Theorem 1, we find the following coefficients for the effective formula

Theorem 2. *Coefficients of the approximation formula of the form (3) in the space $W_2^{(1,0)}[a, b]$ for $\omega \in \mathbb{R}$ have the form*

$$\begin{aligned} C_{0,\omega}[a, b] &= \frac{(b - a)K_{\omega,2}}{(2\pi\omega)^4 + (2\pi\omega)^2} \cdot e^{2\pi i\omega a}, \\ C_{k,\omega}[a, b] &= \frac{2(b - a)K_{\omega,2}}{(2\pi\omega)^4 + (2\pi\omega)^2} \cdot e^{2\pi i\omega(hk+a)} \text{ for each } k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ C_{N,\omega}[a, b] &= \frac{(b - a)K_{\omega,2}}{(2\pi\omega)^4 + (2\pi\omega)^2} \cdot e^{2\pi i\omega b}, \end{aligned}$$

where $h = \frac{b-a}{N}$ and

$$K_{\omega,2} = - \left[\frac{e^{2h} - 1}{e^{2h} + 1 - 2e^h \cos(2\pi\omega h)} + \frac{h}{\cos(2\pi\omega h) - 1} \right]^{-1}.$$

REFERENCES

1. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Khayriev U.N., *Optimal quadrature formulas for approximating strongly oscillating integrals in the Hilbert space $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}$ of periodic function*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **423**, (2025), pp. 116–133, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116133>.

Optimal quadrature formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$

Kuziev Sh. S.¹, Ulikov Sh. Sh.²

Kokand University, Kokand, Uzbekistan;

e-mail: shaxobiddin.qoziyev.89@gmail.com

Oriental University, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: sh.ulikov@mail.ru

Numerical integration formulae, or quadrature formulae, are methods for the approximate evaluation of definite integrals. They are needed for the computation of those integrals for which either the antiderivative of the integrand cannot be expressed in terms of elementary functions or for which the integrand is available only at discrete points, for example from experimental data.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_0 [\beta] \varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^N C_1 [\beta] \varphi''(h\beta) \quad (1)$$

with the error functional

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_0 [\beta] \delta(x-h\beta) + \frac{h^2}{12} (\delta'(x) - \delta'(x-1)) - \sum_{\beta=0}^N C_1 [\beta] \delta''(x-h\beta) \quad (2)$$

in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$ for $m \geq 3$. Here $C_0[\beta] = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \beta = 0, N, \\ h, & \beta = 1, N-1, \end{cases}$ $h = \frac{1}{N}$, N is a natural number.

For the error functional (2) to be defined on the space $L_2^{(m)}(0, 1)$ it is necessary to impose the following conditions

$$(\ell_N, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (3)$$

By the Cauchy-Schwarz inequality, the error of the formula (1) is estimated by the norm $\|\ell_N|_{L_2^{(m)*}(0, 1)}\|$ of the error functional (2). Furthermore, the norm of the error functional (2) depends on the coefficients $C_1[\beta]$. We find the minimum of the norm of the error functional (2) by the coefficients $C_1[\beta]$ under the conditions (3).

The coefficients that give the minimum for the norm of the error functional (2) are called *the optimal coefficients*. A quadrature formula of the form (1) with that coefficients is said to be the *optimal quadrature formula* of the form (1).

It is clear that in order to construct an optimal quadrature formula of the form (1) we have to consequently solve following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional (2) for the quadrature formula of the form (1) in the space $L_2^{(m)*}(0, 1)$.

Problem 2. Find coefficients $C_1[\beta]$ that give the minimum value to the norm of the error functional (2) under the conditions (3).

The following statement is true.

Theorem 1. Among quadrature formulas of the form (1) with the error functional (2) in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$ there exists a unique optimal quadrature formula which coefficients are determined by the following formulas

$$C_0[0] = C_0[N] = h/2,$$

$$C_0[\beta] = h, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C_1[0] = C_1[N] = h^3 \sum_{k=1}^{m-3} d_k \frac{q_k - q_k^N}{1 - q_k},$$

$$C_1[\beta] = h^3 \sum_{k=1}^{m-3} d_k \left(q_k^\beta + q_k^{N-\beta} \right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

where d_k satisfy the following system of $m - 3$ linear equations

$$\sum_{k=1}^{m-3} d_k \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{q_k^{N+i} + (-1)^i q_k}{(1 - q_k)^{i+1}} \Delta^i 0^\alpha = \frac{B_{\alpha+3}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}, \alpha = \overline{1, m-3},$$

where B_α are Bernoulli numbers, q_k are the roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-6}(q)$, $|q_k| < 1$.

REFERENCES

1. Sobolev S.L., *Introduction to the Theory of Cubature Formulas*. Nauka, Moscow, 1974.
2. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011. Vol.17, pp. 1114-1128.

Piecewise constant arguments method for solving Caputo-type fractional differential equations

Muminov M.I.^{1,2}, Abdusaitov D.Sh.¹

¹ Faculty of Mathematics, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;

² V.I Romanovski Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Samarkand, Uzbekistan;

mmuminov@mail.ru, dostonabdusaitov@gmail.com.

In this work, we provide numerical results obtained via the piecewise constant argument method for a fractional differential equation involving the Caputo derivative of the form

$$\begin{aligned} D_{0,t}^a y(t) &= f(t, y(t)), \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [a] - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

the Caputo derivative $D_{0,t}^a y(t)$ of $y(t)$ is defined as

$$D_{0,t}^a y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_0^t (t-\tau)^{n-a-1} y^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < a < n \in \mathbb{Z}^+,$$

where $[a] = n$. It is well known that the initial value problem (1) is equivalent to the Volterra integral equation is given by [4]

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-\tau)^{a-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

We introduce the following function $y_n(t)$ at $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ depending on an arbitrary positive integer n

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-\tau)^{a-1} f(t) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-\tau)^{a-1} y(\frac{k}{n}) d\tau, \quad t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \right) \end{aligned}$$

where $y(\frac{k}{n}) = \lim_{t \rightarrow \frac{k}{n}} y(t)$, $y'(\frac{k}{n}) = \lim_{t \rightarrow \frac{k}{n}} y'(t)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Problem 1. Consider the FDE given in [1], [2]

$$D_{0,t}^a y(t) = \frac{\Gamma(2a+1)}{\Gamma(a+1)} t^a - \frac{2}{\Gamma(3-a)} t^{2-a} + (t^{2a} - t^2)^4 - y^4(t), \quad y(0) = 0.$$

The exact solution of this problem is $y(t) = t^{2a} - t^2$.

Problem 2. Consider the FDE given in [1], [2]

$$D_{0,t}^a y(t) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-a)} t^{5-a} - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-a)} t^{4-a}$$

t	$\alpha = 0.30FEAM3$ $h = 10^{-3}$	$\alpha = 0.30PCAM$ $h = 10^{-3}$	$\alpha = 0.50FEAM3$ $h = 10^{-3}$	$\alpha = 0.50PCAM$ $h = 10^{-3}$	$\alpha = 0.90FEAM3$ $h = 10^{-3}$	$\alpha = 0.90PCAM$ $h = 10^{-3}$
0.1	1.4849×10^{-2}	3.1719×10^{-7}	9.0000×10^{-4}	2.1820×10^{-7}	2.9811×10^{-5}	1.0000×10^{-11}
0.2	6.3986×10^{-3}	2.0601×10^{-6}	4.9629×10^{-4}	1.4003×10^{-6}	2.4031×10^{-5}	1.0000×10^{-11}
0.3	1.3939×10^{-2}	6.1528×10^{-6}	8.9975×10^{-4}	2.6692×10^{-6}	3.4758×10^{-5}	7.2167×10^{-11}
0.4	1.4322×10^{-2}	1.3369×10^{-5}	9.4321×10^{-4}	5.5724×10^{-7}	3.6749×10^{-5}	6.6461×10^{-10}
0.5	1.4512×10^{-2}	2.4402×10^{-5}	9.6502×10^{-4}	1.3711×10^{-6}	3.7973×10^{-5}	1.2000×10^{-9}
0.6	1.4736×10^{-2}	3.9890×10^{-5}	9.8398×10^{-4}	2.0261×10^{-6}	3.9062×10^{-5}	1.2000×10^{-9}
0.7	1.5078×10^{-2}	6.0429×10^{-5}	1.0060×10^{-3}	1.4624×10^{-6}	4.0196×10^{-5}	7.0000×10^{-10}
0.8	1.5508×10^{-2}	8.6580×10^{-5}	1.0322×10^{-3}	2.3717×10^{-6}	4.1447×10^{-5}	5.0000×10^{-10}
0.9	1.5946×10^{-2}	1.1887×10^{-5}	1.0613×10^{-3}	4.0122×10^{-6}	4.2842×10^{-5}	8.0000×10^{-10}
1.0	1.6321×10^{-2}	1.5783×10^{-5}	1.0907×10^{-3}	6.4184×10^{-6}	4.4381×10^{-5}	7.2821×10^{-10}

Таблица 1: Absolute error at each point t when solving Problem 1 using FEAM3 and Piecewise constant arguments method (PCAM) for different step sizes h and $0 < \alpha < 1$

Таблица 2: Absolute error at $t = 1$ when solving Problem 1 using [2], Daftardar-Gejji et al. [3], the fractional Adams scheme [4] and PCAM for $h = 0.01$ and $0 < \alpha < 1$

Methods	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
[2]	1.5115×10^{-4}	1.1413×10^{-4}	4.7817×10^{-5}	1.4556×10^{-5}
[3]	3.8120×10^{-5}	1.8891×10^{-4}	1.0385×10^{-4}	4.5617×10^{-4}
[4]	2.2944×10^{-4}	1.8812×10^{-4}	1.0385×10^{-4}	4.5617×10^{-4}
PCAM	8.8614×10^{-5}	2.4449×10^{-5}	2.29109×10^{-6}	4.6219×10^{-8}

$$+ \frac{2\Gamma(4)}{\Gamma(4-a)} t^{3-a} + (t^5 - 3t^4 + 2t^3)^2 - y^2(t),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \alpha = 1.5.$$

The exact solution of this problem is $y(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3$.

t	FEAM3 $N = 10$	PCAM $N = 10$	FEAM3 $N = 1000$	PCAM $N = 1000$
0.0	0.0000×10^0	0.0000×10^0	0.0000×10^0	0.0000×10^0
0.2	4.5689×10^{-2}	6.2246×10^{-7}	1.9701×10^{-6}	1.1876×10^{-8}
0.4	5.8370×10^{-2}	5.2725×10^{-5}	8.8948×10^{-6}	1.9208×10^{-7}
0.6	1.1856×10^{-1}	2.4045×10^{-4}	9.1466×10^{-6}	2.8637×10^{-6}
0.8	1.2003×10^{-1}	4.9761×10^{-4}	1.1237×10^{-6}	5.1521×10^{-6}
1.0	2.4589×10^{-3}	3.8112×10^{-4}	2.1086×10^{-6}	4.6573×10^{-6}

Таблица 3: Absolute error at each point t when solving Problem 2 using FEAM3 and PCAM for different intervals N and $\alpha = 1.5$

References

[1]. Zabidi.N.A., Abdul Majid.Z., Kilicman.A. and Rabiei.F. (2020). Numerical solutions of fractional differential equations by using fractional explicit Adams method. Mathematics, 8(10), 2020.

[2]. Nur Amirah Zabidi, Zanariah Abdul Majid, Adem Kilicman and Zarina Bibi Ibrahim. Numerical solution of fractional differential equations with Caputo derivative by using numerical fractional predict-correct technique. Advances in Continuous and Discrete Models. 2022.

[3]. V. Daftardar-Gejji, Y. Sukale, S. Bhalekar, A new predictor-corrector method for fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 244 (2014) 158-182.

[4]. K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Detailed error analysis for a fractional Adams method, Numer. Algorithms 36 (1) (2004) 31-52.

Chiziqli ikkinchi tartibli chegaraviy shartli masalani taqribiy yechish.

Muminov M.I,^{1,2} Usmonov N.M.³

¹ Matematika fakulteti, Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston;

² V.I Romanovski nomidagi Matematika instituti, O‘zbekiston Fanlar akademiyasi.

mmuminov@mail.ru;

³ Guliston davlat universiteti, Guliston, O‘zbekiston;

navruzusmonov417@gmail.com

Quyidagi shakldagi chiziqli ikkinchi tartibli chegaraviy shartli masalani ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t) + r(t), \\ 0 < t < 1, \quad \phi(0) &= \alpha, \quad \phi(1) = \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

bu yerda α, β haqiqiy o‘zgarmas sonlar, $p(t), q(t)$ va $r(t)$ lar $[0, 1]$ da uzluksiz funksiyalardir. Chegaraviy shartli masalaning taqribiy yechimni olish uchun biz quyidagi bo‘lakli doimiy argumentli chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz:

$$\phi''(t) = p(t)\phi'\left(\frac{[nt]}{n}\right) + q(t)\phi\left(\frac{[nt]}{n}\right) + r(t), \quad (2)$$

$$\phi(0) = \alpha, \quad \phi(1) = \beta. \quad (3)$$

Shu esda tutilsinki, $x_k := \frac{[nx]}{n} = \frac{k}{n}$, for $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

(2),(3) yechimlari quyidagicha aniqlanadi [1].

Ta’rif 1. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, $\phi(t) := \phi_n(t)$ funksiya (2)-(3) chegaraviy shartli masalaning yechimi deyiladi:

(I) $\phi(t), \phi'(t)$ $[0, 1]$ da uzluksiz va $\phi(t)$ (3) chegaraviy shartni qanoatlantiradi;

(II) $\phi''(t)$ mavjud va $[0, 1]$ da uzluksiz, t_k nuqtalardan tashqarida bir tomonlama hosilalari mavjud;

(III) $\phi(t)$ $(0,1)$ da (2) differensial tenglamani qanoatlantiradi, $t_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$ nuqtalarida bundan mustasno.

Bo‘lakli o‘zgarmas argumentlar usuli bilan quyidagi boshlang‘ich qiymat masalasini ko‘rib chiqamiz:

$$\delta_i''(t) = p(t)\delta_i'(t_k) + q(t)\delta_i(t_k) + r(t), \quad (4)$$

va quyidagi boshlang‘ich shartlar bilan

$$\delta_i(0) = \alpha, \quad \delta_i'(0) = \gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

bu yerda γ_1 va γ_2 lar haqiqiy o'zgarmas sonlar va $\gamma_1 \neq \gamma_2$ holda ixtiyoriy tanlanadi. $t \in [t_k, t_{k+1})$ va $i = 1, 2$ uchun (4),(5)ning yechimi quyidagi shaklga ega:

$$\delta_i(t) = \int_{t_k}^t \int_{t_k}^{\tau} \left(p(s)\delta'_i(t_k) + q(s)\delta_i(t_k) + r(s) \right) dsd\tau + \delta'_i(t_k)(t - t_k) + \delta_i(t_k), \quad (6)$$

bu yerda $\delta_i(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k-0} \delta_i(t)$, $\delta'_i(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k-0} \delta'_i(t)$, $i = 1, 2$.

Biz $\delta_1(1) \neq \delta_2(1)$ uchun $w_1 = \frac{\beta - \delta_2(1)}{\delta_1(1) - \delta_2(1)}$ va $w_2 = \frac{\delta_1(1) - \beta}{\delta_1(1) - \delta_2(1)}$ larni olamiz va $\delta_1(1) = \delta_2(1)$ uchun $w_1 + w_2 = 1$ bo'ladi.

Teorema 1. Har qanday musbat butun n son uchun (2)-(3) chegaraviy shartli masala quyidagicha aniqlangan $\phi_n(t)$ yagona yechimga ega.

$$\phi_n(t) = w_1\delta_1(t) + w_2\delta_2(t). \quad (7)$$

Teorema 2. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n_0 = n_0(\varepsilon)$ musbat son topilib, ixtiyoriy $n > n_0$ musbat butun sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi

$$\sup_{t \in [0,1]} |\phi_n''(t) - p(t)\phi_n'(t) - q(t)y_n(t) - r(t)| < \varepsilon \quad (8)$$

bu yerda $\phi_n(t)$ (7) orqali aniqlanadi.

Misol 1. Quyidagi chegaraviy shartli masalani qaraymiz ([2] va [3] da berilgan)

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= -(t + 1)\phi'(t) + 2\phi(t) + (1 - t^2)e^{-t}, \\ 0 \leq t \leq 1, \quad \phi(0) &= -1, \quad \phi(1) = 0. \end{aligned}$$

Ushbu masalaning berilgan analitik yechimi: $\phi(t) = (t - 1)e^{-t}$.

Har biri 3,4 GHz to'rt yadroli Intel(R)Optiplex 9010da PDDE (Population-Distributed parallel Differential Evolution) usuli [2], [3] bilan olingan 1-misol bo'yicha o'rtacha xatolar va ish vaqtlari joriy ishda foydalanilgan 2.1 GHz to'rt yadroli Intel(R) TM Core i5 da Bo'lakli o'zgarmas argumentlar (BO'A) usuli bilan olingan raqamli natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

Absolut xatolik		Ishlash vaqti (s)	
PDDE [2], [3]	BO'A	PDDE [2]	BO'A
1.7180×10^{-4}	6.2661×10^{-6}	362.5911	69.18

Misol 2. Quyidagi chegaraviy shartli masalani qaraymiz

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= (t^3 + t + 1)\phi'(t) + (1 - t^2)\phi(t) + 2t - 2t^4 - 5t^2 + 6, \\ 0 \leq t \leq 1, \quad \phi(0) &= 1, \quad \phi(1) = 0. \end{aligned}$$

Ushbu masalaning berilgan analitik yechimi: $\phi(t) = 2t^2 - 3t + 1$. Ushbu masala uchun BO'A usulidan foydalanilgan raqamli hisob-kitoblar shuni ko'rsatadiki, absolut xatolik va ish vaqti mos ravishda $1,6736 \times 10^{-14}$ va 0,57s.

REFERENCES

1. Muminov, M. I., & Jumaev, Z. Z. (2025). On the approximation algorithms for solving generalized bernoulli differential equations using PCAM. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 11 (2), 45.
2. Nasim, A., Burattini, L., Fateh, M. F., & Zameer, A. (2019). Solution of linear and non-linear boundary value problems using PDDE. JAISCR, 9 (3), 205-218.
3. Fateh, M. F., Zameer, A., Mirza, N. M., Mirza, S. M., & Raja, M. A. Z. (2017). Biologically inspired computing framework for solving two-point boundary value problems using differential evolution. Neural Computing and Applications, 28 , 2165-2179.

Spektral-to'r usuli orqali yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatlashgan oddiy differensial tenglama yechimini va hosilalarini hisoblash

Normurodov Ch.B., Murodov S.K.

Termiz Davlat Universiteti, Termiz, O'zbekiston;
ch.normurodov@gmail.com, smurodov870@gmail.com

Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatnashgan to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy qiymat muammosini sonli modellashtirish analiy matematika sohasidagi dolzarb muammolardan biri hisoblanadi. Differensial tenglamada kichik parametrning mavjudligi, aniq va muammo parametrining yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llanilishi mumkin bo'lgan mosla- shuvchan sonli usullarni ishlab chiqishni talab etadi. Spektral-to'r usuli kichik parametr, to'r element- lari va Chebishev ko'phadlarining umumiy soni turli qiymatlarni qabul qilganda yechim va uning turli tartibli hosilalarini hisoblashda yuqori aniqlik va samaradorlikni ko'rsatadi.

Eng yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatnashgan oddiy to'rtinchi tartibli differensial tenglamani ko'rib chiqaylik:

$$\varepsilon \frac{d^4 u}{d\eta^4} - 2 \frac{d^2 u}{d\eta^2} + u(\eta) = f(\eta), \quad \eta \in (\eta_0, \eta_1), \quad (1)$$

va u quyidagi chegaraviy shartlarga ega bo'lsin:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad u(\eta_1) = \frac{du}{d\eta}(\eta_1) = 0, \quad (2)$$

Bu yerda ε - kichik parametr. Kichik parametr ε ning mavjudligi nafaqat ko'rib chiqilayotgan masalani yechimlarini hisoblashda, balki turli tartibli hosilalarini hisoblashda ham qiyinchilik tug'diradi.

Berilgan muammoni spektral va spektral-to'r usullari bilan ishlashda taxminiy yechim $u_a(\eta)$ birinchi turdagi Chebyshev ko'phadlarining kollakatsiya tugunlarida

ma'lum bo'lgan sinov funksiyasi bilan taqqoslanadi. Bunda sinov funksiyasi sifatida $u_e(\eta) = (1 - \eta^2)^2 e^{\varepsilon\eta}$. tanlangan va ushbu tenglama uchun tenglama (1) ning o'ng tomoni quyidagicha ko'rinish oladi:

$$f(\eta) = e^{\varepsilon\eta}[(\varepsilon^5 - 2\varepsilon^2 + 1)\eta^4 + (16\varepsilon^4 - 16\varepsilon)\eta^3 + (72\varepsilon^3 - 2\varepsilon^5 + 4\varepsilon^2 - 26)\eta^2 + (96\varepsilon^2 - 16\varepsilon^4 + 16\varepsilon)\eta + (\varepsilon^5 - 24\varepsilon^3 + 24\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 9)].$$

Sinov funksiyasining hosilalari quyidagicha ko'rinishga ega:

$$\frac{du_e}{d\eta} = (\eta^2 - 1)(\varepsilon\eta^2 + 4\eta - \varepsilon)e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^2u_e}{d\eta^2} = [\varepsilon^2\eta^4 + 8\varepsilon\eta^3 + 2(6 - \varepsilon^2)\eta^2 - 8\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - 4] e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^3u_e}{d\eta^3} = [\varepsilon^3\eta^4 + 12\varepsilon^2\eta^3 + 2(18\varepsilon - \varepsilon^3)\eta^2 + 12(2 - \varepsilon^2)\eta + \varepsilon^3 - 12\varepsilon] e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^4u_e}{d\eta^4} = [\varepsilon^4\eta^4 + 16\varepsilon^3\eta^3 + 2(36\varepsilon^2 - \varepsilon^4)\eta^2 + 16(6\varepsilon - \varepsilon^3)\eta + \varepsilon^4 - 24\varepsilon^2 + 24] e^{\varepsilon\eta}.$$

Ushbu ifodalar spektral-to'r usuli orqali hisoblangan taxminiy qiymatlar bilan taqqoslanadi[1]. Bunda taxminiy yechim va uning turli tartibli hosilalari quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$u_a^{(j)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y),$$

$$u_a^{(1)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(1)} T_n(y),$$

$$a_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{q=n+1 \\ q+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{p_j} qa_q, \quad n \geq 0,$$

$$u_a^{(2)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(2)} T_n(y),$$

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{q=n+2 \\ q \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} q(q^2 - n^2)a_q, \quad n \geq 0,$$

$$u_a^{(3)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(3)} T_n(y),$$

$$a_n^{(3)} = \frac{1}{4c_n} \sum_{\substack{q=n+3 \\ q+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{p_j} q \left[(q^2 - 1)^2 - 2(q^2 + 1)n^2 + n^4 \right] a_q, \quad n \geq 0,$$

$$u_a^{(4)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(4)} T_n(y),$$

$$a_n^{(4)} = \frac{1}{24c_n} \sum_{\substack{q=n+4 \\ q \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} q \left[q^2 (q^2 - 4)^2 - 3n^2 q^4 + 3n^4 q^2 - n^2 (n^2 - 4)^2 \right] a_q, n \geq 0.$$

Bu qiymatlarni (1)-(2) ga qo'yish orqali $Ax = b$ algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu yerda $x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)})$.

Kichik parameter ε	Ko'phadlarning umumiy soni M	To'r elementlari soni N	Yechim	1-tartibli hosila	2-tartibli hosila	3-tartibli hosila	4-tartibli hosila
10^{-7}	40	1	$1.6 * 10^{-15}$	$1.1 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-13}$	$8.6 * 10^{-10}$	$4.1 * 10^{-7}$
	40	2	$9.4 * 10^{-16}$	$8.4 * 10^{-15}$	$2.2 * 10^{-13}$	$7.0 * 10^{-11}$	$7.3 * 10^{-9}$
	40	4	$6.6 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-16}$	$3.3 * 10^{-15}$	$1.8 * 10^{-13}$	$3.3 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$2.6 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-16}$	$5.7 * 10^{-16}$	$1.0 * 10^{-15}$
10^{-9}	40	1	$1.4 * 10^{-15}$	$3.9 * 10^{-14}$	$1.9 * 10^{-12}$	$2.8 * 10^{-9}$	$1.3 * 10^{-6}$
	40	2	$4.4 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-15}$	$2.0 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-12}$	$7.0 * 10^{-10}$
	40	4	$3.3 * 10^{-16}$	$3.8 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-15}$	$2.7 * 10^{-13}$	$5.0 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$1.9 * 10^{-16}$	$1.8 * 10^{-16}$	$7.4 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$

Рис. 1: Jadval 1. Yechim va uning hosilalarining maksimal absolyut hatoligi

Keltirilgan jadvaldan ko'rinib turibdiki, ε kichik parametrning turli qiymatlarida spektral-to'r usuli taxminiy yechim va uning hosilalarini yuqori aniqlikda hisoblash imkonini beradi va bu qo'llanilgan usulning samaradorligini ta'minlaydi.

ADABIYOTLAR

1. Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E. Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative. Problems of Computational and Applied Mathematics, (2025) DOI:10.71310/pcam.2_64.2025.05

Minimizing the semi norm in the space $K_{2,v}^{(3,4)}$

Nuraliev F. A.^{1,2}, Abdullaeva G. Sh.²

¹Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;

²V.I.Romanovski Institute of Mathematics, Tashkent Uzbekistan;
farhod.nuraliyev@teacher.tiu.uz and gulruxshukurillayevna@gmail.com

In this work, we present the result that an algebraic hyperbolic spline with defect of one gives a minimum to the norm in the space $K_{2,v}^{(3,4)}$ under certain conditions. The space $K_{2,v}^{(3,4)}$ is a factorized Hilbert space defined as:

$$K_{2,v}^{(3,4)} = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(3)} \text{ is abs. cont. and } f^{(4)} \in L_2(0, 1) \right\}.$$

Class $K_{2,v}^{(3,4)}$ is a factorized Hilbert space where the inner product is introduced as follows:

$$\langle f, g \rangle_{K_{2,v}^{(3,4)}} = \int_0^1 (f^{(4)}(x) - v^2 f^{(2)}(x))(g^{(4)}(x) - v^2 g^{(2)}(x)) dx$$

the semi-norm is defined using the inner product as follows:

$$\|f\|_{K_{2,v}^{(3,4)}} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Let be given a $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ mesh on $[0, 1]$ and the corresponding values $Y : y_0, y_1, \dots, y_N$ at the nodes $x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Now, we consider the following problem in the space $K_{2,v}^{(3,4)}$.

Problem 1. Find a function $f \in K_{2,v}^{(3,4)}$ which gives minimum to the semi-norm (1) and satisfies the following interpolation conditions:

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Now, we present the result which is about under what conditions the eighth order algebraic-hyperbolic tension spline $S_\Delta(Y, x)$ gives a minimum to the norm in the space $K_{2,v}^{(3,4)}$.

Theorem 1. *If the function $f(x)$ belongs to the space $K_{2,v}^{(3,4)}$ the $S_\Delta(f; x)$ that spline interpolates it on the mesh $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ and fulfilled any of the conditions:*

a) *at the end points of the mesh Δ for the eighth order algebraic-hyperbolic tension spline $S_\Delta(f, x)$ the equalities $S_\Delta^{(\alpha+4)}(f; 1) - v^2 S_\Delta^{(\alpha+2)}(f; 1) = S_\Delta^{(\alpha+4)}(f; 0) - v^2 S_\Delta^{(\alpha+2)}(f; 0) = 0$, $\alpha = 0, 1, 2$ are valid;*

b) The function $f(x)$ and eighth order algebraic-hyperbolic tension spline $S_{\Delta}(f, x)$ satisfy the boundary conditions $f^{(k)}(0) = S_{\Delta}^{(k)}(f, 0)$, $k = 1, 2, 3$;

c) The function $f(x)$ and eighth order algebraic-hyperbolic tension spline $S_{\Delta}(f, x)$ are periodic.

Then the first integral identity holds:

$$\int_0^1 \{Lf(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{LS_{\Delta}(f; x)\}^2 dx + \int_0^1 \{L[f(x) - S_{\Delta}(f; x)]\}^2 dx.$$

Extremal function of the error functional for the optimal quadrature formula

Nuraliev F. A.^{1,2}, Edilbekova R. M.¹

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan;

²Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
farxod.nuraliyev@teacher.tiu.uz, raximaedilbekova@gmail.com

Nowadays, mathematical models of problems in numerous scientific fields are reduced to the task of solving differential and integral equations with high precision. Typically, using simple interpolation quadrature formulas to solve such problems requires an extensive amount of computational work. Therefore, one of the crucial tasks in computational mathematics is the development of optimal numerical algorithms that allow for sufficiently accurate solutions to these problems. To this end, constructing optimal quadrature formulas with derivatives and evaluating their errors has become an important objective in the field. In this work, we examine the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_0 [\beta] \varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^N C_1 [\beta] \varphi'''(h\beta). \quad (1)$$

The error functional corresponding to this formula have the following form

$$\begin{aligned} \ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_0 [\beta] \delta(x - h\beta) + \frac{h^2}{12} (\delta'(x) - \delta'(x - 1)) - \\ - \sum_{\beta=0}^N C_1 [\beta] \delta'''(x - h\beta), \end{aligned} \quad (2)$$

where $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is the Dirac delta-function, $C_0[\beta]$ ($\beta = \overline{0, N}$) known coefficients and $C_1[\beta]$, ($\beta = \overline{0, N}$) are the unknown coefficients of the quadrature formula (1), $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Based on the Cauchy-Schwarz inequality, the error of the quadrature formula (1) is estimated by the product of the norm of the error functional $\ell_N(x)$ from the conjugate space $L_2^{(m)*}(0, 1)$ and the norm of the function $\varphi(x)$ from the space $L_2^{(m)}(0, 1)$.

$$|(\ell_N, \varphi)| \leq \| \varphi \|_{L_2^{(m)}} \cdot \| \ell_N \|_{L_2^{(m)*}}$$

The norm of the error functional $\ell_N(x)$ depends on the coefficients and nodes of the quadrature formula (1). Since the error functional $\ell_N(x)$ is defined in the space $L_2^{(m)*}(0, 1)$, it satisfies the following conditions:

$$(\ell_N, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m - 1. \tag{3}$$

As emphasized by the Cauchy-Schwarz inequality mentioned above, the error of the quadrature formula (1) is estimated by the norm of the error functional (2). Furthermore, the norm of the error functional depends on the nodal points and the coefficients $C_1[\beta]$, $\beta = \overline{0, N}$. We find the minimum of the norm of the error functional only through the coefficients $C_1[\beta]$, $\beta = \overline{0, N}$ when the nodal points are fixed

$$\left\| \ell_N \Big|_{L_2^{(m)*}(0, 1)} \right\| := \inf_{C_1[\beta]} \left\| \ell_N \Big|_{L_2^{(m)*}(0, 1)} \right\|. \tag{4}$$

To find the general form of the norm of the error functional ℓ_N , we utilize the extremal function. A ψ_ℓ function corresponding to the error functional ℓ_N , which transforms the Cauchy-Schwarz inequality into an equality, i.e., satisfying the following equality, is called an extremal function

$$(\ell_N, \psi_\ell) = \| \ell_N \|_{L_2^{(m)*}} \cdot \| \psi_\ell \|_{L_2^{(m)}}.$$

Using the Riesz theorem on the general form of a linear continuous functional, we obtain the following differential equation:

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = (-1)^m \ell_N(x). \tag{5}$$

The following holds.

Theorem 1. The generalized solution of equation (5) is an extremal function corresponding to the error functional, which is expressed as follows:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell_N(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

where $G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}$, $P_{m-1}(x)$ is a polynomial of degree $m - 1$.

REFERENCES

1. Sobolev S. L. The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected works of S. L. Sobolev // *Springer US*. 2006. P. 561-566.

2. Shadimetov Kh. M. *Optimal formulas of approximate integration for differentiable functions, Candidate dissertation*. Novosibirsk, 1983, p.140.

3. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S. The coefficients of an optimal quadrature formula in the space of differentiable functions // *Uzbek Mathematical Journal*. 2023. No. 67(2). P. 124-135.

Nochiziqli dielektrik muhitda yuqori quvvatli lazer nurlari ta'sirida o'z -o'zini fokuslash effektini matematik modellashtirish

Nurmatova S . K., Aminov D. R.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch,
O'zbekiston;
azamatabdikarimov24@gmail.com

Nochiziqli dielektrik muhit tashqi elektr maydon ta'sirida qutblanish (polarizatsiyalanish jarayoni) elektr maydon kuchiga chiziqli proporsional bo'lmaydi, balki yuqori tartibli hadlar bilan bog'liq bo'ladi.

Oddiy (chiziqli) dielektrlarda qutublanish vektori quyidagi formulaga bog'liq.

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E,$$

bu yerda P - qutblanish vektori, $\chi^{(1)}$ - chiziqli dielektrik sezgirlik, E - elektr maydon.

Nochiziqli dielektrlarda esa:

$$P = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots),$$

bu yerda $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ kabi koeffitsientlar nochiziqli sezgirlik deb ataladi. Ular mavjud bo'lganda turli nochiziqli optik hodisalar kuzatiladi. Bunday nochiziqli dielektrik muhitlar ko'pincha nochiziqli optika sohasida qo'llaniladi. Ularning amaliy ahamiyati juda katta bo'lib, ular quyidagi maqsadlarda ko'plab ishlatiladi:

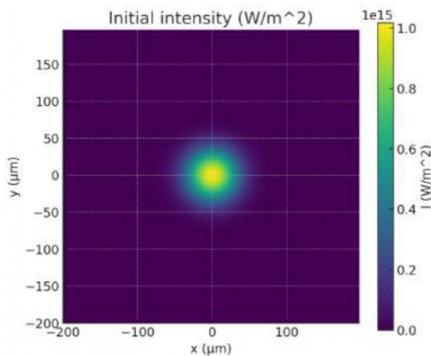
- Superkontinuum hosil qilish: Lazer tolada o'z-o'zidan fokuslansa, turli chastotalar aralashadi, \rightarrow keng spektrli oq nur hosil bo'ladi. Bu spektral analizatorlar biotibbiyotda ishlatiladi.
- Ultraqisqa impuls hosil qilish: Femtosekund (10^{-15} s) impulsli lazerlar uchun zarur. Tez elektronika va kvant texnologiyalarida qo'llanadi.
- Optik kommutatsiya va modulyatsiya: Optik tolalarda signalni boshqarish uchun ishlatiladi.

- Lazerli mikronishonlash: Materiallarni lazer bilan kesish, yozish yoki teshishda nur fokuslanishi natijasida energiya kichik joyga to‘planadi.
- Zarrachalar tezlatgichi: o‘z-o‘zidan fokuslangan lazer yordamida plazmada elektronlarni juda yuqori energiyalargacha tezlatish mumkin.

Bunday noxiziqli dielektrlardan yuqori quvvatli lazer nuri o‘tganda o‘z-o‘zini fokuslash yuz beradi. Buning sababi noxiziqli muhitda sindirish ko‘rsatkichi n elektr maydon kuchiga yoki intensivlikka bog‘liq bo‘ladi va bu ifoda Kerr effekti deyiladi:

$$n(I) = n_0 + n_2 I(r, z),$$

bu yerda: n_0 - oddiy (chiziqli) sindirish ko‘rsatkichi, n_2 - noxiziqli sindirish koeffitsiyenti yoki Kerr ko‘rsatkich deyiladi. Agar $n_2 > 0$ bo‘lsa lazer nuri o‘tganda o‘z-o‘zini fokuslaydi. Agar $n_2 < 0$ bo‘lsa, lazer nuri o‘tganda nur yoyilib ketadi. I - lazer nuri intensivligi.



Yuqori quvvatli lazer nuri noxiziqli dielektrik muhitdan o‘tganda o‘z-o‘zini fokuslashi nur parametrlari va muhit xossalari bilan chambarchas bog‘liq. Lazer nurining boshlang‘ich radiusi (yoki diametri) w_0 katta bo‘lsa \rightarrow fokuslash uchun uzoqroq masofa kerak bo‘ladi. Agar nur radiusi (yoki diametri) juda tor bo‘lsa \rightarrow o‘z-o‘zini fokuslash tezroq sodir bo‘ladi. Ushbu maqolada yuqori quvvatli lazer nuri noxiziqli dielektrik muhitdan o‘tganda o‘z-o‘zini fokuslash jarayonini yuzaga kelishi o‘rganiladi. Bunda jarayonni matematik tenglamalar asosida modellashtirib o‘rganish imkoniyatlari haqida so‘z yuritiladi. Odatda o‘z-o‘zini fokuslash boshlanadigan masofa kritik masofa bilan aniqlanadi:

$$Z_{sf} \approx \frac{0,367\pi w_0^2}{\lambda \sqrt{P/P_{cr} - 0,852}},$$

P - lazer nuri quvvati, P_{cr} - kritik quvvat, ya’ni fokuslash boshlanishi uchun minimal quvvat.

Kritik quvvat:

$$P_{cr} \approx \frac{0,148\lambda^2}{n_0 n_2},$$

bu yerda λ - lazer to'liqin uzunligi, n_0 - muhitning sindirish ko'rsatkichi, n_2 - nochizikli sindirish koeffitsiyenti yoki Kerr ko'rsatkichi. Demak nur qaysi masofada va qanday diametrgacha kichiklashishi quyidagi omillarga bog'liq:

1. Boshlang'ich nur diametri w_0 - katta bo'lsa, fokus uzoqda; kichik bo'lsa, tezroq.
2. To'liqin uzunligi λ - qisqa to'liqin uzunligi \rightarrow u kichik bo'lsa nur kuchliroq fokuslash.
3. Nur quvvati P - katta quvvat \rightarrow tezroq va kuchliroq fokuslash.
4. Muhitning nochiziqi (n_2) - n_2 katta bo'lsa \rightarrow tez fokuslash.
5. Muhitning dispersiya va so'nishi - real muhitda nur so'nadi, bu fokuslash masofasini uzaytirishi mumkin.

Yuqori quvvatli lazer nurini ifodalovchi matematik tenglamalarni Python dasturiga kiritib, yuqori quvvatli lazer nurining parametrlarni o'zgartirib fokuslanish diametrini kichiklashtirish mumkin. (1-Rasm a va b) ga qarang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Boyd, R. W. (2020). Nonlinear Optics (4th ed.). Academic Press.
2. Agrawal, G. P. (2019). Nonlinear Fiber Optics (6th ed.). Academic Press.

System of equations for coefficients of the optimal interpolation formula with derivatives

Olimov N.N.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
olimovnurali8@gmail.com

We consider an approximation formula of the following form

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-2} C_{\beta,\alpha}(x) \varphi^{(\alpha)}(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_{\beta,m-1}(x) \varphi^{(m-1)}(x_\beta). \quad (1)$$

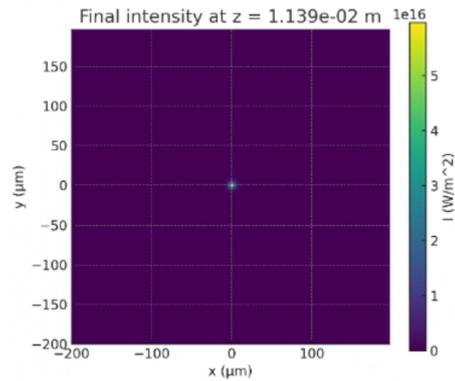


Рис. 2: (rasm b).

Рис. 3: *

1-Rasm. Yuqori quvvatli lazer nurining fokuslanishi: a) diametri katta; b) diametri kichik.

The functions φ belong to the Sobolev space $L_2^{(m)}(0, 1)$. Here, $L_2^{(m)}(0, 1)$ is the Hilbert space of functions that are square integrable with m -th generalized derivative in the interval $[0, 1]$. The space is equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}} = \sqrt{\int_0^1 (f^{(m)}(x))^2 dx}.$$

Let a grid $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ be given on the interval $[0, 1]$.

The error associated with the approximate equality (2) takes the form of a difference expressed as

$$(R_\varphi(x, z), \varphi) = \varphi(x) - P_\varphi(x), \tag{2}$$

where

$$R_\varphi(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha C_{\beta, \alpha}(z) \cdot \delta^{(\alpha)}(x - x_\beta) \tag{3}$$

is the error functional.

Assume that on this grid, the following values of the function and its derivatives up to $(m - 1)$ are given:

$$\varphi(x_\beta), \varphi'(x_\beta), \dots, \varphi^{(m-1)}(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N. \tag{4}$$

In this work, we consider the problem of optimal interpolation of functions $\varphi(x)$ given by values (4) at points $x_\beta, \beta = 0, 1, \dots, N$ in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$.

According to the Cauchy-Schwarz inequality, the upper bound of the error looks like this:

$$|(R_\varphi, \varphi)| = |\varphi(x) - P_\varphi(x)| \leq \|R_\varphi\|_{L_2^{(m)*}} \cdot \|\varphi\|_{L_2^{(m)}}. \tag{5}$$

And the error functional satisfies the equalities

$$(R_\varphi, x^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

In order to construct an optimal interpolation formula, we first compute the norm of the error functional when the coefficients corresponding to derivatives up to order $m - 2$ are known. The task is to find the coefficients corresponding to the highest derivative that minimize this norm. These minimizing coefficients are called the optimal coefficients.

To determine the norm of the error functional, we use the extremal function associated with the interpolation error. According to the Riesz representation theorem, the square of the norm of the error functional is equal to the value of the error functional applied to its extremal function. This shows that the norm

depends on both the interpolation nodes and the coefficients, including those of the highest derivative.

To determine the unknown coefficients, we require that the error functional vanishes when applied to a polynomial of degree $m - 1$. This leads to a constraint relation involving all coefficients. The problem is then reduced to finding the minimum value of the norm subject to this constraint.

For this purpose, we construct a Lagrange function combining the norm and the constraint with a Lagrange multiplier. Taking partial derivatives of this function with respect to the unknown coefficients and the multiplier, and setting them to zero, leads to a system of linear equations.

We have the following result.

Theorem 1. *In the Sobolev space $L_2^{(m)}(0, 1)$ system of equations for the coefficients of the optimal interpolation formula with derivative have the following form*

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma, m-1} \frac{|x_\beta - x_\gamma|}{2} + (m-1)! \lambda = f(x_\beta, z), \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma, m-1} = \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-2} C_{\beta, \alpha} \cdot \frac{x_\beta^{m-1-\alpha}}{(m-1-\alpha)!},$$

where

$$f(x_\beta, z) = (-1)^m \sum_{\gamma=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-2} (-1)^\alpha C_{\gamma, \alpha} \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma) (x_\beta - x_\gamma)^{m-\alpha}}{2(m-\alpha)!} +$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - z) (x_\beta - z)^m}{2 \cdot m!}.$$

The system of linear equations obtained above is solved using the method proposed by Sobolev, based on the discrete analogue of the differential operator, and the analytical representation of the coefficients $C_{\beta, m}$ is derived.

REFERENCES

1. Sobolev, S. L. *Introduction to the theory of cubature formulas*. Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)
2. Shadimetov, Kh. M., Hayotov, A. R. *Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m, m-1)}(0, 1)$ space*. *BIT Numerical Mathematics*, 53(2), 2013, P. 545–563.
3. Hayotov A. R., Babaev S. S., Olimov N. N. *An optimal interpolation formula of Hermite type in the Sobolev space*. *Filomat*. 2024, Vol. 23, P.8305-8322.

Solution of ordinary second-order differential equations using neural network methods based on orthogonal polynomials

Parovik R. I.

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern
Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia;
e-mail: parovik@ikir.ru

Currently, artificial neural networks have been widely developed in connection with various applications [1]. One of such applications is the method for solving ordinary differential equations (ODE) [2]. To solve ODE, neural networks with different structures are used. In particular, these can be networks with a multilayer structure, for example, the perceptron model (MLP) [3] or the physical information neural network (PINN) [4], or they can be single-layer networks based on the principle of functional connectivity (FLANN) [5].

In the article [5], a single-layer FLANN model was presented, in which the number of network parameters and the number of iterations for training are less than that of MLP. In FLANN, the hidden layer was replaced by a functional expansion block to improve the input patterns using orthogonal polynomials such as Chebyshev, Legendre, etc. Thus, the single-layer FLANN model is computationally efficient and has a higher convergence rate. The artificial neural network FLANN based on the functional connections of the Chebyshev polynomials (ChNN) and the Legendre polynomials (LeNN) is widely used to solve ordinary differential equations [6-8].

However, there are currently no works on their joint application or comparison of results. In addition, the neural network based on the Laguerre polynomials (LaNN) has not yet been used to solve ordinary differential equations. Therefore, this paper studies the operation of the ChNN, LeNN, LaNN family of neural networks using specific examples - solving the Cauchy problem

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + 4 \left(2e^{y(x)} + e^{y(x)/2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0, x, x_0 \in [0.1, 1] \quad (2)$$

and the boundary value problem

$$y(0.1) = 0, y(1) = -2 \log 2, x \in [0.1, 1]. \quad (3)$$

for the second-order nonlinear ordinary differential equation Lane-Emden for which the exact solution is known [6], [9].

The results of solving problems (1), (2) and (1), (3) using a family of polynomial neural networks (accuracy and execution time of the algorithm) were compared

with the work of a multilayer neural network MLP. It was shown that polynomial neural networks can work more efficiently than the neural network MLP.

All algorithms were implemented in the Python programming language in the PyCharm environment.

The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS No. 124012300245-2.

LITERATURE

1. Abdolrasol M.G.M., Hussain S.M.S., Ustun T.S., Sarker M.R., Hannan M.A. Mohamed R., Ali J.A., Mekhilef S., Milad A. Artificial Neural Networks Based Optimization Techniques: A Review // *Electronics*. 2021. Vol. 10. 2689.
2. Tan L. S., Zainuddin Z., Ong P. Solving ordinary differential equations using neural networks // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1974. No. 1. 020070.
3. Riedmiller M., Lernen A. Multi layer perceptron // *Machine learning lab special lecture, University of Freiburg*. 2014. Vol. 24. P. 11-60.
4. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2021. Vol. 43. No. 5. A3055-A3081.
5. Pao Y. H., Phillips S. M. The functional link net and learning optimal control // *Neurocomputing*. 1995. Vol. 9. No. 2. P. 149-164.
6. Chaharborj S. S., Chaharborj S. S., See P. P. Application of Chebyshev neural network to solve Van der Pol equations // *International Journal of Basic and Applied Sciences*. 2021. Vol. 10. No. 1. P. 7-19.
7. Mall S., Chakraverty S. Application of Legendre neural network for solving ordinary differential equations // *Applied Soft Computing*. 2016. Vol. 43. P. 347-356.
8. Yang Y., Hou M., Luo J. A novel improved extreme learning machine algorithm in solving ordinary differential equations by Legendre neural network methods // *Advances in Difference Equations*. 2018. Vol. 2018. No. 1. 469.
9. Yildirim A., Ozis T. Solutions of singular IVPs of Lane–Emden type by the variational iteration method // *Nonlinear Anal.* 2009. Vol. 70. P. 2480BГY2484.

Nochiziqli chegaraviy shartlarga ega reaksiya-diffuziya masalasining avtomodel yechimi asimptotikasi

Raxmonov Z.R.¹, Zaripova A.R.²

O‘zbekiston milliy universiteti, f.-m.f.d., professor;

Qarshi davlat universiteti, tayanch doktoranti;

zraxmonov@inbox.ru, azizazaripova1990@mail.ru

Ushbu maqolada nochiziqli chegaraviy shartlarga ega divergent ko‘rinishdagi parabolik tenglamalar sistemasi orqali ifodalanuvchi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = (u_i^{p_i})_{xx}, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

nochiziqli chegaraviy shartlar

$$\begin{aligned} (u_i^{p_i})_x(0, t) &= u_{i+1}^{q_{i+1}}(0, t), \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ u_{k+1} &:= u_1, \quad q_{k+1} := q_1, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2)$$

uzluksiz, manfiy bob Γ lmagan boshlang Γ ich shartlarga ega

$$u_i(x, 0) = u_{0i}(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad x > 0, \quad (3)$$

reaksiya-diffuziya masalasini qaraymiz, bu yerda $p_i > 1$, $q_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ berilgan sonli parametrlar hisoblanadi.

(1)-(3) nochiziqli reaksiya-diffuziya sistemasi fan va texnikaning turli sohalaridagi amaliy masalalarda keng uchraydi. Jumladan, kimyoviy reaksiyalar, issiqlik tarqalishi yoki populyatsiya dinamikasi kabi jarayonlarni matematik modellashtirishda qo‘llaniladi [1-10].

Biz yuqoridagi (1)-(3) masalani yechimini quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$\bar{u}_i(x, t) = (T + t)^{-\alpha_i} \varphi_i(\xi_i),$$

bu yerda $\xi_i = x(T + t)^{-\lambda_i}$, $x = \frac{\xi_i}{(T+t)^{-\lambda_i}}$.

Ushbu ifodani (1)-(3) ga qo‘yish orqali hisoblashlarni amalga oshiriladi. Natijada quyidagi avtomodel ko‘rinishga kelimiz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi_i} \left(\frac{d\varphi_i^{p_i}}{d\xi_i} \right) + \alpha_i \varphi_i(\xi_i) + \lambda_i \xi_i \frac{d\varphi_i}{d\xi_i} &= 0 \\ - \left(\frac{d\varphi_i^{p_i}}{d\xi_i} \right) (0, t) &= \varphi_{i+1}^{q_{i+1}}(0) \end{aligned} \quad (4)$$

$i = 1, 2, \dots, k.$

Teorema 1. Faraz qilaylik $\xi_i \rightarrow \left(\frac{a_i}{b_i}\right)_-^{1/(p_i-1)}$ bo'lsin, u holda (4) masalaning kompakt yurituvchili (compact support) yechimi quydagi asimptotikaga ega:

$$\varphi_i(x) = \bar{\varphi}(\xi_i)(1 + o(1))$$

bu yerda $\bar{\varphi}_i(\xi_i) = (a_i - b_i \xi_i^2)^{\frac{1}{p_i-1}}$, $a_i > 0$, $b_i = \frac{(p_i-1)}{2p_i} \lambda_i > 0$, $y_{\max} = (0, y)$ $\bar{\varphi}(\xi_i)$ -yuqorida aniqlangan funksiya.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L. Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.
2. Levine, H . The role of critical exponents in blowup theorems, SIAM Rev., 1990, 32(2), 262-288.
3. Xiang, Z.Y., Mu, C.L., and Wang, Y. Critical curve of the non-Newtonian polytropic filtration equations coupled via nonlinear boundary flux, Rocky Mountain J. Math., 2009, 39(2):689–705.
4. Wang, Z.J., Yin, J.X. and Wang, C.P. Critical exponents of the non-Newtonian polytropic filtration equation with nonlinear boundary condition, Appl. Math. Lett., 2007, 20(2): 142–147.
5. Li, Z.P., Cui, Z.J. and Mu, C.L. Critical curves for fast diffusive polytropic filtration equations coupled through boundary, Appl. Anal., 2008, 87(9): 1041–1052.
6. Galaktionov, VA, Levine, HA: On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary conditions on the boundary. Israel J Math. 94, 1250–146 (1996).
7. Z.J.Wang, J.X.Yin and C.P.Wang, Critical exponents of the non-Newtonian polytropic filtration equation with nonlinear boundary condition, Appl. Math. Letters 20, 2007, 142–147.
8. Zhaoyin Xiang, Chunlai Mu and Yulan Wang, Critical curve of the non-newtonian polytropic filtration equations coupled via nonlinear boundary flux, Rocky Mountain Journa of Math, 39, 2009, 689–705.
9. V.A. Galaktionov and H.A. Levine, On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux conditions on the boundary, Israel J. Math. 94, 1996, 125–146.
10. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2019, 12(5), P. 614–620.

The role of mathematical modeling in clinical decision-making and public health policy

Razmukhamedov D. D.¹, Pulatova L. T.²

American University of Technology, Tashkent, Uzbekistan;
drazmukhamedov@aut-edu.uz

Alfraganus university, Tashkent, Uzbekistan;
l.pulatova@afu.uz

Over the last decades, mathematical modeling has become one of the central approaches in modern medicine, physiology, and public health. By integrating diverse datasets and revealing hidden patterns, mathematical models support clinical decision-making and help policymakers optimize strategies for disease prevention and treatment. Historically, the systematic use of mathematical methods in medicine dates to the 19th century. In the 21st century, however, the field has undergone a transformation due to the rise of big data, advanced computational technologies, and the integration of machine learning into clinical practice. The aim of this article is to provide an extended review of mathematical modeling applications in medicine and public health, with emphasis on case studies from Uzbekistan, Russia, and international research.

Background and Literature Review The importance of mathematical modeling is reflected in a wide range of studies Rabbimova et al. (2017) focused on predicting the incidence of cutaneous leishmaniasis in Uzbekistan, which remains a pressing epidemiological issue. Internationally, Volodin et al. (2021) emphasized mathematical modeling as a vital instrument for managing public health problems, ranging from epidemic forecasting to chronic disease management. More recently, Shutova et al. (2024) developed practical models for intraocular pressure prediction during cataract surgery, the diagnosis of diabetic retinopathy using capillaroscopy, and mortality risk assessment for COVID-19 associated pneumonia. Together, these studies highlight the growing role of quantitative methods in both research and practice.

Case 1. Prediction of intraocular pressure (IOP) during cataract surgery:

$$IOP = -21.940 + 8.082X_1 + 4.244X_2 + 2.800X_3$$

where X_1 – lens thickness; X_2 – anterior chamber depth; X_3 – hypoechogenic layer thickness.

Case 2. Logistic regression model for diabetic retinopathy (DR):

$$p = 1/(1 + e^{(-z)}), z = -2.288 + 3.797X_1 + 2.139X_2 - 0.268X_3$$

where X_1 , X_2 , and X_3 are binary indicators representing threshold values for arterial blood flow, venous blood flow, and capillary density.

Case 3. Prediction of mortality probability in COVID-19-associated pneumonia:

$$p = 1/(1 + e^{(-z)}) \times 100, z = 41.477 - 0.951X_1 + 24.081X_2 - 0.493X_3$$

where X_1 – ferritin concentration in blood; X_2 – neutrophil coefficient; X_3 – oxygen saturation (SpO₂). Mathematical modeling has been successfully used to address local and global health challenges. In Uzbekistan, predictive models of leishmaniasis are used to plan preventive measures in endemic regions. In ophthalmology, mathematical models assist in predicting surgical outcomes and early detection of complications. Internationally, during the COVID-19 pandemic, mathematical modeling became indispensable in resource allocation, estimation of intensive care unit (ICU) demand, and development of vaccination strategies. Beyond infectious diseases, modeling has also been applied to chronic conditions such as diabetes, cardiovascular diseases, and cancer, enabling early diagnosis and personalized treatment planning.

Discussion The strengths of mathematical modeling lie in its predictive power, its ability to integrate heterogeneous data, and its potential to provide actionable insights for healthcare systems. Predictive models enable healthcare providers to assess risks before critical events occur, while policymakers can evaluate the effectiveness of interventions before implementation. Nevertheless, there are limitations: the accuracy of models depends heavily on the quality of input data, assumptions underlying the mathematical structure, and the interpretability of the results by clinicians. Interdisciplinary collaboration between mathematicians, physicians, and computer scientists is essential to overcome these challenges. An important frontier is the integration of artificial intelligence (AI) and machine learning into mathematical modeling. While classical models rely on predefined equations, AI methods can adaptively learn patterns from data, offering a new level of precision and personalization. Digital epidemiology, powered by real-time data from electronic health records and mobile devices, represents another promising area where mathematical modeling can transform healthcare practices. Future developments will likely combine traditional modeling techniques with AI-based approaches to create hybrid systems for predictive medicine.

Conclusion Mathematical modeling has proven itself as a powerful and versatile instrument in medicine and public health. From predicting intraocular pressure during cataract surgery to assessing mortality risk in COVID-19 patients, the application of mathematical models demonstrates both scientific depth and clinical relevance. The examples reviewed here emphasize the critical role of modeling not only in research but also in practical healthcare management. The future of mathematical modeling will be closely tied to big data integration, the use of artificial intelligence, and stronger cooperation between healthcare institutions and researchers. Such advancements will increase the accuracy of predictions, improve diagnostics, and support evidence-based policymaking in

global health.

LITERATURE

1. Rabbimova N.T., Suvonkulov U.T., Moskalenko O., Kovalenko D.A., Abdiev F.T. Mathematical modeling and prediction of cutaneous leishmaniasis incidence in Uzbekistan. Problems of Biology and Medicine. 2017. No.1 (93).
2. Volodin A.V., Lutsay E.D., Kononova M.V. Mathematical modeling as an effective tool for managing public health problems-international experience. Orenburg Medical Bulletin. 2021. Vol. IX, No.3.
3. Shutova S.V., Goydin A.P., Savilov P.N. Application of mathematical modeling in physiology and medicine. Biology and Integrative Medicine. 2024. No.3.

SHORT REPORT

Numerical analysis of forced oscillations of the Van der Pol-Airy fractional oscillator

Salimova A. I.¹, Parovik R.I.^{1,2}

¹ National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: asa.salimova.2001@mail.ru

²Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia;

e-mail: parovik@ikir.ru

Let us consider forced oscillations of the fractional van der Pol-Airy oscillator [1]:

$$\frac{1}{\theta^{2-\alpha}} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \frac{\lambda (ax^2(t) + b)}{\theta^{1-\beta}} \partial_{0t}^{\beta} x(t) + ctx(t) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, y(0) = y_0. \tag{1}$$

The fractional differentiation operators in equation (1) are understood in the Gerasimov-Caputo sense of orders $1 < \alpha < 2$ and $0 < \beta < 1$ [2,3]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \partial_{0t}^{\beta} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta}},$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Euler gamma function.

If in equation (1) we take $c = \theta = 1, \delta = 0$, then we arrive at the results obtained in the article of the authors [4]. In the case when $\alpha = 2, \beta = 1$ we arrive at the classical Van der Pol-Airy oscillator. In the case when in (1) $\lambda = 0$ we arrive at the fractional Airy oscillator, which was studied in the article [5]. The

tool for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator (1) is the following nonlocal explicit finite-difference scheme of the first order of accuracy:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = c_1, \\ x_1 = c_1 + \tau c_2, y_0 = c_2, \\ x_{k+1} = \frac{2A + \lambda(ax_k^2 - b)B - \tau k}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} x_k - \frac{A}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} x_{k-1} - \\ - \frac{A \sum_{j=1}^{k-1} \omega_j^\alpha (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1})}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} - \frac{\lambda(ax_k^2 - b)B \sum_{j=1}^{k-1} \omega_j^\beta (x_{k-j+1} - x_{k-j})}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} + \\ + \frac{\delta \cos(k\tau\varphi)}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B}, k = 1, \dots, N - 1. \end{array} \right. \quad (2)$$

where $A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\theta^{2-\alpha}\Gamma(3-\alpha)}$, $B = \frac{\tau^{-\beta}}{\theta^{1-\beta}\Gamma(2-\beta)}$, $\omega_j^\alpha = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$, $\omega_j^\beta = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}$.

The paper proves the stability and convergence theorems of the numerical scheme (2). It is shown that the scheme converges conditionally and is stable with the first order.

The work was carried out within the framework of the framework agreement on cooperation between IKIR FEB RAS and the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan) No. 1118 dated 04.28.2022 (0468/01/22 NTMI) (2022-2027) in physical and mathematical sciences and State assignment of IKIR FEB RAS No. 124012300245-2.

LITERATURE

1. Salimova A.I., Parovik R.I. Forced oscillations of Van der Pol-Airy fractional oscillator // Problem of mechanics. 2025, No. 2. P. 12-18.
2. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20. 790809.
3. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. 2017. vol. 52. P. 3043BГY3052.
4. Salimova A.I., Parovik R.I. Dynamic modes of the Van der Pol-Airy fractional oscillator AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3244. 020006. DOI 10.1063/5.0241421.
5. Parovik R.I. Mathematical modeling of the hereditary Airy oscillator with friction // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical

modeling and programming. 2017. Vol. 10, No. 1. pp. 138-148 DOI: 10.14529/mmp170109.

Optimal implicit difference formulas of Adams-Moulton type in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}$

Shadimetov Kh. M.^{1,2,a}, Karimov R. S.^{3,b}

¹Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

³Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;

^akholmatshadimetov@mail.ru; ^b roziq.s.karimov@gmail.com

We consider the problem of approximate solution to the first order ordinary differential equation

$$y' = f(x, y), \quad x \in [0, 1] \tag{1}$$

with the initial condition

$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

We assume that $f(x, y)$ is a suitable function and the differential equation (1) with the initial condition (2) has a unique solution on the interval $[0, 1]$.

In order to find the approximate solution of problem (1)-(2), we consider a difference formula of the form (see, for example, [1])

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta]\varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^k C_1[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0, \tag{3}$$

where $h = \frac{1}{N}$, N is a natural number, $C[\beta]$ and $C_1[\beta]$ are the coefficients, functions φ belong to the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0, 1)$. The space $W_2^{(2,1)}(0, 1)$ is defined as follows

$$W_2^{(2,1)}(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} | \varphi' \text{ is abs.contunuous, } \varphi'' \in L_2(0, 1)\}$$

equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}} = \left\{ \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

The following difference between the sums given in the formula (3) is called the error of the difference formula

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^k C[\beta]\varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_1[\beta]\varphi'(h\beta). \tag{4}$$

To this error (4) corresponds the error functional

$$\ell(x) = \sum_{\beta=0}^k C[\beta]\delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^k C_1[\beta]\delta'(x - h\beta),$$

where $\delta(x)$ is Dirac's delta-function. We note that (ℓ, φ) is the value of the error functional ℓ at a function φ and it is defined as [2]

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx.$$

For construction of Adams-Moulton type formula we consider the case

$$C[k] = -C[k-1] = 1, \text{ and } C[k-i] = 0, \quad i = \overline{2, k}.$$

In the present work we have the following result.

Theorem 1. *In the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ there exists a unique optimal implicit difference formula of Adams-Moulton type, whose coefficients are determined by formulas*

$$C[\beta] = \begin{cases} 1 & \text{for } \beta = k, \\ -1 & \text{for } \beta = k-1, \\ 0 & \text{for } \beta = \overline{0, k-2}, \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{C}_1[\beta] = \begin{cases} \frac{e^h-1}{h(e^h+1)} & \text{for } \beta = k, \\ \frac{e^h-1}{h(e^h+1)} & \text{for } \beta = k-1, \\ 0 & \text{for } \beta = \overline{0, k-2}. \end{cases}$$

Consequently, the optimal implicit difference formula in $W_2^{(2,1)}(0,1)$ has the form

$$\varphi_{n+k} = \varphi_{n+k-1} + \frac{e^h-1}{e^h+1} (\varphi'_{n+k} + \varphi'_{n+k-1}),$$

where $n = 0, 1, \dots, N-k$, $k \geq 1$.

REFERENCES

1. Babuška I., Vitasek E., Prager M. *Numerical processes for solution of differential equations*. Mir, Moscow, 1969, 369 p.
2. Sobolev S.L. *Introduction to the theory of cubature formulas*. Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

Exponentially weighted quadrature formula extremal element of one exponentially weighted quadrature formula

Shadimetov X.M., Boltaev A.K., Atamuradova B.M.

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;

kholmatshadimetov@mail.ru

Nordic International University, Tashkent, Uzbekistan;

a.boltayev@nordicuniversity.org

Republican specialized technical school for persons with disabilities, Tashkent,
Uzbekistan;

bahsandatamuradova@gmail.com

Consider the following exponentially weighted quadrature formula

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta), \quad (1)$$

with error functional

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta), \quad (2)$$

where C_β are the coefficients of formula (1), $h = 1/N$, N is a natural number, $i^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$ and $\delta(x)$ is the Dirac's delta function, $\varphi(x)$ belongs to the Hilbert space $W_2^{(m,0)}(0,1)$. The norm of functions in this space is defined as follows

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\| = \left[\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \bar{\psi}^{(m)}(x) + \varphi(x) \bar{\psi}(x) \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

where $\bar{\psi}$ is the conjugate function to the function ψ .

The next difference between the integral and the quadrature sum

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx \quad (4)$$

is called the error of the exponentially weighted quadrature formula (1). The error of formula (1) is a linear functional in the space $W_2^{(m,0)*}(0,1)$, where $W_2^{(m,0)*}(0,1)$ is the conjugate space to the space $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

The problem of constructing optimal exponentially weighted quadrature formulas in the space $W_2^{(m,0)}(0,1)$ is the calculation of the following value:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} |W_2^{(m,0)*} \right\| = \inf_{C_\beta} \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\left\| \ell |W_2^{(m,0)*} \right\|}. \quad (5)$$

Therefore, to construct an optimal quadrature formula of the form (1) in the space $W_2^{(m,0)}(0,1)$, we need to solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional ℓ of the quadrature formula (1) in the space $W_2^{(m,0)*}(0,1)$.

Problem 2. Find the coefficients $\overset{\circ}{C}_\beta$ satisfying equality (5).

Now we are solving the first part of this problem, i.e. calculating the norm of the error functional ℓ . For this, we use the concept of the extremal function of the error functional ℓ , introduced by S.L. Sobolev [1].

The function ψ_ℓ for which the equality

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell |W_2^{(m,0)*} \right\| \cdot \left\| \psi_\ell |W_2^{(m,0)} \right\|$$

is called the extremal function of the error functional ℓ .

The following holds

Theorem 1. The extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ of the optimal exponentially weighted quadrature formula (1) has the form:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \bar{\ell}(x) * G_m(x) + Y_m(x),$$

where

$$\begin{aligned} G_m(x) &= \\ &= \frac{\operatorname{sign} x}{2m^2} \cdot \sum_{k=1}^m \left[(1-m) e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \right. \\ &\quad \left. + x e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{2\pi \cdot (2k-1)}{m} \right) \right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Y_m(x) &= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \times \\ &\times \left[r_{1k} \cos \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) \right) + r_{2k} \sin \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

m – is an even natural number, $\bar{\ell}(x)$ – conjugate to $\ell(x)$.

The proof of the Theorem 1 is given in the paper [2].

LITERATURE

1. Sobolev S.L. *Introduction to the theory of cubature formulas*. Moscow: Nauka, 1974.

2. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K., Parovik R. I. Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, No. 3114. P. 1-20.

Explicit Construction of Sard-Optimal Quadrature Formulas in $L_2^{(2)}(a, b)$ on Uniform Grids

Shomalikova. M. Sh.

Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan;
m.shomalikova@centralasian.uz mohinurshomalikova@gmail.com

In numerical analysis, the construction of optimal quadrature formulas plays a crucial role in approximating definite integrals with high accuracy. Particularly, quadrature formulas that are optimal in the sense of Sard minimize the norm of the error functional in appropriate function spaces, such as Sobolev spaces. Numerical integration is a fundamental problem in applied mathematics, where the goal is to approximate the value of definite integrals with high accuracy. Quadrature formulas serve as practical tools for this purpose by replacing integrals with weighted sums of function values and their derivatives at certain nodes. The concept of optimality in quadrature formulas, especially in the sense of Sard, involves minimizing the norm of the error functional in an appropriate function space, such as Sobolev spaces.

This study focuses on the Sobolev space $L_2^{(2)}(a, b)$, which consists of functions with square-integrable second derivatives. In this space, we construct a unique quadrature formula of the form

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{k=0}^n A_{0k}f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k}f'(x_k) + R_n(f),$$

where $g(x)$ is a given weight function, x_k are nodes, and $R_n(f)$ is the remainder term.

Unlike previous works where nodes $[x_{k-1}, x_k]$ were arbitrarily placed, here we impose a uniform partition:

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

with step size $h = \frac{b-a}{n}$. This uniformity enables us to derive explicit closed-form expressions for the coefficients A_{0k} and A_{1k} .

Theorem. In the space $L_2^{(2)}(a, b)$ for each fixed positive integer n , there is a

unique quadrature formula that is optimal in the sense of Sard of the form

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^n A_{0k}f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k}f'(x_k) + R_n(f)$$

with coefficients

$$A_{00} = \frac{48}{35}h^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{0k} = \frac{48h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[k^{\frac{5}{2}}(7 - 4k) + (k - 1)^{\frac{5}{2}}(3 + 4k) \right] \\ + \frac{48h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[(k + 1)^{\frac{5}{2}}(3 - 4k) + k^{\frac{5}{2}}(7 + 4k) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$A_{0n} = 2(nh)^{\frac{1}{2}} - \frac{48h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[(n - 1)^{\frac{5}{2}}(3 + 4n) - n^{\frac{5}{2}}(4n - 7) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

$$A_{10} = \frac{16}{105}h^{\frac{3}{2}}$$

$$A_{1k} = -\frac{48(a + kh)h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[(k + 1)^{\frac{5}{2}}(3 - 4k) + k^{\frac{5}{2}}(7 + 4k) \right]$$

$$- \frac{16h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[(k + 1)^{\frac{5}{2}}(12ka + 12k^2h - 9a - 3kh - h) - \right. \\ \left. - k^{\frac{5}{2}}(12k^2h + 14h + 12ak + 21a + 27kh) \right]$$

$$+ \frac{48h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[k^{\frac{5}{2}}(7 - 4k) + (k - 1)^{\frac{5}{2}}(3 + 4k) \right]$$

$$+ \frac{16h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[k^{\frac{5}{2}}(12k^2h - 27kh + 14h - 21a - 44ak) \right].$$

$$- (k - 1)^{\frac{5}{2}}(12ak + 12k^2h + 9a + 9kh - h)$$

$$A_{1n} = -\frac{4}{3}(nh)^{\frac{3}{2}} + \frac{48(a + nh)h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[n^{\frac{5}{2}}(7 - 4n) - (n - 1)^{\frac{5}{2}}(3 - 4n) \right]$$

$$+ \frac{16h^{\frac{1}{2}}}{105} \left[n^{\frac{5}{2}}(12n^2h + 14h - 44an - 21a - 27nh) - \right.$$

$$\left. - (n - 1)^{\frac{5}{2}}(12an + 9a + 12n^2h + 3nh - h) \right]$$

for fixed $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$ nodes satisfying the inequality $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

The explicit construction of the coefficients of the optimal quadrature formula in the uniform grid setting allows practical implementation for numerical integration in $L_2^{(2)}(a, b)$. The results obtained here generalize previous work by specifying the node distribution and providing concrete formulas, which enhance both the theoretical understanding and computational efficiency.

Some properties of the delayed logistic mappings

Seytov Sh. J.¹, Narziyev N. B.², Xudaybergenova G. K.³

Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
sh-seytov@mail.ru

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent,
Uzbekistan;
jacknod@rambler.ru

Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan;
gulrabortxudaybergenova@gmail.com

In this paper, we investigate the properties of a delayed logistic mapping, which extends the classical logistic map by incorporating a two-step dependence. The mapping under consideration is defined as

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-2}),$$

where λ is the control parameter. We define and analyze fixed points, periodic points, and their stability conditions. We prove that the mapping has two fixed points and establish the stability criteria for these points based on the eigenvalues of the Jacobian matrix. Our findings include conditions under which the system exhibits periodic trajectories and transitions to chaotic behavior. Specifically, we demonstrate that for $\lambda > \frac{9}{4}$, the system exhibits chaotic dynamics, whereas for $\frac{5}{4} < \lambda < \frac{9}{4}$, periodic trajectories emerge. Furthermore, we prove that the mapping does not admit attracting periodic points of period two and three, providing insight into the underlying dynamical behavior. Our study also explores the connection between the mapping and the Julia and Fatou sets, offering a deeper understanding of its topological properties. These results contribute to the broader understanding of delayed dynamical systems and their complex behavior under varying parameter conditions.

The exploration of the dynamics of the function $x \rightarrow \lambda x(1 - x)$ on the real line, along with its various extensions, has been the focus of numerous studies since the pioneering works of R.N. Ganokhodzhaev, Sh.J. Seytov, D.B. Eshmamatova [1], [2]. Initially, Von Neumann and Ulam examined the one-dimensional version of this problem using real variables, and with the advent of computers, the behavior of the trajectories was found to be chaotic. In the present work, we investigate

the generalized setting. In this paper we investigate the delayed logistic mapping as

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-2}).$$

We analyze the discrete dynamical system given by the recurrence relation:

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-2}). \quad (1)$$

Theorem 1: The fixed point $1 - \frac{1}{\lambda}$ is stable for $1 < \lambda < \frac{5}{4}$ and unstable for $\lambda > \frac{5}{4}$.

Theorem 2: The mapping (1) has periodic orbits for $\frac{5}{4} < \lambda < \frac{9}{4}$.

Theorem 3: The mapping (1) has chaotic orbits for $\lambda > \frac{9}{4}$.

Theorem 4: (1) The logistic map does not have the attractive periodic points with periods 2 and 3.

References

1. Sh.J. Seytov, D.B. Eshmamatova, Discrete Dynamical Systems of Lotka-Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem, Lobachevskii Journal of Mathematics, 44 (4), 1471–1485 (2023).
2. D.B. Eshmamatova, Sh.J. Seytov, N.B. Narziev, Basins of Fixed Points for Composition of the Lotka-Volterra Mappings and Their Classification, Lobachevskii Journal of Mathematics, 44 (2), 558–569 (2023).
3. R.N. Ganikhodzhaev, Sh.J. Seytov, Coexistence Chaotic Behavior on the Evolution of Populations of the Biological Systems Modeling by Three Dimensional Quadratic Mappings, Global and Stochastic Analysis, 8 (3), 41–45 (2021).

Kasr tartibli integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formulalar qurish

Toshboyev O. N.

Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;

otajontoshboyev@gmail.com

Hozirgi kunda kasr tartibli integral va hosilalarning, ya’ni umumlashgan Abel integral tenglamasining amaliy ahamiyatini ta’kidlash zarur. Abelning mashhur tautoxon muammosidan keyin [1], bu muammoning yechimi birinchi marta Liouville [2] tomonidan geometriya, fizika va mexanika masalalariga qo’llanilgan. So‘nggi yillarda kasr tartibli integral tenglamalarni, differensial tenglamalar, integral tenglamalar, tabiiy jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellar sifatida qaralgan. Bunday tenglamalar yechimlarining turli fazolarda mavjudligi va o‘ziga xosligi keng o‘rganiladi. Biroq, aksariyat hollarda bu

tenglamalarning analitik yechimini topish qiyin. Shuning uchun kasr integral tenglamalar, integrodifferensial va differentsial tenglamalarni taqribiy yechishning yangi samarali usullarini ishlab chiqish muhim ahamiyatga ega. Shuni ta’kidlash kerakki, Sobolev va H.M. Shodimetov tomonidan panjara kvadratur va kubatura formulalarini optimallashtirish masalalari ko’rib chiqilgan. [3] ishda $L_2^{(1)}(t, 1)$ fazoda optimal kvadratur formulaning xatolik funksional normasining kvadrati hisoblangan.

Ushbu ishda quyidagi kvadratur formulani ko’rib chiqaylik

$$\int_t^1 \frac{\varphi(x)dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N (C_0[\beta]\varphi(h\beta+t) + C_1[\beta]\varphi'(h\beta+t)), \quad (1)$$

va shunga ko’ra, uning xatolik funksionali

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[t,1]}(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\delta(x-x_\beta) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\delta'(x-x_\beta), \quad (2)$$

bu yerda $0 < t < 1$, $C[\beta]$ -koeffisientlar va $x_\beta = (h\beta+t) (\in [t, 1])$ - kvadratur formulaning tugunlari, N -natural son, $\varepsilon_{[t,1]}(x) - [t, 1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, δ -Dirakning delta funksiyasi, $\varphi - L_2^{(2)}(t, 1)$ fazoga tegishli funksiya.

Bu yerda $L_2^{(2)}(t, 1)$ Sobolev fazosi bo’lib, 1-tartibli umumlashgan hosilasi kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosidir. Bu fazoda funksiyaning normasi quyidagicha kiritiladi

$$\|\varphi | L_2^{(2)}(t, 1)\| = \left\{ \int_t^1 (\varphi''(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$L_2^{(2)}(t, 1)$ fazoda aniqlangan (2) funksional uchun quyidagi shartlarni bajarishi zarur

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \quad (3)$$

Shunday qilib, (1) ko’rinishidagi kvadratur formulalari mavjudligi uchun $N \geq 1$ sharti bajarilishi kerak.

Shuni ta’kidlash kerakki, $\ell(x)$ xatolik funksionali normasini tugun nuqtalarni fiksirlagan holda minimallashtirish Sard masalasi deb ataladi va olingan formula Sard ma’nosidagi optimal kvadratur formula deb ataladi. Birinchi marta bu masala A. Sard tomonidan o’rganilgan.

Teorema 1. $L_2^{(2)}(t, 1)$ fazoda (1) kvadratur formula normasining kvadrati teng taqsimlangan tugunlarda quyidagi shaklga ega

$$\|\ell | L_2^{(m)*}\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \sum_{v=0}^p \sum_{v'=0}^p C_\beta^{(v)} C_\gamma^{(v')} (-1)^{(v)} G_m(x_\beta - x_\gamma) - \right.$$

$$\left. -2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\nu=0}^p (-1)^{(\nu)} C_{\beta}^{(\nu)} f_m^{(\nu)}(x_{\beta}) + \frac{(1-t)^{2\alpha+2m-1}}{2(\alpha+2m-1)!(2\alpha+2m-1)} \right]. \quad (4)$$

Biz yuqoridagi teoremani o'rganib chiqdik va uni Koshi tipidagi singulyar integrallarni taqribiy sonli hisoblashga tadbiiq qildik.

ADABIYOTLAR

1. Abel N. *Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies*, Qesammelte matematishe werke., Leipzig: Tenbner, 1881.T.1, pp 11-27.
2. Liouville J. *Memoire sur quelques Questions de Geometrie et de Mecanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour resoudre ces Questions*, Journal de l'ecole Polytechnique, 1832, T.13, sect.21, pp1-69.
3. Sobolev S.L. *Introduction to the theory of cubature formulas*. M., 1974, 808 p.
4. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. *Cubature formulas*. Novosibirsk publishing house SORAN, 1996, 448 p.
5. Shadimetov Kh.M. *Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces*. Tashkent, 2019, 224 p.
6. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Toshboev O.N., *Optimal quadrature formulas for the approximate calculation of the Riemann-Liouville fractional order integral*. AIP Conf. Proc. 3004, 060041 (2024)
7. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Toshboev O.N. *Optimal methods for approximate calculation of the fractional Riemann-Liouville integral in Sobolev space*. AIP Conf. Proc. 3147, 030031 (2024)

Weighted optimal quadrature formulas with derivatives

Usmanov Kh. I.

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
hojiakbar170853@mail.ru

An important practical goal of computational mathematics is to create the best, i.e. the fastest and cheapest ways to solve mathematical problems. In other words, optimization of computational algorithms. Optimization of computational algorithms is well demonstrated by examples of constructing cubature and quadrature formulas on a functional statement.

Let us consider the following theorem [1].

Theorem 1. In the Sobolev space, the following quadrature formula is an optimal quadrature formula

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N \sum_{\nu=0}^{m-1} C_{\beta}^{(\nu)} \varphi^{(\nu)}(x_{\beta}),$$

where

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}^{(k)} [0] &= \frac{p_k}{2} + (-1)^k h^{-1} [F_k[1] - F_k[0]], \\ \overset{\circ}{C}^{(k)} [\beta] &= (-1)^k h^{-1} [F_k[\beta - 1] - 2F_k[\beta] + F_k[\beta + 1]], \\ \overset{\circ}{C}^{(k)} [N] &= \frac{p_k}{2} + (-1)^k h^{-1} [F_k[N - 1] - F_k[N]], \end{aligned}$$

Here $p(x)$ is a weight function, $\varphi(x)$ is a function from $L_2^{(m)}(0, 1)$, $x_\beta = \beta h$ ($\beta = \overline{0, N}$), h is the grid step, $C_\beta^{(k)}$ are coefficients of the quadrature formula.

From Theorem 1, after some simplifications, we obtain the following results in the spaces $L_2^{(1)}$, $L_2^{(2)}$, $L_2^{(3)}$.

Theorem 2. In the Sobolev space $L_2^{(1)}(0, 1)$, the following quadrature formula is the optimal quadrature formula

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta^{(0)} \varphi^{(0)}(x_\beta),$$

where

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}^{(0)} [0] &= h^{-1} \int_0^h p(x)(h - x)dx, \\ \overset{\circ}{C}^{(0)} [\beta] &= h^{-1} \int_{h(\beta-1)}^{h(\beta+1)} p(x)[(h\beta - x)\text{sign}(x - h\beta) + h]dx, \\ \overset{\circ}{C}^{(0)} [N] &= h^{-1} \int_{1-h}^1 p(x)(x - 1 + h)dx. \end{aligned}$$

Theorem 3. In the Sobolev space $L_2^{(2)}(0, 1)$ the optimal quadrature formula is the following formula

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N \left(C_\beta^{(0)} \varphi^{(0)}(x_\beta) + C_\beta^{(1)} \varphi^{(1)}(x_\beta) \right),$$

where

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}^{(1)} [0] &= \frac{h^{-1}}{2} \int_0^h p(x)(h - x)x dx, \\ \overset{\circ}{C}^{(1)} [\beta] &= \frac{h^{-1}}{2} \int_{h(\beta-1)}^{h(\beta+1)} p(x)[(x - h\beta)^2 \text{sign}(x - h\beta) + h(x - h\beta)] dx, \\ \overset{\circ}{C}^{(1)} [N] &= \frac{h^{-1}}{2} \int_{1-h}^1 p(x)(x - 1 + h)(x - 1) dx. \end{aligned}$$

Theorem 4. The optimal coefficients $C^{(2)}[\beta]$ of the quadrature formula of the form

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N \left(C_{\beta}^{(0)}\varphi^{(0)}(x_{\beta}) + C_{\beta}^{(1)}\varphi^{(1)}(x_{\beta}) + C_{\beta}^{(2)}\varphi^{(2)}(x_{\beta}) \right),$$

in the space $L_2^3(0, 1)$ are determined by the formulas

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[0] = \frac{h^{-1}}{12} \int_0^h p(x)(h-x)x(2x-h)dx,$$

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[\beta] = \frac{h^{-1}}{12} \int_{h(\beta-1)}^{h(\beta+1)} p(x)[(2(x-h\beta))^3 + h^2(x-h\beta)]\text{sign}(h\beta-x) + 3h(x-h\beta)^2]dx,$$

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[N] = \frac{h^{-1}}{12} \int_{1-h}^1 p(x)(x-1+h)(x-1)(2x+h-1)dx.$$

Here the coefficients $C^{(0)}[\beta]$ and $C^{(1)}[\beta]$ are defined in Theorems 2 and 3.

REFERENCES

1. Shadimetov Kh. M., Usmanov Kh. I. Weighted optimal quadrature formulas in Sobolev space and their applications. Algorithms, MDPI, 2025, 18, 374.

Compact finite difference schemes for one-dimensional and two-dimensional quasilinear equations

Utebaev B. D.

Karakalpak state university named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan;
bakhadir1992@gmail.com

The report is devoted to new algorithms of the fourth order of approximation, preserving the property of conservatism for one-dimensional and two-dimensional stationary quasilinear reaction-diffusion equations. A priori estimates of the difference solution in the nonlinear case for a one-dimensional quasilinear equation are obtained based on the established two-sided estimates of the grid solution. The undoubted advantages of the proposed difference schemes are: sufficient simplicity of the algorithm during their implementation, monotonicity and conservatism. It should also be noted that the difference scheme should reflect the main properties of a continuous medium. Therefore, it is natural to require that the difference analogs of the main conservation laws valid for the original continuous mathematical model are fulfilled in the scheme first of all. Difference schemes with this property are called conservative.

The importance of the requirement for the conservatism of the scheme was noted in the early 1950s by A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii [1]. They proposed an integro-interpolation method for constructing conservative difference schemes and constructed an example where a non-conservative scheme that ensures the second order of convergence in the class of sufficiently smooth coefficients diverges in the class of discontinuous coefficients [2]. Thus, preserving the properties of conservatism is a necessary condition for the convergence of a difference solution to an exact solution of a differential problem in the class of generalized solutions.

For the linearization of the difference schemes proposed in the work, an iterative method of the Newton-Seidel type is used, preserving the conservatism and monotonicity of the $(s + 1)$ th iteration. The main idea of implementing these schemes is based on the possibility of parallelizing the computational process. First, the solution is found in even nodes, and then in odd ones. The problems of finding additional boundary conditions at boundary nodes in both one-dimensional and two-dimensional cases are solved using Newton's interpolation polynomial. The presented results of computational experiments demonstrate the increased order of the constructed algorithms [3].

LITERATURE

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Convergence of difference schemes in the class of discontinuous coefficients // Dokl. AN SSSR. 1959. Vol. 124, No. 3. P. 1529–1532.
2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Homogeneous difference scheme // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1961. Vol. 1, No. 1. P. 5–67.
3. Matus P.P., Gromyko G.Ph., Utebaev B.D., Tuyen V.T.K. Conservative compact and monotone fourth-order difference schemes for one-dimensional and two-dimensional quasilinear equations // Differential equations. 2025. Vol. 61, No. 8. P. 1117–1134.

Dynamics and applications of the non-Volterra quadratic operator

Yusupov F. A., Eshkabilov A. A.

Tashkent State transport university, Tashkent, Uzbekistan;
 farrukhyusupovchambil@mail.ru
 alisher.eshqobilov@yandex.com

Put $V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ is a quadratic stochastic operator (QSO) [1],

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

let it be defined in the simplex, namely

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1)$$

here $P_{ij,k} \geq 0$, $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ and, evidently

$$\sum_{k=1}^n P_{ij,k} = 1, \quad \forall k = \overline{1, n} \quad (2)$$

QSO is called a strict non-Volterra operator if the following condition is satisfied:

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{for any } k \in \{i, j\} \quad (3)$$

Definition 1.[1] If condition (3) is not satisfied only for $P_{ii,i}$, i.e., $P_{ii,i} > 0$, then QSO V defined in S^{n-1} is called a quasi-strict non-Volterra operator.

Definition 2.[2] The solution of the equation $W(x) = x$, $\forall x \in S^2$ is called the fixed point of the operator, and the set of fixed points is denoted (defined) in the following way:

$$Fix(W) = \{x \in S^2 : W(x) = x\}$$

Definition 3.[2–4] A hyperbolic fixed point x is said to be

- (i) attracting if absolute values of all eigenvalues of the Jacobi matrix $J(x)$ are less than one;
- (ii) repulsive if absolute values of all eigenvalues of the Jacobi matrix $J(x)$ are greater than one;
- (iii) otherwise, it is called a saddle-type fixed point.

Results and Discussion. In this article, we restrict ourselves to the study of quasi-strictly non-Volterra operators defined in S^2 , which have the following form

$$W : \begin{cases} x'_1 = P_{11,1}x_1^2 + P_{22,1}x_2^2 + P_{33,1}x_3^2 + 2P_{23,1}x_2x_3, \\ x'_2 = P_{11,2}x_1^2 + P_{22,2}x_2^2 + P_{33,2}x_3^2 + 2P_{13,2}x_1x_3, \\ x'_3 = P_{11,3}x_1^2 + P_{22,3}x_2^2 + P_{33,3}x_3^2 + 2P_{12,3}x_1x_2, \end{cases} \quad (4)$$

where assuming

$$P_{11,1} = P_{22,1} = P_{33,1} = \alpha; P_{11,2} = P_{22,2} = P_{33,2} = \beta; P_{11,3} = P_{22,3} = P_{33,3} = \gamma$$

operator (4) can be represented as:

$$W : \begin{cases} x'_1 = \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_2x_3, \\ x'_2 = \beta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_3, \\ x'_3 = \gamma(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2. \end{cases} \quad (5)$$

where $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.

Theorem. If $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$, $\beta \in [0; \frac{1}{2}]$, $\gamma \in [0; 1]$, then operator (5) has a single fixed point and the fixed point will be attractor .

Urban transport network modeling: We recommend the following implementation for operator (5):

$$W : \begin{cases} H' = \alpha(H^2 + M^2 + B^2) + 2MB, \\ M' = \beta(H^2 + M^2 + B^2) + 2HB, \\ B' = \gamma(H^2 + M^2 + B^2) + 2HM. \end{cases} \quad (6)$$

where

- (i) H, M, B – three main routes (H –highways, M – metro lines, B – bus lines);
- (ii) $H^2 + M^2 + B^2$ – the overall load or occupancy level of the transportation system;
- (iii) $2MB, 2HB, 2HM$ – passenger flow or pressure from one transport route to another;
- (iv) H', M', B' – rates of change;
- (v) α, β, γ – internal parameters that affect each part of the system (e.g., road capacity, passenger numbers, resource availability).

References

1. Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 92–100.
2. Eshmatova DB, Ganikhodzhaev RN. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . *International AIP Conference Proceedings*; Tashkent, Uzbekistan; 2021; 2365 (1): 060009-1-06000-6. <https://doi.org/10.1063/5.0057303>.
3. Khamraev A. Yu. On cubic operators of Volterra type. *Uzbek. Math. Zh.*, 2004, no. 2, pp. 79–84. (in Russian).
4. Devaney R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, stud. Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO 2003.

Dynamics and applications of the non-Volterra cubic operator

Yusupov F.A., Islomova M.N., Bobokulova M.A.

Tashkent State transport university, Tashkent, Uzbekistan;
farrukhyusupovchambil@mail.ru; professormarjona25@gmail.com;
marjonaboboqulovamath@gmail.com

Put $V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ is a cubic stochastic operator (CSO) [1],

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

let it be defined in the simplex, namely

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i,j,k=1}^n P_{ijk,l} x_i x_j x_k, i, j, k = \overline{1, n} \quad (1)$$

here $P_{ijk,l} \geq 0, P_{ijk,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} = P_{kji,l} = P_{kij,l} = P_{ikj,l}$ and, evidently

$$\sum_{l=1}^n P_{ijk,l} = 1, \quad \forall l = \overline{1, n} \quad (2)$$

CSO is called a strict non-Volterra operator if the following condition is satisfied:

$$P_{ijk,l} = 0 \quad \text{for any } l \in \{i, j, k\} \quad (3)$$

Definition 1.[1] If condition (3) is not satisfied only for $P_{iii,i}$, i.e., $P_{iii,i} > 0$, then CSO V defined in S^{n-1} is called a quasi-strict non-Volterra operator.

Definition 2.[2] The solution of the equation $W(x) = x, \forall x \in S^2$ is called the fixed point of the operator, and the set of fixed points is denoted (defined) in the following way:

$$Fix(W) = \{x \in S^2 : W(x) = x\}$$

Definition 3.[2–4] A hyperbolic fixed point x is said to be

- (i) attracting if absolute values of all eigenvalues of the Jacobi matrix $J(x)$ are less than one;
- (ii) repulsive if absolute values of all eigenvalues of the Jacobi matrix $J(x)$ are greater than one;
- (iii) otherwise, it is called a saddle-type fixed point.

Results and Discussion. In this article, we restrict ourselves to the study of

quasi-strictly non-Volterra operators defined in S^2 , which have the following form

$$\begin{cases} x'_1 = P_{111,1}x_1^3 + P_{222,1}x_2^3 + P_{333,1}x_3^3 + 3P_{233,1}x_2x_3^2 \\ \quad + 3P_{223,1}x_2^2x_3 + 2P_{123,1}x_1x_2x_3, \\ x'_2 = P_{111,2}x_1^3 + P_{222,2}x_2^3 + P_{333,2}x_3^3 + 3P_{113,2}x_1^2x_3 \\ \quad + 3P_{133,2}x_1x_3^2 + 2P_{123,2}x_1x_2x_3, \\ x'_3 = P_{111,3}x_1^3 + P_{222,3}x_2^3 + P_{333,3}x_3^3 + 3P_{112,3}x_1^2x_2 \\ \quad + 3P_{122,3}x_1x_2^2 + 2P_{123,3}x_1x_2x_3, \end{cases} \quad (4)$$

where assuming

$$P_{111,1} = P_{222,1} = P_{333,1} = \alpha; P_{111,2} = P_{222,2} = P_{333,2} = \beta;$$

$$P_{111,3} = P_{222,3} = P_{333,3} = \gamma; P_{123,1} = a; P_{123,2} = b; P_{123,3} = c$$

operator (4) can be represented as:

$$W : \begin{cases} x'_1 = \alpha(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3x_2x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 2ax_1x_2x_3, \\ x'_2 = \beta(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 2bx_1x_2x_3, \\ x'_3 = \gamma(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 2cx_1x_2x_3. \end{cases} \quad (5)$$

where $\alpha + \beta + \gamma = 1, a + b + c = 1, \forall 0 \leq \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \leq 1$.

Urban transport network modeling: We recommend the following implementation for operator (5):

$$W : \begin{cases} H' = \alpha(H^3 + M^3 + B^3) + 3M^2B + 3MB^2 + 2aHMB, \\ M' = \beta(H^3 + M^3 + B^3) + 3H^2B + 3HB^2 + 2bHMB, \\ B' = \gamma(H^3 + M^3 + B^3) + 3H^2M + 3HM^2 + 2cHMB. \end{cases} \quad (6)$$

where

- (i) H, M, B – three main routes (H –highways, M – metro lines, B – bus lines);
- (ii) $H^3 + M^3 + B^3$ – the overall load or occupancy level of the transportation system;
- (iii) $(x_i x_j^2 + x_i^2 x_j)$ – Nonlinear coupling between two routes, where

$$x_i \in \{H, M, B\}, x_j \in \{H, M, B\}, i \neq j$$

- (iv) H', M', B' – rates of change;
- (v) α, β, γ – Primary transport intensity in each direction;
- (vi) a, b, c –Interdependency (network effect) coefficients.

REFERENCES

1. Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 92–100.

2. Eshmamatova DB, Ganikhodzhaev RN. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . International AIP Conference Proceedings; Tashkent, Uzbekistan; 2021; 2365 (1): 060009-1-06000-6. <https://doi.org/10.1063/5.0057303>.
3. Khamraev A. Yu. On cubic operators of Volterra type. Uzbek. Math. Zh., 2004, no. 2, pp. 79–84. (in Russian).
4. Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical systems, stud. Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO 2003.

Численное исследование смешанной задачи для гиперболической системы с динамическими граничными условиями

Алоев Р. Д., Овлаева М. Х.

Мирзо Улугбековский Национальный университет Узбекистана, Ташкент,
Узбекистан;
aloevr@mail.ru
mohinur1009@gmail.com

Данная статья посвящена исследованию численного решения смешанной задачи для одного гиперболического уравнения с динамическими граничными условиями.

Для численного решения смешанной задачи предложена неявная разностная схема, и исследована еще экспоненциальная устойчивость. Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения основано на построении дискретной функции Ляпунова, предложенной в данной статье. В работе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости численного решения смешанной задачи.

Предложен алгоритм нахождения численного решения смешанной задачи. Полученные численные результаты представлены в виде таблиц и графиков с использованием программного интерфейса GIPTS-D, написанного на языке программирования Python. Численные результаты полностью подтверждают теоретические результаты об экспоненциальной устойчивости численного решения. Keywords: hyperbolic equation, mixed problem, dynamic boundary conditions, exponential stability, Lyapunov function

LITERATURE

1. Berdyshev, A.; Alov, R.; Abdiramanov, Z.; Ovlayeva, M. An Explicit-Implicit Upwind Difference Splitting Scheme in Directions for a Mixed Boundary Control Problem for a Two-Dimensional Symmetric t-Hyperbolic System. Symmetry 2023, 15, 1863.
2. Alov R.D., Ovlayeva M.Kh. Construction and study of the stability of a difference scheme for a linear hyperbolic system with dynamic boundary.

Uzbek Mathematical Journal 2023, Volume 67, Issue 2, pp.17-24 DOI: 10.29229/uzmj.2023-2-2

Численное моделирование диффузионных процессов в двухкомпонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником

Арипов М. М.¹, Нигманова Д. Б.², Нигманов Б. В.³

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
mirsaidaripov@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
dill198912@gmail.com

³Ташкентский архитектурно-строительный университет;
b.nigmanov@gmail.com

В данной работе рассматривается задача Коши в области $Q = \{(t, x) : 0 < t, x \in R^N\}$ для системы реакции-диффузии с двойной нелинейностью с переменной плотностью

$$\begin{aligned} |x|^{-l} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \left(|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^{l_1} \right) + |x|^{-l} \varepsilon u^{p_1} v^{q_1}, \\ |x|^{-l} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla \left(|x|^n v^{m_2-1} |\nabla v^k|^{p-2} \nabla v^{l_2} \right) + |x|^{-l} \varepsilon u^{p_2} v^{q_2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$[u(0, x) = u_0(x) \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0, x \in R^N, \tag{1}$$

где, $k \in R, m_1, m_2 > 1, p_i, q_i \geq 1, p \geq 2$ положительные действительные числа, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$ и $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0$ - нетривиальная, неотрицательная, ограниченная и достаточно гладкая функция.

В настоящей работе, качественные свойства решений системы (1) изучаются на основе автомодельного и приблизительно автомодельного подхода. Мы устанавливаем одну границу критического показателя, и свойство конечной скорости возмущений (КСВ) для системы (1). Асимптотическое свойство финитных решений (с.ф.р.) рассматриваемой проблемы и поведение свободной границы для случая $m_i + l_i + k(p-2) - 1 > 0, i = 1, 2$. Доказано существование решения с конечными свойствами. Получены асимптотики автомодельного решения для быстрой диффузии в случае $(m_i + l_i + k(p-2) - 1 < 0, i = 1, 2)$ и также изучены в критическом случае $m_i + l_i + k(p-2) - 1 = 0, i = 1, 2$. При численном решении задачи уравнение аппроксимировалось на сетке по неявной схеме переменных направлений (для многомерного случая) в сочетании с методом баланса. Итерационные процессы строились на основе метода

Пикара, Ньютона и специальной линеаризации. В специальном случае линеаризации для итерации члены системы (1) представляются как

$$u_i^{p_1} v_i^{q_1} \sim u_{i-1}^{p_1-1}(t) u \cdot v_{i-1}^{p_1-1}(t) v, \quad u_i^{p_2} v_i^{q_2} \sim u_{i-1}^{p_2-1}(t) u \cdot v_{i-1}^{q_2-1}(t) v, \quad i = 1, 2$$

, где $u_0(t)$, $v_0(t)$ решения системы обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du_0}{dt} = -u_0^{p_1} v_0^{q_1}, \quad \frac{dv_0}{dt} = -u_0^{q_2} v_0^{q_2}$$

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что все перечисленные итерационные методы эффективны для решения нелинейных задач и приводят к нелинейным эффектам, если в качестве начального приближения использовать решения автомодельных уравнений, построенные методом нелинейного расщепления и методом стандартное уравнение [3, 4].

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samarskiy AA, Sobol IM// *Examples of the numerical calculation of temperature waves*. Zh. Vychisl. mat, and mat. fiz., 1963, 3, No. 4, 702-719.
2. Арипов М.М., Садуллаева Ш.А// *К свойствам решений системы реакции диффузии с двойной нелинейностью, переменной плотностью и источником*. ДАН РУз, 2016 г.
3. Kersner R, Reyes J. Tesei A. *One a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absorption* Advances Dif. Equations 2002, vol. 7, 155-176.
4. Aripov M. // *Approximate Self-similar Approach for Solving of Quasilinear Parabolic Equation, Experimentation, Modeling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion*. Wiley, 1997, vol. 2 , 19-26

Построение тригонометрических базисных функций над конечными прямоугольными элементами

Дониёров Н.Н.

Институт Математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан;
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
doniyorovnn@mail.ru

В данной работе мы построим локальные тригонометрические базисные функции, определенные в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Для этого рассмотрим разбиение области Ω

$$\Delta_{h_1, h_2} := \left\{ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1, \quad x_{i+1} - x_i = h_1 \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \right.$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1, y_{j+1} - y_j = h_2 j = 0, 1, \dots, n - 1 \left. \vphantom{0 = y_0} \right\}.$$

Из точек x_i ($i = 0, 1, \dots, m$) и y_j ($j = 0, 1, \dots, n$) этого деления проведем прямые, параллельные осям ординат и абсцисс соответственно. В результате область Ω разбивается на конечные элементы $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m - 1, j = 0, 1, \dots, n - 1$). Здесь точки (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) называются вершинами (или узлами) конечных элементов.

Справедлива следующая теорема ([1]).

Теорема 1. *Локальные кусочно тригонометрические базисные функции $\varphi_{i,j}(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$), определенные в области Ω , имеют следующий вид:*

$$\varphi_{0,0}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_1)}{\sin(\omega_1 x_0 - \omega_1 x_1)} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_1)}{\sin(\omega_2 y_0 - \omega_2 y_1)}, & x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}$$

$$\varphi_{0,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_1)}{\sin(\omega_1 x_0 - \omega_1 x_1)} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j-1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j-1})}, & x_0 \leq x \leq x_1, y_{j-1} \leq y \leq y_j, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_1)}{\sin(\omega_1 x_0 - \omega_1 x_1)} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j+1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j+1})}, & x_0 \leq x \leq x_1, y_j \leq y \leq y_{j+1}, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\varphi_{0,n}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_1)}{\sin(\omega_1 x_0 - \omega_1 x_1)} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{n-1})}{\sin(\omega_2 y_n - \omega_2 y_{n-1})}, & x_0 \leq x \leq x_1, y_{n-1} \leq y \leq y_n, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}$$

$$\varphi_{i,0}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i-1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_1)}{\sin(\omega_2 y_0 - \omega_2 y_1)}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_0 \leq y \leq y_1, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i+1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i+1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_1)}{\sin(\omega_2 y_0 - \omega_2 y_1)}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_0 \leq y \leq y_1, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m - 1,$$

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i-1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j-1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j-1})}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i-1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j+1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j+1})}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq y_{j+1}, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i+1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i+1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j-1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j-1})}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{j-1} \leq y \leq y_j, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i+1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i+1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j+1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j+1})}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& i = 1, 2, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, n-1, \\
\varphi_{i,n}(x, y) = & \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i-1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{n-1})}{\sin(\omega_2 y_n - \omega_2 y_{n-1})}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{n-1} \leq y \leq y_n, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{i+1})}{\sin(\omega_1 x_i - \omega_1 x_{i+1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{n-1})}{\sin(\omega_2 y_n - \omega_2 y_{n-1})}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{n-1} \leq y \leq y_n, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases} \\
& i = 1, 2, \dots, m-1, \\
\varphi_{m,0}(x, y) = & \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{m-1})}{\sin(\omega_1 x_m - \omega_1 x_{m-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_1)}{\sin(\omega_2 y_0 - \omega_2 y_1)}, & x_{m-1} \leq x \leq x_m, y_0 \leq y \leq y_1, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases} \\
\varphi_{m,j}(x, y) = & \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{m-1})}{\sin(\omega_1 x_m - \omega_1 x_{m-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j-1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j-1})}, & x_{m-1} \leq x \leq x_m, y_{j-1} \leq y \leq y_j, \\ \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{m-1})}{\sin(\omega_1 x_m - \omega_1 x_{m-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{j+1})}{\sin(\omega_2 y_j - \omega_2 y_{j+1})}, & x_{m-1} \leq x \leq x_m, y_j \leq y \leq y_{j+1}, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases} \\
& j = 1, 2, \dots, n-1, \\
\varphi_{m,n}(x, y) = & \begin{cases} \frac{\sin(\omega_1 x - \omega_1 x_{m-1})}{\sin(\omega_1 x_m - \omega_1 x_{m-1})} \frac{\sin(\omega_2 y - \omega_2 y_{n-1})}{\sin(\omega_2 y_n - \omega_2 y_{n-1})}, & x_{m-1} \leq x \leq x_m, y_{n-1} \leq y \leq y_n, \\ 0, & \text{при всех других значениях аргументов,} \end{cases}
\end{aligned}$$

где ω_1 и ω_2 являются элементами множества $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Следует отметить, что базисные функции $\varphi_{i,j}(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) могут быть использованы в методах конечных элементов ([2]).

REFERENCES

1. Hayotov A. R., Doniyorov N. N. Construction of an optimal interpolation formula exact for trigonometric functions. // Modern problems of applied mathematics and information technology, Bukhara, 2024. AIP Conference Proceedings. -pp. 06051-1-06051-11.
2. Hayotov A., Doniyorov N. Basis functions for finite element methods. // Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, No 5. -pp. 31-44.

О практичных асимптотически оптимальных кубатурных формул в пространстве Соболева $\bar{L}_p^{(m)}(S_n)$

Жалолов О. И.^{1,a}, Хаятов Х. У.^{1,b}

¹Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;

^a o_jalolov@mail.ru; o.i.jalolov@buxdu.uz;

^b wera00@mail.ru; x.u.xayatov@buxdu.uz

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например, ([1-5]).

В настоящей работе рассматриваются формулы под названием практичные асимптотически оптимальные кубатурные формулы в пространстве Соболева $\bar{L}_p^{(m)}(S_n)$.

Для решение поставленной задачи, с начало определим пространство $L_p^{(m)}(S_n)$.

Определение 1. Пространство $L_p^{(m)}(S_n)$ определяется как пространство функций, заданных на n - мерном единичном S_n и имеющих все обобщённые производные порядка m , суммируемые со степенью p в норме [1]:

$$\|f(\theta)|L_p^{(m)}(S_n)\| = \left\{ \int_{S_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} [D^\alpha f(\theta)]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

со скалярным произведением

$$(f(\theta), \varphi(\theta))_{L_p^{(m)}(S_n)} = \left\{ \int_{S_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} [D^\alpha f(\theta)]^{\frac{p}{2}} \cdot [D^\alpha \varphi(\theta)]^{\frac{p}{2}} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_S f(\theta) d\theta \approx \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda f(\theta^{(\lambda)}) \quad (2)$$

над пространством $L_p^{(m)}(S_n)$. Кубатурной формулы (2) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(\theta) = \varepsilon_{S_n}(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}) \quad (3)$$

и назовём её функционалом погрешности, где $\delta(\theta)$ - дельта - функция Дирака, C_λ и $\theta^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы (2).

Теперь в место пространство $L_p^{(m)}(S_n)$ будем рассматривать пространство $\bar{L}_p^{(m)}(S_n)$, а норму определим следующим образом

Определение 2. Пространства $\bar{L}_p^{(m)}(S_n)$ - определяется как пространство функций заданных на S_n и норма функций, которая определяется следующим равенством

$$\left\| f(\theta) | \bar{L}_p^{(m)}(S_n) \right\| = \left\{ \int_{S_n} \left(\frac{\partial^m f(\theta)}{\partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2} \dots \partial \theta_n^{m_n}} \right)^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, $m_i > 0$, $i = \overline{1, n}$

со скалярным произведением

$$(f(\theta), \varphi(\theta))_{\bar{L}_p^{(m)}(S_n)} = \left\{ \int_{S_n} \left(\frac{\partial^m f(\theta)}{\partial \theta^m} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\partial^m \varphi(\theta)}{\partial \theta^m} \right)^{\frac{p}{2}} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $\partial \theta^m = \partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2} \dots \partial \theta_n^{m_n}$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n$.

Теперь докажем следующую теорему, который является основным результатом.

Теорема. Если для функционала погрешности (3) кубатурной формулы (2) над пространством $\bar{L}_p^{(m)}(S_n)$ выполняется условие Декартовых произведений [5], т.е.

$$\ell_N(\theta) = \ell_{N_1}(\theta_1) \otimes \ell_{N_2}(\theta_2) \otimes \dots \otimes \ell_{N_n}(\theta_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(\theta_i) | \bar{L}_p^{(m_i)*}(\omega_i) \right\| \leq d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad (5)$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(\theta_i) | \bar{L}_p^{(m_i)*}(\omega_i) \right\| \leq d_i \cdot o(h^{m_i}), \quad d_i - \text{константы, } (i = \overline{1, n}) \quad (6)$$

то

$$\left\| \ell_N(\theta) | \bar{L}_p^{(m)*}(S_n) \right\| \leq d \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i^{m_i}}, \quad (7)$$

или

$$\left\| \ell_N(\theta) | \bar{L}_p^{(m)*}(S_n) \right\| \leq d \cdot o(h^m)$$

где

$$\ell_{N_i}(\theta_i) = \varepsilon_{\omega_i}(\theta_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i} \delta(\theta_i - \theta_i^{(\lambda_i)}), \quad \omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

Таким образом отсюда следует, что кубатурной формулы (3) над фактор пространством Соболева $\bar{L}_p^{(m)*}(S_n)$ с функционала погрешности (4), является асимптотические оптимальные.

Литература

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М: Наука, 1974, 808 с.
2. Салихов Г.Н. *Кубатурные формулы для многомерных сфер*. Ташкент: Фан, 1985 - 104 с.
3. Шарипов Т.Х. *Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования кандидатская диссертация*. Ташкент: 1975 - 102 с.
4. Шодиметов Х.М. *Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Докторская диссертация*. Ташкент: 2002. -218 с.
5. Jalolov O.I., Isomiddinov B.O. *On the Construction of Practically Asymptotically Optimal Weighted Cubature Formulas of Hermite Type in the Sobolev Space*. Russ Math. 69 (4), 17-26 (2025). <https://doi.org/10.3103/S1066369X25700288>.

Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы для вычисление интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$

Жалолов О. И. ^{1,a}, Жалолов Ик. И. ^{2,b}, Мухсинова М. Ш. ^{1,c}

¹Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;

²Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;

^ao_jalolov@mail.ru; o.i.jalolov@buxdu.uz;

^bikromjalolovi@gmail.com;

^c muxsinovamehrinis008@gmail.com; mehrinisomuxsinova9@gmail.com

В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \sigma x} f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta) \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) e^{-2\pi i \sigma x} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta), \quad (2)$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ и назовем ее квадратурную формулу для интегралов типа Фурье.

Справедлива следующие

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности (2) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_e(x) = [e^{-2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \nu_m(x - h\beta), \quad (3)$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ имеет следующий вид

$$\|\ell_N | H_2^{\mu*}(R)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [e^{-2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx. \quad (4)$$

По теоремы Бабушки [1] из (3) следует, что

$$\psi_\ell(h\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N. \quad (5)$$

Теорема 2. Дискретный аналог дифференциального оператора $\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dx^2}\right]^m$ при $m = 1$ имеет вид

$$D_1[\beta] = \begin{cases} \frac{1}{\pi} cth(2\pi h), & \beta = 0 \\ -\frac{1}{2\pi sh(2\pi h)}, & |\beta| = 1 \\ 0, & |\beta| \geq 2 \end{cases}. \quad (6)$$

В настоящей работе рассматривается задача нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул для интегралов типа Фурье в пространстве непериодических функций Хёрмандера $H_2(R)$ выполнена в случае $m = 1$.

Теорема 3. Среди всех квадратурных формул вида (1) решетчатая квадратурная формула для интегралов типа Фурье

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \sigma x} f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N C[\beta] f[\beta], \quad (7)$$

определяемая коэффициентами

$$\begin{aligned}
 {}^0C[\beta] &= cth(2\pi h) \cdot \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |h\beta - y|) dy - \\
 &- \frac{1}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |h(\beta - 1) - y|) dy - \\
 &- \frac{1}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |h(\beta + 1) - y|) dy, \quad \beta = \overline{1, N - 1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0C[0] &= \pi cth(2\pi h) u_h^1[0] - \frac{1}{2\pi sh(2\pi h)} u_h^1[-h] - \frac{1}{2\pi sh(2\pi h)} u_h^1[h] = \\
 &= cth(2\pi h) \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi y) dy - \frac{\exp(-2\pi h)}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi y) dy - \\
 &- \frac{1}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |h - y|) dy. \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[N] &= cth(2\pi h) \cdot \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |Nh - y|) dy - \\
 &- \frac{1}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |(N - 1)h - y|) dy - \\
 &- \frac{1}{2sh(2\pi h)} \int_0^1 e^{-2\pi i\sigma y} \exp(-2\pi |h(N + 1) - y|) dy. \quad (10)
 \end{aligned}$$

является единственной оптимальной в пространстве $H_2^\mu(R)$.

Литература

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М: Наука, 1974, 808 с.
2. Shadimetov Kh., Jalolov I. *Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration*. Mathematics 2024, 12(5), 738. <https://doi.org/10.3390/math12050738>.

Коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$

Жалолов О. И.^{1,a}, Жалолов Ик. И.^{2,b}, Мухсинова М. Ш.^{1,c}

¹Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;

²Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;

^ao_jalolov@mail.ru; o.i.jalolov@buxdu.uz;

^bikromjalolovi@gmail.com;

^cmuxsinovamehriniso008@gmail.com; mehrinisomuxsinova9@gmail.com

Задача о построении интерполяционных формул является одной из классических задач вычислительной математики и численного анализа.

Теории интерполяционных формул построены многими авторами, например, [1-4]. Допустим, что в $n + 1$ произвольно расположенных точках $\{x_i\}$ ($i = 0, N$), которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ функции $f(x)$. Требуется построить интерполяционную формулу $P_f(x)$, совпадающую функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

Важной задачей в теории интерполирования является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данным классом функций. Значение этой функции в некоторой точке z есть функционал, определенный как

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_N(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) f(x_\beta) \quad (2)$$

где ясно, что

$$P_f(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) f(x_\beta) \quad (3)$$

интерполяционная формула и

$$\ell_N(x) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta) \quad (4)$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ - коэффициенты, а x_λ узлы формулы $P_f(z)$, $x_\beta \in [0, 1]$, $\delta(x)$ - дельта- функция Дирака и $f(x) \in H_2^\mu(R)$.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения оптимальных коэффициентов решетчатых интерполяционных формул в пространстве Л.Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ для непериодических функций.

Теорема 1. В пространстве $H_2^\mu(R)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (3), коэффициенты которой определяются из системы

$$\sum_{\beta=1}^N C_\beta(z) \nu_m(h\alpha - h\beta) = \nu_m(h\alpha - z), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

иначе представляется в следующем виде

$$\psi_e(h\alpha) = 0. \quad (6)$$

Это и есть теорема И.Бабушки (см.[2]), гласящая о том, что экстремальная функция функционала погрешности оптимальной интерполяционной формулы обращается в нуль в узлах интерполяционной формулы.

Переобозначив $C[\beta] = C_\beta$ и $\nu_h^{(m)}[\beta] = \nu_m(h\beta)$, систему (5) можно записать в виде свёртки функций дискретного аргумента:

$$C[\beta] * \nu_h^{(m)}[\beta] = f_m[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

$$C[\beta] = 0, \quad h\beta \notin [0, 1]. \quad (8)$$

где

$$f_m[\beta] = \nu_m(h\beta - z). \quad (9)$$

Систему уравнений (7), (8) будем обозначать системой B .

Вычисление оптимальных коэффициентов решетчатых интерполяционных формул. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. Среди всех интерполяционных формул вида (3), N -заданное натуральное число, решетчатая интерполяционная формула

$$P_f(x) = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^0(z) f(h\lambda),$$

определяемая коэффициентами

$$C_\lambda^0(z) = cth(2\pi h) e^{-2\pi|h\beta-z|} - \frac{1}{2sh(2\pi h)} e^{-2\pi|h(\beta-1)-z|} - \frac{1}{2sh(2\pi h)} e^{-2\pi|h(\beta+1)-z|}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_0(z) &= cth(2\pi h) e^{-2\pi|0-z|} - \frac{e^{-2\pi h}}{2sh(2\pi h)} e^{-2\pi|0-z|} - \frac{1}{2sh(2\pi h)} e^{-2\pi|h-z|} = \\ &= \frac{1}{2sh(2\pi h)} \left[2che^{-2\pi z} - e^{-2\pi(h+z)} - e^{-2\pi|h-z|} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$C_N(z) = \frac{1}{2sh(2\pi h)} \left[2ch(2\pi h)e^{-2\pi|1-z|} - e^{-2\pi[h+(|1-z|)]} - e^{-2\pi|1-h-z|} \right] \quad (12)$$

является единственной оптимальной над пространстве $H_2^\mu(R)$.

Литература

1. Соболев С.Л. *Об интерполировании функций n переменных*. Докл. АН СССР, 1961, 137, с.778-781.
2. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М: Наука, 1974, 808 с.
3. Shadimetov Kh., Jalolov I. *Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration*. Mathematics 2024, 12(5), 738. <https://doi.org/10.3390/math12050738>.

Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $W_2^m(R)$

Жалолов О. И.^{1,a}, Махмудов М. М.¹

¹Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;

^ao_jalolov@mail.ru; o.i.jalolov@buxdu.uz

Рассмотрим следующую весовую квадратурную формулу в пространстве Соболева:

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha C_\beta^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x_\beta), \quad (1)$$

функционалом погрешности квадратурной формулы (1) имеет следующий вид

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = p(x)\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x_\beta), \quad (2)$$

здесь соответственно, $C_\beta^{(\alpha)}$ и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1) и $p(x)$ весовая функция, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ -индикатор отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ -дельта- функция Дирака и назовем ее квадратурную формулу типа Эрмита.

Определение 1. Пространство $W_2^m(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме $([1,2])$

$$\|f(x)| W_2^m(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F^{-1} [\mu(y) \cdot F[f(x)](y)]|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Если выполняется условия

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1} \left(\frac{1}{\mu^2(y)} \right) \right) (x) \in L_2(R), \tag{4}$$

где $\mu(y) = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}}$ и $\mu^2(y) = (1 - y^2)^m$, то пространство $W_2^m(R)$ вкладывается в пространство $C(R)$.

Определение 2. Функция $\psi_\ell^{(\alpha)}(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N^{(\alpha)}(x)$, если

$$\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell^{(\alpha)}(x) \rangle = \left\| \ell_N^{(\alpha)} |W_2^{m*}(R) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell^{(\alpha)} |W_2^m(R) \right\|. \tag{5}$$

Теорема 1. Оптимальная квадратурная формула, коэффициенты, которой является решением системы линейных уравнений

$$\sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \nu_m^{(\alpha)}(h\theta - y) dy, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N. \tag{6}$$

в пространстве Соболева $W_2^m(R)$, существует и она является единственной, где

$$\nu_m(x) = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k.$$

Для экстремальной функции функционала погрешности (2) справедливо

$$\psi_\ell^{(\alpha)}(x) = p(x) \varepsilon_{[0,1]}(x) * \nu_m^{(\alpha)}(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) \Big|_{x=h\theta} = 0, \tag{7}$$

тогда по теореме И.Бабушки из (7) получим

$$\psi_\ell^{(\alpha)}(h\theta) = 0, \quad \theta = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{8}$$

Равенства (8) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_\beta^{(\alpha)}$, т.е. систему (6) можно переписать в виде:

$$\sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(h\alpha - h\beta) = \int_0^1 p(y) \cdot \nu_m^{(\alpha)}(h\alpha - y) dy, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{9}$$

Рассмотрим случай $m = 2$, тогда система (9) при $\alpha = 0, 1$ имеет вид

$$\sum_{\beta=0}^N C_\beta^{(0)} \nu_2^{(0)}(h\theta - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_\beta^{(1)} \nu_2^{(1)}(h\theta - h\beta) = \int_0^1 p(y) \cdot \nu_2^{(1)}(h\theta - y) dy. \tag{10}$$

Цель настоящей работы является нахождение оптимальных коэффициентов $C_1^{(1)}[\beta]$ квадратурных формул (1), т.е. это и есть решение системы (9).

На основе теории дискретных функций обозначая, $C_1^{(\alpha)}[\beta] = C_1^{(\alpha)}(h\beta)$ и $\nu_2^{(\alpha)}[\beta] = \nu_2^{(\alpha)}(h\beta)$ систему (9) можно записать в виде свертки функцией дискретного аргумента:

$$C_1^{(\alpha)}[\beta] * \nu_2^{(\alpha)}[\beta] = F_2[\beta]; \quad \beta = 0, 1, \dots, N; \quad \alpha = 0, 1. \quad (11)$$

$$C_1^{(\alpha)}[\beta] = 0 \quad \text{при} \quad h\beta \notin [0, 1], \quad (12)$$

где

$$F_2[\beta] = F_1[\beta] - f_2[\beta], \quad (13)$$

здесь

$$F_1[\beta] = \int_0^1 p(y) \cdot \nu_2^{(1)}(h\theta - y) dy,$$

$$f_2[\beta] = \int_0^1 p(y) \cdot \nu_2^{(0)}(h\theta - y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 p(y) e^{-2\pi(h\beta - y)} (1 + 2\pi) |h\beta - y| dy, \quad (14)$$

Коэффициенты оптимальной квадратурной формуле (1) в пространстве $W_2^m(R)$ определяется по формуле

$$C_1^{(1)}[\beta] = D_2^{(h)}[\beta] * u_2^h[\beta]. \quad (15)$$

Используя результаты работы [3], вычислена свертку дискретный аналог $D_2^{(h)}[\beta]$ и дискретной функции $u_2^h[\beta]$ и получена основной результат настоящей работы.

Теорема 2. Коэффициенты квадратурной формулы (1) имеет следующие представление в неперiodическом пространстве Соболева

$$C_1^{(1)}[\beta] = D_2(h\beta) * F_2(h\beta) + m\lambda_1^\beta + n\lambda_1^{N-\beta}, \quad (16)$$

где m и n после некоторых вычислений имеет следующий вид:

$$m = A_1\rho \left(\frac{1}{e^{2\pi h} - \lambda_1} (a_1^- - a_2^- \frac{he^{2\pi h}}{e^{2\pi h} - 1}) \right), \quad (17)$$

$$n = A_1\rho e^{-2\pi} \left(\frac{1}{e^{2\pi h} - \lambda_1} \left(a_1^+ + a_2^+ \left(1 + \frac{he^{2\pi h}}{e^{2\pi h} - \lambda_1} \right) \right) \right),$$

здесь $F_2(h\beta)$ определяется из (13).

Литература

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М: Наука, 1974, 808 с.
2. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения*, УМН, 20, вып. I, 1965, - с. 3-74.
2. Shadimetov Kh., Jalolov I. *Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration*. Mathematics 2024, 12(5), 738. <https://doi.org/10.3390/math12050738>.
3. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. *Об одном алгоритме построения дискретного аналога одного оператора*. Уз. Матем. Журнал, 2015, №1. Ташкент. - с.158-163.
4. Жалолов О.И., Махмудов М.М. *О нахождении элемент рисса и норма функционала погрешности квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева*. Научный вестник БухГУ, 2025, №1, - с.20-26.

Применение гипотезы Прандтля в исследовании турбулентной струи с использованием метода запаздывающих коэффициентов

Жумаев Ж., Широнов З.К.

Бухарский государственный университет;
j.jumayev@buxdu.uz, ziyomatshirinov@umail.uz

Использование струйного перемешивания успешно применяется в теплопередаче, в промышленности, горении и в других областях, поэтому поиск методов моделирования таких процессов актуальна по сей день. Хотя достигнуты некоторые результаты работ [1,2], исследования еще продолжаются. Один из проблем заключается в моделировании стационарной турбулентной струи. Здесь предлагается моделирование этого процесса методом запаздывающих элементов. Хотя условия устойчивости этого метода строг, он прост в моделировании. Допустим, что турбулентная струя истекает в свободное пространство. Для решения поставленной задачи допустим, что значение плотности среды $\rho = const$, давление постоянное, силой тяжести пренебрегаем. Допуская, что турбулентность струи в поперечном сечении постоянной, а меняется только по продольной оси, можно использовать гипотезу Прандтля в виде [3]:

$$\nu_t = \chi \cdot b(x) \cdot (u_{\max} - u_{\min}) \quad (1)$$

Тогда получим систему уравнений пограничного слоя в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu_t \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Полученная система уравнений является нелинейной, второго порядка в частных производных. Граничные условия общепринятое [2].

Введя сеточные функции $(w_x)_{i,j}$ и $(w_y)_{i,j}$ для продольной и поперечной составляющей вектора скорости w и используя выражения для производных, входящих в уравнения (2), в алгебраической форме, используя разложение функций в ряд Тейлора, получим дискретный аналог уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases} (w_x)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + (w_y)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i-1,j} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right) \\ = \nu_t \left(\frac{(w_x)_{i-1,j+1} - 2 \cdot (w_x)_{i-1,j} + (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\ \frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x} + \frac{(w_y)_{i,j} - (w_y)_{i,j-1}}{\Delta y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку уравнения (2) являются параболическими уравнениями, допускающими решение маршевым методом в направлении оси x , неизвестными в системе уравнений (3) являются только искомые переменные $(w_x)_{i,j}$ и $(w_y)_{i,j}$. При этом $(w_x)_{i,j}$ может быть определена из уравнения движения, а $(w_y)_{i,j}$ из уравнения неразрывности.

Но следует обратить внимание на то, что неизвестная $(w_x)_{i,j}$ входит в уравнение движения в квадрате, что делает это уравнение нелинейным относительно искомой переменной. Для устранения нелинейности при решении дифференциальных уравнений используем метод запаздывающих коэффициентов. Суть метода заключается в замене одного из вхождений искомой переменной на ее значение в одной из ближайших точек с известным решением. В нашем случае уравнение движения из (3) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & (w_x)_{i-1,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + (w_y)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i-1,j} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right) \\ & = \nu_t \left(\frac{(w_x)_{i-1,j+1} - 2 \cdot (w_x)_{i-1,j} + (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$

Очевидно, что при уменьшении шага дискретизации Δx значение $(w_x)_{i-1,j}$ будет все ближе к искомой $(w_x)_{i,j}$. На грубых сетках метод запаздывающих коэффициентов может давать существенные ошибки в решении.

Применяя явный метод дискретизации уравнений пограничного слоя и метод запаздывающих коэффициентов для устранения нелинейности и сопряженности уравнений, мы получим два линейных уравнения, определенных в произвольном узле расчетной области, позволяющие решить поставленную задачу.

$$\begin{cases} (w_x)_{i,j} = (w_x)_{i-1,j} + \frac{\nu_t \Delta x}{(w_x)_{i-1,j}} \left(\frac{(w_x)_{i-1,j+1} - 2(w_x)_{i-1,j} + (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\ - \Delta x \frac{(w_y)_{i-1,j}}{(w_x)_{i-1,j}} \left(\frac{(w_x)_{i-1,j} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right); \\ (w_y)_{i,j} = (w_y)_{i,j} - \Delta y \frac{(w_x)_{i,j-1} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x}. \end{cases}$$

Теперь записанные нами дискретные аналоги уравнений пограничного слоя для решаемой задачи являются линейными относительно искомых переменных.

На рис. 1 приведены сравнение осевых значений продольной скорости струи, рассчитанной с использованием модели турбулентности Прандтля (1) и метода запаздывающих коэффициентов, с экспериментальными данными [2].

Как видно из рисунка, использование гипотезы Прандтля дает удовлетворительный результат. Для улучшения результата следует перейти к дифференциальным моделям турбулентности.

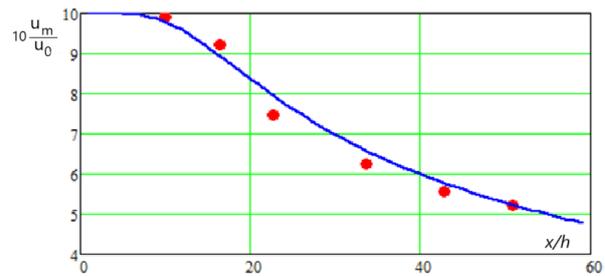


Рис. 4: *

Сравнение осевых значений продольной скорости струи с экспериментальными данными.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. -М.:, Наука, 1984. 718 с.
2. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений. Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1971. 5. С. 114-127.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. - Москва-Ижевск: R&C Dynamics, 2000. - 576 с.

Теорема о знаковой инвариантности собственных векторов в интервальной обобщенной задаче на собственные значения

Ибрагимов А.¹, Фозилов О.²

^{1,2}Навоийский государственный университет, Навои, Узбекистан
alim-ibragimov@mail.ru, fozilovorifjon1@gmail.com

Задача знаковой инвариантности собственных векторов в контексте возмущенных матриц изучалась в работах [1, 2] для стандартной задачи собственных значений $Ax = \lambda x$. Здесь мы рассматриваем данную проблему для интервальной обобщенной задачи на собственные значения и придерживаемся интервальных обозначений, принятых в [3] (то есть интервальные величины выделяются жирно-курсивным шрифтом).

Обобщенная задача собственных значений для произвольной пары интервальных матриц (\mathbf{A}, \mathbf{B}) (где $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$) обычно формулируется в следующем виде:

$$Ax = \lambda Bx, \quad A \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} \in \mathbf{B}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (1)$$

тогда множество всех собственных значений и собственных векторов для задачи (1) соответственно записываются как

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Ax = \lambda Bx, A \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}, \quad (2)$$

$$X_\Lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda Bx, A \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}. \quad (3)$$

Для простоты сначала рассмотрим симметричный случай, а затем обобщим полученные результаты для произвольных интервальных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Пусть заданы действительные симметричные интервальные матрицы

$$\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] = [\mathbf{A}_c - \Delta \mathbf{A}, \mathbf{A}_c + \Delta \mathbf{A}], \quad \mathbf{B} = [\underline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{B}}] = [\mathbf{B}_c - \Delta \mathbf{B}, \mathbf{B}_c + \Delta \mathbf{B}],$$

где A_c, B_c — центральные симметричные матрицы, а $\Delta A, \Delta B$ — симметричные неотрицательные матрицы (радиусы возмущений):

$$A_c = \frac{\overline{A} + \underline{A}}{2}, \quad \Delta A = \frac{\overline{A} - \underline{A}}{2}, \quad B_c = \frac{\overline{B} + \underline{B}}{2}, \quad \Delta B = \frac{\overline{B} - \underline{B}}{2}.$$

Предположим, что задача $A_c x = \lambda B_c x$ имеет простое собственное значение λ_c .

Согласно некоторым исследованиям по интервальной задаче на собственные значения, если собственные векторы матрицы в заданных интервалах сохраняют знаки своих компонент, то можно получить более точные границы для собственных значений.

Приведенная ниже теорема даст достаточное условие знаковой инвариантности всех собственных векторов интервальной матрицы.

Теорема 1. Пусть задана интервальная обобщенная задача

$$(A_c + \delta A)\tilde{x} = \tilde{\lambda}(B_c + \delta B)\tilde{x}, \quad |\delta A| \leq \Delta A, \quad |\delta B| \leq \Delta B.$$

Если выполнено условие

$$\text{sep}_i \geq 2 \left\| B_c^{-1/2} (\Delta A + |\lambda_i| \Delta B) B_c^{-1/2} \right\|_2,$$

где $\text{sep}_i = \min_{j \neq i} |\lambda_j - \lambda_i|$ (а $\|\cdot\|_2$ — спектральная норма), то для всех $\delta A, \delta B$ в заданных интервалах:

(i) Собственное значение $\tilde{\lambda}_i$ остается вещественным и лежит в интервале

$$\tilde{\lambda}_i \in [\lambda_i - \Delta \lambda_i, \lambda_i + \Delta \lambda_i], \quad \Delta \lambda_i = \left\| B_c^{-1/2} (\Delta A + |\lambda_1| \Delta B) B_c^{-1/2} \right\|_2;$$

(ii) Соответствующий собственный вектор \tilde{x}^i удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{x}^i - x^i\|_{B_c} \leq \frac{\Delta\lambda_i}{\text{sep}_i - \Delta\lambda_i} \|x^i\|_{B_c},$$

где

$$\|x^i\|_{B_c} = \sqrt{x^T B_c x};$$

(iii) Инвариантность знаков компонент \tilde{x}^i гарантирована, если

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\text{sep}_i - \Delta\lambda_i} < 1 \quad (\text{то есть } \text{sep}_i > 2\Delta\lambda_i).$$

В заключение отметим, что представленные результаты были обобщены на несимметричный вещественный случай: для интервальных матриц данного класса также была сформулирована и доказана теорема, задающая достаточное условие знаковой инвариантности всех собственных векторов. Это позволяет применять разработанный подход к более широкому классу задач.

Литература

1. Deif, A., Rohn, J.: On the invariance of the sign pattern of matrix eigenvectors under perturbation. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 196, pp. 63–70 (1994). [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90315-8](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90315-8)
2. Deif, A.: Singular values of an interval matrix. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 151, pp. 125–133 (1991). [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(91\)90358-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90358-4)
3. Kearfott, R.B., Nakao, M.T., Neumaier, A., Rump, S.M., Shary, S.P., Hentenryck.P. Standardized notation in interval analysis. *Comput. Techn.*, 15 (1), 7-13 (2010).

LITERATURE

1. Berdyshev, A.; Alov, R.; Abdiramanov, Z.; Ovlayeva, M. An Explicit-Implicit Upwind Difference Splitting Scheme in Directions for a Mixed Boundary Control Problem for a Two-Dimensional Symmetric t-Hyperbolic System. *Symmetry* 2023, 15, 1863.
2. Alov R.D., Ovlaeva M.Kh. Construction and study of the stability of a difference scheme for a linear hyperbolic system with dynamic boundary. *Uzbek Mathematical Journal* 2023, Volume 67, Issue 2, pp.17-24 DOI: 10.29229/uzmj.2023-2-2

Алгоритмы и программы для собственных значений

Имомов А.

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
adashimomov7@gmail.com.

Собственные значения играют исключительные значения в задачах устойчивости динамических систем [1]. Рассмотрим задачу о собственных значений матриц [1]: $A * x = \lambda * x$, $x \neq 0$, $\lambda = \lambda(A)$, где A - матрица порядка $n * n$. В этом уравнении неизвестные: n -скалярных величин λ и n собственных векторов. Эта задача однородная система линейных уравнений по x , поэтому ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда матрица системы имеет детерминант, равного нулю.

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n) = 0,$$

$$p_1 = s_1, k = 2 \dots n : p_k = (s_k - \sum_{i=1}^k \frac{p_i s_{k-1}}{k}), s_k = \text{tr}(A^k) = a_{1,1}^k + \dots + a_{n,m}^k.$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением (кратко ХУ).

Задача нахождения $\lambda = \lambda(A)$ достаточно трудоемкая. Для поиска собственных значений симметрических матриц разработаны итерационные методы вращений Якоби, Гивенса. Для произвольных матриц имеются методы Леверрье, Фаддеева, Крылова, Микеладзе, Кублановской-Френсиса QR, Данилевского, Хессенберга. В математических системах типа Mathcad и Python задачи решаются с помощью укрупненного алгоритма решения задачи. Mathcad, Python выступают в качестве исполнителя укрупненного алгоритма [3], а пользователь играет роль создателя алгоритма. Под укрупненным алгоритмом (the largest algorithm) мы понимаем последовательность математических формул, и команд математической системы, дающую решение задачи. В зарубежной литературе имеется подобный термин: "programming-in-the-large". Эти команды математической системы и являются крупной командой, например, функция вычисления степеней матрицы и их следов, решение системы линейных уравнений, вычисления собственных значений, определителя, обратной матрицы, интеграла, решение дифференциального уравнения, и т.д. Нами построены укрупненные алгоритмы 10 методов, упомянутых выше. Результаты наших укрупненных алгоритмов мы проверяем внутренними функциями `eigenvals(A)` (Mathcad) или `eigvalues(A)` (Python) по нахождению собственных значений. В качестве примера приведем укрупненные алгоритмы методов Леверрье и QR и результаты вычислений собственных значений.

1) Программа метода Левеерье-Фаддеева

```
# Method of Leverrye-Faddeev
import numpy as np
A = np.array([[1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [4, 1, 2, 3]])
n=4; E=np. eye(n); B=copy(A); p=np. zeros(n+1); p[0]=1;p[1]=-np. trace(B)
for k in range(2, n+1):
    B=A@(B+p[k-1]*E);
    p[k]=-np.trace(B)/k
# Computing p
print("p = "p); r=np.roots(p); print ('eigenvalue=', r)
eigenvalues= [-2.828 -2 2.828 10]
```

2) Программа метода QR

```
# Method of QR
import numpy as np
A=np.array([[1,2,3,4], [2,3,4,1], [3,4,1,2], [4,1,2,3]])
S=[10,20] # iteraty
# QR decompozisiya
for k in range(40):
    Q,R=np.linalg.qr(A)
    A=np.dot(R,Q) # update of A
    if i+1 in S:
        print (f'iteration:', i+1, -R)
10: [10. 2.8270 -2.8270 2.0019]
20: [10. 2.8284 -2.8284 2.0000]
```

Литература

1. Хакимнязов Г.С., Чубарев Л.Б. Воронина П.В. Математическое моделирование. Новосибирск, 2010. -148.
2. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. ИВТ СОРАН, Новосибирск. 2018.-611с.
3. Имомов А. Математические системы-исполнители-укрупненных алгоритмов. Н.: НамГУ,2023, 254 с.

Применение нейросетей для вейвлет-анализов

Кудуев А. Ж., Турсунов Д. А.

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;

akuduev@oshsu.kg, dtursunov@oshsu.kg

Вейвлет-анализ является одним из ключевых инструментов современной обработки сигналов, изображений и данных. Классические вейвлеты, такие как вейвлеты Хаара и Добеши, обеспечивают эффективное разложение сигналов по частотным компонентам и находят широкое применение в телекоммуникациях, биомедицинских системах и инженерных задачах. Однако они обладают ограниченными возможностями при работе со сложными многокомпонентными структурами и сигналами, искаженными шумами.

Мультивейвлеты представляют собой обобщение скалярных вейвлетов, в которых в качестве базисной функции используется не одна, а несколько функций, образующих векторное пространство. Такой подход обеспечивает более гибкое и точное представление сигналов, улучшая локализацию как во времени, так и по частоте. Тем не менее, существующие методы построения мультивейвлетов основаны на фиксированных фильтрах и не обладают способностью адаптироваться к специфике конкретных данных, что ограничивает их практическую эффективность.

В последние годы активно развивается направление, связанное с применением методов машинного обучения, в частности глубоких нейронных сетей, для автоматического поиска оптимальных фильтров и базисных функций. Интеграция идей мультивейвлетного анализа с глубоким обучением открывает новые возможности для обработки сигналов, изображений и временных рядов, обеспечивая адаптивность и потенциал для повышения качества анализа данных [1]-[3].

Цель и новизна исследования. Целью настоящей работы является разработка новых типов мультивейвлетов и формализация процесса их построения с использованием нейросетевых методов. Предлагаемая архитектура нейронной сети позволяет автоматически обучать преобразования на основе данных, обеспечивая адаптивность к их структуре.

Новизна работы заключается в интеграции строгого математического аппарата мультивейвлетов с современными методами глубокого обучения. Это позволяет не только создавать новые базисы, оптимизированные под конкретные задачи, но и обеспечивать их интерпретируемость, что особенно важно для применения в критически значимых областях – таких как медицина, обработка инженерных сигналов и анализ больших данных.

Актуальные работы показывают эффективность мультивейвлетно-нейросетевых подходов в медицине (анализ ЭКГ и ЭЭГ), телекоммуникациях (очистка сигналов и прогнозирование нагрузки сети), инженерных системах (мониторинг состояния оборудования), а также в области неевклидовых данных – например, для анализа графов и 3D-структур. При этом остаются открытыми важные теоретические вопросы: обеспечение ортонормированности и устойчивости обучаемых фильтров, сохранение интерпретируемости моделей и разработка эффективных методов для обработки больших объемов данных. Решение этих задач формирует основу для дальнейшего развития адаптивных мультивейвлетных методов, интегрированных с современными нейросетевыми архитектурами [1]-[3].

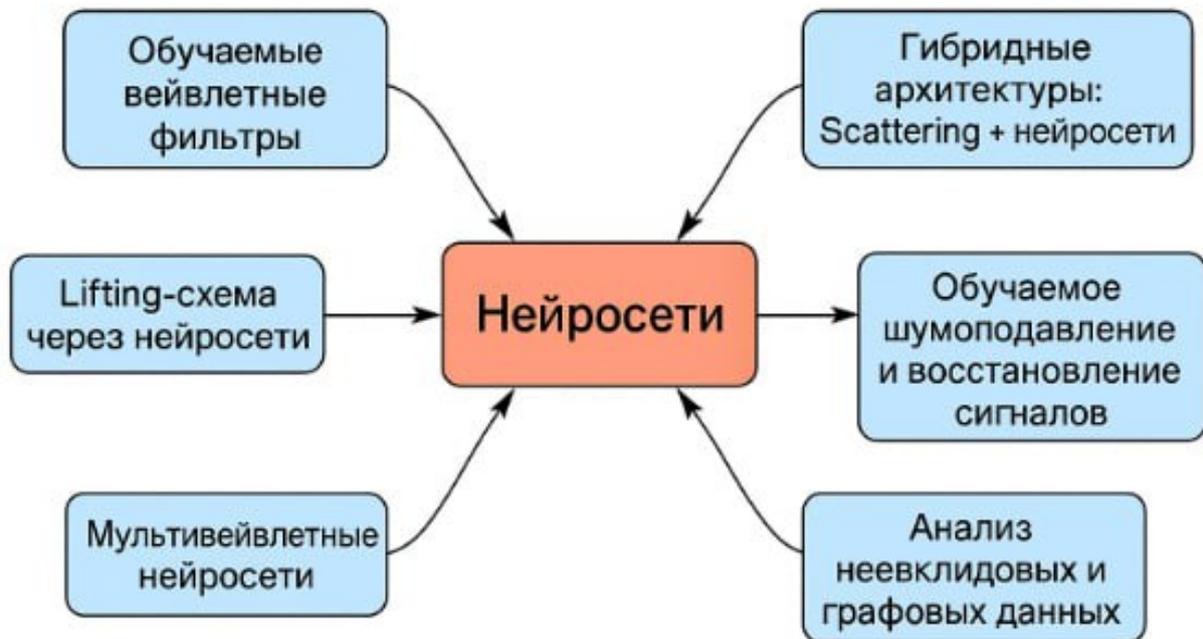


Рис. 5: Применение нейросетей для вейвлет-анализов

В данной работе рассмотрена проблема ограничения классических вейвлетных и мультивейвлетных методов, связанных с использованием фиксированных фильтров, не способных адаптироваться к особенностям реальных данных. Для преодоления этих ограничений предложен подход, основанный на интеграции строгого математического аппарата мультивейвлетов с современными нейросетевыми архитектурами.

Разработанная модель позволяет автоматически формировать новые типы базисных функций, оптимизированных для конкретных задач и типов сигналов. Такой подход обеспечивает адаптивность, улучшает точность анализа и сохраняет интерпретируемость, что особенно важно для применения в медицине, инженерных системах, телекоммуникациях и анализе больших данных.

Результаты исследования подтверждают высокий потенциал

мультивейвлетно-нейросетевых методов для решения практических задач, включая шумоподавление, восстановление сигналов, анализ временных рядов и работу с неевклидовыми структурами, такими как графы и 3D-данные. В дальнейшем планируется уделить внимание вопросам теоретической устойчивости обучаемых фильтров, оптимизации вычислительных алгоритмов и разработке методов, ориентированных на обработку больших объемов данных.

LITERATURE

1. Ouyang, K., Hou, Y., Zhou, S., Zhang, L., et al. Adaptive Multi-Scale Wavelet Neural Network for Time Series Classification // Information. 2021. Vol. 12, Issue 6. P. 252. DOI: 10.3390/info12060252.
2. Deznabi, I., Fiterau, M. MultiWave: Multiresolution Deep Architectures through Wavelet Decomposition for Multivariate Time Series Prediction // arXiv preprint, 2023. arXiv:2306.10164. URL: <https://arxiv.org/abs/2306.10164>.
3. Yang, P., Barria, J. A. Wavelet Probabilistic Recurrent Convolutional Network for Multivariate Time Series Classification // arXiv preprint, 2025. arXiv:2505.17307.

Квадрат нормы функционала погрешности составных квадратурных формул

Маматова Н. Х.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
nilufar.mamatova.76@mail.ru

Построение оптимальных формул для приближенного вычисления линейных функционалов более широкого класса задач является актуальной задачей вычислительной математики. Очень характерным является здесь пример теории формул приближенного интегрирования: квадратурных и кубатурных формул. Составной квадратурной формулой называется приближенная формула, выражающая значение интеграла $\int_0^1 \varphi(x) dx$ в виде линейной комбинации значений подынтегральной функций и ее производных в точках, называемых узлами:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=0}^t C_k^{(\alpha)} \varphi^{(\alpha)}(x_k), \quad (1)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(x) \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=0}^t C_k^{(\alpha)} \varphi^{(\alpha)}(x_k),$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ —индикатор (или характеристическая функция) отрезка $[0, 1]$, $t \leq m - 1$. Параметры x_k называют узлами квадратурной формулы, а числа $C_1^{(\alpha)}, C_2^{(\alpha)}, \dots, C_N^{(\alpha)}$ —ее коэффициентами, $\varphi(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}(0, 1)$.

Напомним, что функция $f(x)$ называется 1-периодической, если для любого целого $\beta \in \mathbf{Z}$ и всех x выполняется $f(x) = f(x + \beta)$. Приводим определение 1- периодического пространства Соболева $\widetilde{L}_2^{(m)}(0, 1)$.

Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(0, 1)$ при $m \geq 1$ — гильбертово пространство 1- периодических функций $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, отличающихся более, чем на константу, m -е производные(в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{d^m f}{dx^m} \frac{d^m g}{dx^m} dx.$$

Норма в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(0, 1)$ определяется формулой

$$\|\varphi|_{\widetilde{L}_2^{(m)}}\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{d^m}{dx^m} \varphi(x) \right)^2 dx.$$

Погрешностью квадратурной формулы называют разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=0}^t C_k^{(\alpha)} \varphi^{(\alpha)}(x_k) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=0}^t C_k^{(\alpha)} (-1)^\alpha \delta^{(\alpha)}(x - x_k) \right) * \phi_0(x) \right] \varphi(x) dx,$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\phi_0(x) = \sum_{\beta} \delta(x - \beta)$,

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=0}^t C_k^{(\alpha)} (-1)^\alpha \delta^{(\alpha)}(x - x_k) \right) * \phi_0(x). \tag{2}$$

В настоящей работе результаты интегрированию периодических функций полученных функциональными методами из [1-4] обобщаются на случай составных квадратурных формул.

Справедлива следующая.

Теорема. Квадрат нормы функционала погрешности (2) составной квадратурной формулы (1) с производными в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}(0, 1)$ записывается в виде

$$\|\ell|_{\widetilde{L}_2^{(m)*}(0, 1)}\|^2 = \sum_{k'=1}^N \sum_{\alpha'=1}^t \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^t C_{k'}^{(\alpha')} C_k^{(\alpha)} i^{\alpha+\alpha'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i \beta (x_{k'} - x_k)}}{(2\pi \beta)^{2m - \alpha - \alpha'}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М: Наука, 1974, 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. *Кубатурные формулы*. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996, 484 с.
3. Рамазанов М.Д., Шадиметов Х.М. Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева. *Доклады РАН*. Москва, 1999, 4, 358, с. 453–455.
4. Shadimetov Kh.M., Mamatova N.H. Optimal Formulas for Calculating Linear Functionals. *Lobachevskii Journal of Mathematics* 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 839–850.

Математические модели экономического равновесия в смысле Нэша, основанные на играх

Мадрахимов У. С.¹, Исакжанова Д. Д.²

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни,
Ургенч, Узбекистан;
umadraximov@mail.ru 1
isoqjonovadilafruz4@gmail.com 2

Рассмотрим некоторое множество Ω . Совокупность всех непустых подмножеств Ω обозначим через $\Pi(\Omega)$. Рассмотрим теперь два множества: Ω_1 и Ω_2 , а также отображение a множество Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$. Это отображение будем называть точечно-множественным. Для $\xi \in \Pi(\Omega_1)$ положим $a(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} a(x)$. На множестве $a(\Omega_1)$ можно определить отображение a^{-1} , обратное a : $a^{-1}(y) = \{x \in \Omega_1 : y \in a(x)\}$ ($y \in a(\Omega_1)$).

Очевидно, что $a^{-1}(a(\Omega_1)) = \Omega_1$ и, кроме того, $(a^{-1})^{-1} = a$. Графиком отображения a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ называется подмножество Z прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, определяемое следующим образом: $Z = \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : x \in \Omega_1, y \in a(x)\}$.

Отображение a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ назовем замкнутым (или полунепрерывным сверху), если график Z этого отображения замкнут.

«Классическая» игра n лиц описывает конфликтную ситуацию, в которой участвует n игроков. Будем обозначать этих игроков числами $1, 2, \dots, n$. Игрок i имеет в своем распоряжении некоторое множество X_i , которое называется *множеством его стратегий*. Кроме того, этот игрок описывается функцией выигрыша (функцией полезности) u_i , определенной на прямом произведении $\prod_{k=1}^n X_k = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Число $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$ показывает выигрыш, который получает i -й игрок, если первый игрок выбрал свою стратегию x_1 , второй игрок – стратегию x_2 , ..., n -й игрок – стратегию x_n .

Игра n лиц, определенная с помощью множеств стратегий X_i и функций выигрыша u_i , называется игрой, заданной в нормальной форме. Элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ множества $\prod_{k=1}^n X_k$ называется состоянием равновесия в смысле Нэша рассматриваемой нами игры, если для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняются соотношения $u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) = \max_{x_i \in X_i} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$.

Стратегия \bar{x}_i игрока i , участвующая в состоянии равновесия \bar{x} , называется оптимальной. Смысл приведенных определений заключается в следующем. Предположим, что какой-либо из игроков, скажем i , не воспользовался своей оптимальной стратегией \bar{x}_i , в то время как каждый из остальных игроков k выбрал оптимальную стратегию \bar{x}_k . В этом случае игрок i обеспечит себе выигрыш не большей, чем если бы он применил стратегию \bar{x}_i .

Нэш [1] показал, что в случае, когда X_i – компактные выпуклые множества, а функций выигрыша u_i – непрерывные вогнутые по x_i функции ($i = 1, 2, \dots, n$), состояние равновесия существует.

С точки зрения моделей экономического равновесия представляет интерес рассмотреть некоторое обобщение описанной выше игры n лиц в нормальной форме. Суть этого обобщения заключается в том, что множества стратегий X_i игроков i предполагаются зависящими от выбора этих стратегий, в то время как в «классической» игре они считаются раз и навсегда заданными. Точнее говоря, если игрок 1 выбрал свою стратегию x_1 , игрок 2 – стратегию x_2 , . . . , игрок n – стратегию x_n , то множество всех стратегий игрока 1 есть $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, игрока 2 – $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, . . . , игрока n – $X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этом, разумеется, естественно, считать, что $x_i \in X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Считаем, таким образом, что каждый из игроков, выбирая тем или иным способом свои стратегии, может влиять на совокупность всех стратегий как других игроков, так и самого себя.

Приведем формальное описание рассматриваемой игры. В этой игре участ-

вуют n игроков: $i = 1, 2, \dots, n$. В распоряжении каждого игрока i имеется некоторое множество \tilde{X}_i . На множестве $\tilde{X} = \prod_{i=1}^n \tilde{X}_i$ заданы функции выигрыша u_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Кроме того, задано n точечно-множественных отображений $X_i : \tilde{X} \rightarrow \prod (\tilde{X}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества \tilde{X} называется состоянием игры, если $x_i \in X_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). При этом i -я проекция x_i вектора x называется стратегией i -го игрока, отвечающей состоянию x , а множество $X_i(x)$ – совокупность всех стратегий этого игрока, отвечающих указанному состоянию. Рассматриваемую игру будем, так же как и в «классическом» случае, называть игрой n лиц в нормальной форме. Итак, по определению, игрой n лиц в нормальной форме представляет объект

$$G = \left(\left(\tilde{X}_i \right)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (X_i)_{i=1}^n \right). \quad (1)$$

Состоянием равновесия в смысле Нэша игры G , определенной формулой (1), назовем вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, обладающий следующими свойствами:

1) $x_i \in X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (т.е. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ – состояние игры G),

2) $u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) = \max_{x_i \in X_i(\bar{x})} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$.

Теорема. Пусть игра $G = \left(\left(\tilde{X}_i \right)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (X_i)_{i=1}^n \right)$ обладает следующими свойствами:

1) каждое из множеств \tilde{X}_i является выпуклым компактом в конечномерном пространстве,

2) каждая функция u_i непрерывна на множестве $\tilde{X} = \prod_{i=1}^n \tilde{X}_i$ и вогнута по переменной x_i (т.е. при любом $x \in \tilde{X}$ функция $\tilde{u}_i : \tilde{X}_i \rightarrow R_+^1$, определенная формулой $\tilde{u}_i(y) = u_i(x^{(i)}, y)$, является вогнутой),

3) при любом $x \in \tilde{X}$ множество $X_i(x)$ выпукло ($i = 1, 2, \dots, n$),

4) отображение $X_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывно по Какутани.

Тогда G обладает состоянием равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.F. Nash. Equilibrium points in N-person games, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 36 (1950), 49 – 49.

Модель переноса веществ в двумерной прямоугольной среде

Сагдуллаев О.К.

Каттакурганский филиал Самаркандского государственного университета,
Самарканд;
otabek892603@gmail.com

Современные экологические и инженерные задачи всё чаще требуют глубокого понимания процессов переноса загрязняющих и деградирующих веществ в пористых средах [1, 2]. Особый интерес представляет моделирование таких процессов в двухзонных пористых средах, структура которых включает как активных зон с вымываемых адсорбции, так и пассивную зону с невымываемых адсорбции [3, 4]. Настоящая работа посвящена разработке и исследованию математической модели переноса деградирующего вещества в двухзонной пористой среде. Рассматривается двухзонная пористая среда с активной и пассивной зонами в двумерном случае. Для определения поля давления используем уравнение проницаемостей, написанное в двумерно плоском случае

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \chi_2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (1)$$

где использован закон Дарси в виде

$$w_x = -\frac{k_x(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, w_y = -\frac{k_y(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$k_x(\theta), k_y(\theta)$ - проницаемости среды по направлениям x и y соответственно, χ_1, χ_2 - проницаемостей по направлениям x и y .

Если считать, что изменение θ - за счет осаждения вещества мало и изменением проницаемостей от пористости можно пренебречь, то для однородной анизотропной среды можно положить $k_x = \text{const}, k_y = \text{const}$. Этому случаю соответствует (1) с постоянными коэффициентами проницаемостей $\chi_1 = \text{const}, \chi_2 = \text{const}$. при условии $\mu = \text{const}$. Тогда (2) можно записать в виде

$$w_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, w_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

Сначала решаем (1) и определим поле давления p . Для его решения поставим следующие условия

$$p(0, x, y) = p_0, p_0 = \text{const}, p\left(t, 0, \frac{h}{2}\right) = p_1, p_1 = \text{const}$$

$$\frac{\partial p(t, 0, y)}{\partial y} = 0, 0 \leq y \leq \frac{h}{2}, \frac{h}{2} < y \leq h$$

$$p(t, \infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial p(t, x, 0)}{\partial y} = 0, \frac{\partial p(t, x, h)}{\partial y} = 0$$

После определения поля давления из (3) находим поле скоростей фильтрации w_x, w_y .

Уравнение переноса вещества принимает в виде

$$\frac{\partial(\theta c)}{\partial t} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} = D_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \frac{\partial c_a}{\partial t} - \frac{\partial c_p}{\partial t} - \theta \lambda_e c \quad (4)$$

где D_x, D_y - коэффициенты гидродинамической дисперсией по направлениям x и y . соответственно.

Уравнение (4) рассматривается совместно с уравнениями кинетики для концентрации в активной и пассивной зон в следующий виде

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} = \begin{cases} \beta_{ar}c - \lambda_{ea}c_a, & \text{если } 0 < c_a \leq c_{ar} \\ \beta_{aa}c - \beta_{ad}c_a - \lambda_{ea}c_a, & \text{если } c_{ar} < c_a < c_{a0} \\ 0, & \text{если } c_a = c_{a0} \end{cases}$$

где $\beta_{ar}, \beta_{aa}, \beta_{ad}$ - параметры, c_{ar} - предельная концентрация, при которой завершается эффект зарядки.

Кинетика осаждения в пассивной зоне принимается в виде

$$\frac{\partial c_p}{\partial t} = \begin{cases} \beta_{a0}c - \lambda_{ep}c_p, & \text{если } 0 < c_p \leq c_{p1} \\ \frac{\beta_{p0}c_{p1}c}{c_p} - \lambda_{ep}c_p, & \text{если } c_{p1} < c_p < c_{p0} \\ 0, & \text{если } c_p = c_{p0} \end{cases}$$

Ставим следующие начальные и граничные условия :

$$c(0, x, y) = 0, c_a(0, x, y) = 0, c_p(0, x, y) = 0, c_a(0, x, y) = 0$$

$$c\left(t, 0, \frac{h}{2}\right) = c_0, c_0 = \text{const}$$

$$\frac{\partial c(t, 0, y)}{\partial y} = 0, 0 \leq y \leq \frac{h}{2}, \frac{h}{2} < y \leq h$$

$$c(t, \infty, y) = 0$$

$$\frac{\partial c(t, x, 0)}{\partial y} = 0, \frac{\partial c(t, x, h)}{\partial y} = 0$$

Литература

1. Baqer, Y., Chen, X. A review on reactive transport model and porosity evolution in the porous media // Environ Sci Pollut Res 29, 47873Ц47901 (2022).
2. Liu, Z.; Gan, Y.; Luo, J.; Luo, X.; Ding, C.; Cui, Y. Current Status of Emerging Contaminant Models and Their Applications Concerning the Aquatic Environment: A Review // Water 2025, 17, 85. <https://doi.org/10.3390/w17010085>
3. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. Ц М.: Наука, 1983 Ц 237 с.
4. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н., Сенявин М.М. О возможности распространения теории динамики сорбции на расчет осветления воды зернистыми фильтрами // Докл. АН СССР. 1970. 195, 3. с. 658-661.

Математическая модель популяции резистентных и чувствительных бактерий на основе динамической системы типа Лотки-Вольтерры

Хакимова Д. А.¹, Эшмаматова Д. Б.^{1,2}, Завгороднева С. Ю.³

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;

24dil@mail.ru

² Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;

hakimovadildora47@gmail.com

³Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;

zavgorodnevasveta22@gmail.com

Теория нелинейных динамических систем является важным инструментом изучения и анализа эволюции сложных процессов во времени и широко применяется в управлении, экономике и эпидемиологическом моделировании [1]. В частности, системы типа Лотки-Вольтерры обеспечивают эффективную математическую основу для моделирования популяционных процессов. Одним из направлений исследований является изучение хаотического поведения, которое может возникать даже в простых системах при определенных условиях. Такое поведение наблюдается во многих природных и социальных процессах, включая климатические изменения и финансовые рынки.

В данной работе рассматриваются дискретные системы типа Лотки-Вольтерры с кососимметричными матрицами на симплексе S^3 . Показано, что операторы Лотки-Вольтерры, определенные на трехмерном симплексе, можно разделить на три группы в соответствии с их сигнатурами. В рамках данной

классификации исследуется единая динамическая система, относящаяся ко второй группе:

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + ax_2 + bx_3 + cx_4), \\ x_2' = x_2(1 - ax_1 - dx_3), \\ x_3' = x_3(1 - bx_1 + dx_2 - fx_4), \\ x_4' = x_4(1 - cx_1 + fx_3). \end{cases}$$

Начальные концепции таких операторов были изложены в работе [2]. На основе анализа, проведенного в работах [2], [3], получены следующие результаты:

$$x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \Gamma_{24} : M \left\{ 0; \frac{f}{d+f}; 0; \frac{d}{d+f} \right\}.$$

У заданного оператора имеются четыре сигнатуры:

$$\delta_1 = (+ - ++), \quad \delta_2 = (+ - +-), \quad \delta_3 = (+ - -+), \quad \delta_4 = (+ - --).$$

На основе [3] определяется множество неподвижных точек:

$$P = \{x \in S^3 : Ax \geq 0\} = \{e_2; M\}, \quad Q = \{x \in S^3 : Ax \leq 0\} = \{e_4; M\}.$$

Для анализа характера этих точек исследован спектр матрицы Якоби. В результате получено:

$$\Gamma_{24} : M \left\{ 0; \frac{f}{d+f}; 0; \frac{d}{d+f} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1 + \frac{af+cd}{d+f} > 1.$$

Следовательно, точка M является репеллером.

Предлагаемый оператор можно рассматривать как обобщение расширенной модели SIR , представленной в [3]. Он описывает распространение инфекций, повторное заражение, формирование резистентной популяции и эффекты лечения в рамках единой системы. Модель известна в эпидемиологии как модель устойчивости к антибиотикам, так как учитывает взаимную динамику чувствительных и резистентных бактерий, а также влияние терапии.

В рамках модели выделяются четыре группы особей:

- x_1 - здоровые индивиды, восприимчивые к инфекции;
- x_2 - пациенты с бактериями, чувствительными к антибиотикам;
- x_3 - пациенты с бактериями, устойчивыми к антибиотикам;
- x_4 - степень использования антибиотиков (фаза лечения).

Параметры a, b, c, d, f интерпретируются следующим образом: a - интенсивность инфицирования здоровых индивидов чувствительными бактериями; b - коэффициент передачи резистентных бактерий здоровым; d - вероятность трансформации восприимчивой инфекции в резистентную; c - побочные эффекты антибиотиков для здоровых; f - взаимодействие антибиотиков с резистентными бактериями.

Смысл уравнений следующий:

1. $x_1' = x_1(1 + ax_2 + bx_3 + cx_4)$ - описывает изменение здоровой популяции под влиянием инфекции и лечения;
2. $x_2' = x_2(1 - ax_1 - dx_3)$ - характеризует снижение числа чувствительных бактерий вследствие конкуренции со здоровыми и резистентными;
3. $x_3' = x_3(1 - bx_1 + dx_2 - fx_4)$ - отражает рост резистентных бактерий за счёт взаимодействия с чувствительными и уменьшение под действием здоровых и лечения;
4. $x_4' = x_4(1 - cx_1 + fx_3)$ - описывает динамику лечения: снижение при росте здоровой популяции и увеличение при росте резистентных бактерий.

Заключение. Предложена дискретная модель типа Лотки-Вольтерры, описывающая взаимодействие здоровой популяции, чувствительных и резистентных бактерий, а также эффект лечения. Показано существование неподвижных точек и определён их характер, в частности установлено, что точка M является репеллером. Модель позволяет одновременно учитывать распространение инфекции, формирование устойчивости и эффективность терапии, что делает её полезным инструментом для анализа стратегий антибиотикотерапии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marcheva M. Introduction to Mathematical Epidemiology. Springer, 2015. 462 p.
2. Эшмаматова Д.Б. Дискретные модели эпидемиологии, экологии: математическое и компьютерное исследование, Ташкент, 2023.
3. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B., Akhmedova D.B. and Muminov U.R. Linear Homogeneous Inequalities and Trajectory Routes of the Degenerate Lotka-Volterra Operators. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, 46(3), pp. 1257-1265.

Приближенное вычисление быстроосциллирующих интегралов

Шадиметов Х. М.^{1,2}, Уринбоев Р.²

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

²Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;

kholmatshadimetov@mail.ru

Вычисление интегралов от быстро осциллирующих функций является одной из сложных задач в оптике, электродинамике, квантовой механике и многих других областях.

Рассмотрим квадратурных формул с узлами в точках равномерной сетки:

$$\int_0^1 x e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi(\beta), \quad (1)$$

где $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(0, 1)$ — пространство Соболева, $C[\beta]$ — коэффициенты квадратурной формулы (1), $h = \frac{1}{N}$, $N = 2, 3, \dots$, N — число узлов.

В дальнейшем квадратная скобка $[\beta]$ означает дискретность аргумента.

Квадратурной формуле (1) соответствует функционал погрешности

$$\ell(x) = x e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta), \quad (2)$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ — дельта функция Дирака.

Поскольку $\ell(x)$ определено в $L_2^{(1)}(0, 1)$, имеем

$$(\ell(x), 1) = 0. \quad (3)$$

В этом случае квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1) выражается в виде

$$\begin{aligned} \|\ell(x)\|_{L_2^{(1)*}}^2 &= 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^1 x e^{2\pi i \omega x} \frac{|(h\beta - h\beta')|}{2} dx - \\ &- \sum_{\beta=0}^N \sum_{\beta'=0}^N C[\beta] C[\beta'] \frac{|h\beta - h\beta'|}{2} - \iint_0^1 x e^{2\pi i \omega x} y e^{2\pi i \omega y} \frac{|h\beta - h\beta'|}{2} dx dy. \end{aligned}$$

Минимизируя эту норму при условиях (3), получаем следующую систему для нахождения оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}[\beta]$.

$$\overset{\circ}{C}[\beta] * \frac{|h\beta|}{2} + P_0 = \int_0^1 x e^{2\pi i \omega x} \frac{|x - h\beta|}{2} dx, \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{\beta=0}^N \mathring{C}[\beta] = \int_0^1 x e^{2\pi i \omega x} dx.$$

Для решения этой системы мы будем пользоваться дискретный аналог оператора $\frac{d^2}{dx^2}$, т.е. оператором

$$D_1[\beta] = \begin{cases} 0 & \text{при } |\beta| \geq 2, \\ h^{-2} & \text{при } |\beta| = 1, \\ -2h^{-2} & \text{при } \beta = 0. \end{cases}$$

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(1)}(0, 1)$ выражаются формулой:

$$\mathring{C}[\beta] = \frac{h}{(2\pi\omega)^2} D_1[\beta] * e^{2\pi i \omega h \beta} \left(\frac{1}{i\pi\omega} - h\beta \right), \quad \beta = 0, 1, \dots, N.$$

Экстремальная функция разностной формулы

Шадиметов Х. М.^{1,2}, Эсанов Ш. Э.³

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;

²Институт математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан;

³Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;

kholmatshadimetov@mail.ru, esanovsher@mail.ru

Будем рассматривать функции $f(x)$, принадлежащие пространству Соболева

$H_2^{(m)}(0, 1)$. Пространство Соболева $H_2^{(m)}(0, 1)$ - гильбертово пространство классов вещественных функций $f(x)$, с производных (в смысле обобщенных функций) порядка m , квадратично интегрируемых на отрезке $[0, 1]$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle \psi, \varphi \rangle_m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \int_0^1 \frac{d^n}{dx^n} \psi(x) \frac{d^n}{dx^n} \varphi(x) dx, \quad (1)$$

$$\|f\|_{H_2^{(m)}(0, 1)} = \left\{ \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \int_0^1 \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Известно $[0, 1]$, что пространство $H_2^{(m)}(0, 1)$ вложено в пространство непрерывных функций заданных в области $[0, 1]$

$$H_2^{(m)}(0, 1) \rightarrow C(0, 1). \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем под разностной формулой порядка k с равноотстоящими узлами мы будем понимать приближенное равенство вида

$$\sum_{\beta=0}^k C[\beta]\varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^k C^{(l)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0. \quad (4)$$

Здесь $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 2, 3, \dots$, $C[\beta]$ и $C^{(l)}[\beta]$ - коэффициенты разностной формулы, $C^{(l)}[k] \neq 0$. Разностная формула k -го порядка называется неявной, если $C^{(l)}[k] \neq 0$, а если $C^{(l)}[k] = 0$, то явной.

В силу (3) будет линейным и функционал погрешности разностной формулы (2).

$$l_N(x) = \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^N C^{(l)}[\beta]\delta'(x - h\beta), \quad (5)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. Погрешностью формулы (4) мы назовем разность

$$(l_N, \varphi) = \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^N C^{(l)}[\beta]\varphi'[\beta] \quad (6)$$

Задача о построении разностной формулы (4) в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала (5), норма которого в пространстве $H_2^{(m)*}(0, 1)$ минимальна. Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $l_N(x)$ разностной формулы мы будем пользоваться экстремальной функцией данного функционала.

Определение 2. Функция $\psi_\ell(x) \in H_2^{(m)}(0, 1)$ называется экстремальной функцией функционала погрешности $l_N(x)$, если выполняется следующее равенство [1]

$$(l_N, \psi_\ell(x)) = \left\| l|_{H_2^{(m)*}} \right\| \cdot \left\| \psi_\ell|_{H_2^{(m)}} \right\|. \quad (7)$$

В этом пространстве экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ выражается через заданный функционал $l_N(x)$ особо просто, с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного функционала. Справедлива следующая теорема

Теорема. В пространстве $H_2^{(m)}(0, 1)$ экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ определяется формулой

$$\psi_\ell(x) = \sum_{\beta=0}^k C[\beta]\varepsilon_m(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C^{(l)}[\beta]\varepsilon'_m(x - h\beta). \quad (8)$$

Здесь $\varepsilon_m(x)$ определяется формулой

$$\varepsilon_m(x) = \frac{e^{-|x|}}{2^{2m-1}(m-1)!} \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \frac{(2m-n-2)!|x|^n}{n!(m-n-1)!}. \quad (9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М.: Наука. - 1974. - 808 с.

Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной

Шадиметов Х. М., Турсунмурадов С.Т.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,
Узбекистан.

Рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 p(x) \varphi(x) \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta], \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) p(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta), \quad (2)$$

здесь $p(x)$ – весовая функция, от этой функции. Требуется, чтобы интеграл от этой функции существовал в каком то смысле, т.е.

$$\int_0^1 p(x) dx < \infty,$$

$\varphi(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$ –пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением и нормой, соответственно.

$$(\psi, \varphi)_{H_2^{(m)}} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{\omega^{2k}} \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} \bar{\psi}(x) \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) dx, \quad (3)$$

$$\|\varphi\|_{H_2^{(m)}} = \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{\omega^{2k}} \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} \bar{\varphi}(x) \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где $\omega \in R$ – множество действительных чисел и $\omega \neq 0$, $\bar{\psi}(x)$ сопряженная функция к функции $\psi(x)$, $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ коэффициенты квадратурной формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$.

Следующая разность

$$(\ell_N, \varphi) = \int_0^1 p(x) \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta] = \int_R \ell_N(x) \varphi(x) dx \quad (5)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1).

Из неравенства Коши-Шварца

$$|(\ell_N, \varphi)| \leq \left\| \ell_N |H_2^{(m)*} \right\| \cdot \left\| \varphi |H_2^{(m)} \right\|$$

видно, что абсолютное значение погрешности квадратурной формулы (1) оценивается с помощью нормы

$$\left\| \ell_N |H_2^{(m)*} \right\| = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell_N, \varphi)|}{\left\| \varphi |H_2^{(m)} \right\|} \quad (6)$$

функционала погрешности (2) в сопряженном пространстве $H_2^{(m)*}$. Отсюда следует, что оценка погрешности квадратурной формулы (1) на комплекснозначных функциях пространства Соболева $H_2^{(m)}(0, 1)$ сводится к нахождению нормы функционала погрешности (2) в сопряженном пространстве $H_2^{(m)*}(0, 1)$. В настоящей работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул вида (1) в пространстве Соболева $H_2^{(m)*}(0, 1)$ выражается следующей формулой

$$\begin{aligned} \left\| \ell_N |H_2^{(m)*} \right\|^2 &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \bar{C}[\beta] C[\gamma] \varepsilon_{m,\omega}(h\gamma - h\beta) - \\ &- \sum_{\gamma=0}^N [\gamma] \int_0^1 \bar{p}(y) \varepsilon_{m,\omega}(h\gamma - y) dy - \sum_{\beta=0}^N \bar{C}[\beta] \int_0^1 p(x) \varepsilon_{m,\omega}(x - h\beta) dx + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 p(x) \bar{p}(y) \varepsilon_{m,\omega}(x - y) dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $C[\gamma]$ коэффициенты квадратурной формулы а $\bar{C}[\beta]$ сопряженное значение к ним, $\varepsilon_{m,\omega}(x)$ определяется равенством (11), $\bar{p}(y)$ сопряженная функция к функцию $p(y)$.

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^{(m)*}(0, 1)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \left\| \ell_N |H_2^{(m)*} \right\|^2 &= \int_0^1 \int_0^1 p(x)\bar{p}(y) \varepsilon_{m,\omega}(x-y) dx dy - \\ &\sum_{\beta=0}^N \bar{C}[\beta] \int_0^1 \bar{p}(x) \varepsilon_{m,\omega}(x-h\beta) dx. \end{aligned}$$

Экстремальная функция об одной квадратурной формулы в пространстве Соболева

Шадиметов Х.М^{1,2} Нуралиев Ф.А^{1,2,3}, Миркомиллов Д.М¹.

¹Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;

²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

³Ташкентский международный университет, Узбекистан, Ташкент, Узбекистан.

В настоящей работе будет найден экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta), \tag{1}$$

с функционала погрешности

$$l(x) = E_{[0,1]}(x)e^{2\pi i \omega x} - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'(x-h\beta). \tag{2}$$

Здесь

$$d_0[\beta] = \begin{cases} h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right), & \beta = 0, \\ h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}, & \beta = \overline{1, N-1}, \\ h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right), & \beta = N, \end{cases}$$

$$K_{\omega,1} = \left(\frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^2.$$

$d_1[\beta]$ —коэффициенты квадратурной формулы (1), $E_{[0,1]}(x)$ —характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ —дельта функция Дирака. Функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2^{(m)}(0, 1)$, где $L_2^{(m)}(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)}\}$ абсолютно непрерывно и $\varphi^{(m)} \in L_2^{(m)}(0, 1)$ пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением определено равенством:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \cdot \overline{\psi^{(m)}(x)} dx,$$

здесь $\overline{\psi}$ —сопряженная функция к функции ψ и норма функции φ соответственно определяется формулой

$$\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \cdot \overline{\varphi^{(m)}(x)} dx \right\}^{1/2}.$$

Квадрат нормы функционала погрешности вычисляется с помощью экстремальной функции.

Определение. Функция называется экстремальной функцией функционала $l(x)[1]$, если

$$(l, \varphi_e) = \|l\|_{L_2^{(m)*}} \cdot \|\psi_e\|_{L_2^{(m)}}.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. Решение $\psi_e(x)$ краевой задачи является экстремальной функцией функционала погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$ и имеет вид где

$$\psi_e(x) = (-1)^m \bar{l}(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}$$

является решением уравнения

$$\psi^{(2m)}(x) = \delta(x),$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$P_{m-1}(x)$ – многочлен степени $m - 1$, $\delta(x)$ – известная дельта функция Дирака.

Литература

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

Об одной дискретной системе типа Винера-Хопфа

Шадиметов Х. М.^{1,2}, Элмуратов Г. С.²

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

²Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

kholmatshadimetov@mailru

Квадратура сильно осцилирующих интегралов является вычислительной проблемой первостепенной важности в широком спектре приложений, например, квантовой химии, анализе изображений, электродинамике, компьютерной томографии и механике жидкостей. Она широко воспринимается как "трудная" проблема, которую лучше всего преодолеть, каким-либо образом устранив колебания, например, выбрав чрезвычайно малые подинтервалы.

Вычисление сильно осцилирующих интегралов

$$\int_0^{2\pi} e^{i\omega x} f(x) dx$$

происходит в широком диапазоне практических задач и приложений. Высокая осциляция ($|\omega| \gg 1$) означает, что классические квадратуры требуют $O(\omega)$ квадратурных точек, что непрактично.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} e^{i\omega x} f(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k f\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = e^{i\omega x} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\beta\right) \tag{2}$$

в пространстве $\tilde{H}_m(0, 2\pi)$ - периодических функций.

Пронстранство $\tilde{H}_m(0, 2\pi)$ - Гильбертово пространство 2π - периодических функций $f(x)$, m - е производные которых (в обобщенном смысле)

квадратично интегрируемы, со скалярным произведением.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx$$

В нашей работе вычислена квадрат нормы функционала погрешности рассматриваемой квадратурной формулы. Далее, минимизируя эту норму по коэффициентам C_k , $k = 1, 2, \dots, N$ получена дискретная система типа Винера-Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы C_k .

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\left\| \ell | \tilde{H}_m^* \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N C_k C_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{\frac{2\pi i \beta (k-k')}{N}}}{2\pi \beta^{2m}} - 2 \sum_{k=1}^N C_k \frac{e^{\frac{2\pi i \omega k}{N}}}{\omega^{2m}}$$

Теорема 2. Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k$ квадратурной формулы (1) является решением следующей дискретной системе типа Винера-Хопфа

$$\sum_{k'=1}^N \overset{\circ}{C}_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{\frac{2\pi i \beta (k-k')}{N}}}{2\pi \beta^{2m}} = \frac{e^{\left(\frac{2\pi i \omega k}{N}\right)}}{\omega^{2m}}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^N \overset{\circ}{C}_k = 0.$$

Решая эту систему мы находим оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k$.

О краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа с сингулярным коэффициентом и ее приложениях

Эшмаматова Д.Б.^{1,2}, Очилова Н.К.²

¹Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;

²Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;

24dil@mail.ru, nozima@tstu.uz

Уравнения смешанно-составного типа с вырожденными и сингулярными коэффициентами возникают при моделировании процессов диффузии и переноса в средах с неоднородной структурой. Подобные задачи встречаются

в механике, физике плазмы и математической биологии [1], [2]. В частности, модели описывают распределение концентрации вещества или лекарства в тканях, где свойства среды зависят от координаты.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^m u_{xx} + u_{yy} + \beta_0 y^{-1} u_y) = 0, \quad m > 0, \quad -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1, \quad (1)$$

в конечной односвязной области $D \subset \mathbb{R}_+^2$, ограниченной при $y > 0$ нормальной кривой

$$x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$. Пусть

$$J = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\},$$

и

$$W = \left\{ u : u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup AB \cup \sigma_0) \cap C_{x,y}^{3,2}(D), u_{xy}, u_{xyy} \in C(D) \right\}.$$

Задача N_T . Найти функцию $u(x, y) \in W$, удовлетворяющую уравнению (1) в D и условиям

$$u|_{\sigma_0} = \phi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (2)$$

$$u|_{ON} = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad h = \left(\frac{m+2}{2} \right)^{2/(m+2)}. \quad (3)$$

Здесь $\phi(s)$ и $\nu(x)$ – непрерывные функции, $\psi(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая. Точка $O = (0, 0)$, $N = (0, h)$. Для согласованности условий требуется

$$\phi(l_1) = \psi(h), \quad \nu(0) = \psi'(0),$$

где l_1 – длина дуги BN .

Следуя методу из [3], [4] решение задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(y), \quad (4)$$

где $v(x, y)$ является регулярным решением уравнения

$$y^m v_{xx} + v_{yy} + \beta_0 y^{-1} v_y = 0,$$

а $\omega(y)$ – произвольная функция класса $C^2[0, h]$. Без ограничения общности можно положить

$$\omega(h) = 0, \quad \omega'(0) = 0,$$

что упрощает дальнейший анализ. Декомпозиция (4) позволяет разделить влияние переменной x и сингулярных эффектов вдоль оси $y = 0$.

Прикладная интерпретация. Для иллюстрации рассмотрим упрощенную модель диффузии лекарства в тонкий слой ткани. Пусть $m = 1$, $\beta_0 = \frac{1}{2}$. В этом случае уравнение (1) учитывает замедление диффузии вблизи поверхности $y = 0$, что соответствует физиологической границе между кровотоком и тканью.

В качестве частного решения задачи можно взять функцию

$$u(x, y) = x y^{1-\beta_0} = x y^{1/2},$$

которая удовлетворяет уравнению

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \beta_0 y^{-1} u_y = 0.$$

Такой профиль описывает распределение концентрации вещества: вдоль оси x концентрация меняется линейно (эффект локального переноса), а вдоль глубины ткани y наблюдается вырождение типа $y^{1/2}$, что отражает замедленное проникновение лекарства внутрь биологической среды.

Например, при $x = 0.5$ значения концентрации равны:

$$u(0.5, 0.01) \approx 0.05, \quad u(0.5, 0.25) \approx 0.25, \quad u(0.5, 1) \approx 0.5.$$

Это демонстрирует постепенный рост концентрации от поверхности $y = 0$ к глубине, согласующийся с реальными биофизическими процессами.

Задача N_T является естественным обобщением классических задач Бицадзе–Салахитдинова для произвольных значений $m > 0$ и β_0 . Включение сингулярных коэффициентов позволяет описывать процессы, где скорость распространения существенно изменяется у границы области. Такая модель находит интерпретацию в биофизике и медицине: например, при диффузии лекарства в тонкий слой ткани профиль решения $u(x, y) = x y^{1-\beta_0}$ отражает постепенное проникновение вещества от поверхности внутрь среды. Это подтверждает прикладную значимость методов теории смешанных уравнений для анализа процессов диффузии, микроциркуляции и обработки медицинских изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crank J. The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press, 1975.
2. Abramson R.G., Arlinghaus L.R. et al. Parametric modeling of tissue contrast enhancement kinetics in MRI. Magnetic Resonance in Medicine, 2008.

3. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. Сиб. мат. журн., 1961, т.2, №1, с.19.
4. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

**СЕКЦИЯ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
SECTION 6. PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL
STATISTICS**

**Асимптотические свойства ветвящихся процессов с
взаимодействием частиц**

Азимов Ж.¹, Тураев А.²

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,
Узбекистан;

¹azimovjb@gmail.com, ²alimardontoxirovich0413@gmail.com

Рассматривается модель ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем и с взаимодействием частиц. Как известно, в обычных ветвящихся случайных процессах (в.с.п.). Предполагается, что частицы размножаются независимо друг от друга. Однако, во многих реальных процессах рождение новых частиц происходит при взаимодействии нескольких уже существующих частиц. В этом случае используемый обычно аппарат производящих функций может применяться ограниченно и не дает значительных результатов. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц в общей постановке были введены Б.А.Севастьяновым в [1] и изучались в работах [2]-[5]. В работе А.В.Калинкина [4] дается общий обзор марковских ветвящихся процессов с взаимодействием, а в работе И.С.Бадалбаева, А.В.Дряхлова [5] рассматриваются процессы с парными взаимодействиями частиц и установлено экспоненциальное убывание вероятности продолжения процесса.

Рассмотрим ветвящийся процесс $\{\mu(t), t > 0\}$ с одним типом частиц и взаимодействием k частиц. Пусть $\mu(t)$ - число частиц в момент времени t ветвящегося процесса с взаимодействием, в котором размножение частиц происходит следующим образом. В момент времени t любые k частиц могут превратиться в $j \neq k$ частиц, и переходные вероятности процесса

$$P_{ij}(t) = P\{Z(t) = j \mid Z(0) = i\}$$

определяются формулами (при $t \rightarrow 0, k \geq 2$ - целое)

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} + ip_{j-i+k}t + o(t), \quad i \geq k, j \geq i - k$$

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq k - 1,$$

$$P_{ij}(t) = o(t), \quad j < i - k,$$

где $p_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, p_k < 0,$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0,$$

δ_{ij} - символ Кронекера. Процесс $\{\mu(t), t \geq 0\}$ имеет k поглощающих состояний $\{0, 1, \dots, k - 1\}.$

Подобная модель рассматривалась в работах [6] и [7], где были найдены вероятности вырождения процесса. В работе [8] рассмотрена модель процесса с взаимодействием и миграцией частиц.

Основными результатами настоящей работы являются предельная теорема для числовых характеристик и установление функционального соотношения для производящейся функции ветвящихся процессов с взаимодействием частиц. При этом не ограничивая общности, можно предполагать, что процесс начинается с k частиц.

Введем производящие функции (п.ф.)

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \quad F(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\mu(t) = j) s^j.$$

Лемма. Производящая функция $F(t, s)$ удовлетворяет при $|s| \leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F(t, s)}{\partial t} = \frac{f(s)}{s^{k-1}} \left(\frac{\partial F(t, s)}{\partial s} - \sum_{i=1}^k iP(\mu(t) = i) s^{i-1} \right) \tag{1}$$

с начальным условием $F(0, s) = s^k.$

Теперь будем предполагать, что выполняются условия

$$f'(1) = 0, \quad 0 < f''(1) = 2b < \infty, \tag{2}$$

условие, как и в обычном случае, определяющее критический процесс.

Обозначим

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^{k-1} iq_i,$$

где q_i - вероятности вырождения процесса ($i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$).

Теорема. Пуст момент $m_n(t) = E\mu_t^n$ существует для некоторого $n \geq 1.$ Если выполняется условие (2), то при $t \rightarrow \infty$

$$m_1(t) \rightarrow k,$$

$$m_n(t) \sim (k - \bar{q})n!(bt)^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц. В сб.: Третья Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и матем. статистике. Тезисы докладов. Т.1. Вильнюс: Ин-т матем. и кибернет. АН ЛитССР. 1981, с.139–140.
2. Севастьянов Б.А., Калинин А.В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. Докл. АН СССР, 1982, т.264, е 2, с.306–308.
3. Калинин А.В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. Теор. вер. и ее примен., 1982, т. XXVII, в.1, с.192–197.
4. Калинин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. УМН, 2002, т.57, в.2, с.23–84.
5. Бадалбаев И.С., Дряхлов А.В. Об асимптотическом поведении вероятности продолжения ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц. Теор. вер. и ее примен., 1996, т.41, в.4, с.721–737.
6. Ежов И.И. Ветвящиеся процессы с групповой гибелью. Теор. вер. и ее примен. 1980, т.25, в.1. с.206.
7. Решетняк В.Н. Об одном классе ветвящихся процессов с взаимодействием частиц. Аналитические методы в теории надежности, Киев, 1985, с.106–114.
8. Азимов Ж.Б. Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц. ДАН РУз., 2022, №3, с. 3–5.

Law of large numbers for m -dependent random fields with values in Hilbert spaces

Kushmurodov A. A.¹, Sharipov O. Sh.²

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

kushmurodov85@mail.ru

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent,

Uzbekistan V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

osharipov@yahoo.com

Law of large numbers for random variables with values in Banach spaces were studied by many authors, see for instance [1]-[4].

We are interested in law of large numbers for random fields with values in a separable Hilbert space H (with a norm $\|\cdot\|_H$) and satisfying some dependence conditions.

Let us give the definition of m -dependent random fields.

Definition. Denote $\mathbb{Z}^2 = \{a = (a_1, a_2), a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\}$, $\|a\| = \max_{1 \leq i \leq 2} |a_i|$.

Define the distance between two sets $V_1, V_2 \subset \mathbb{Z}^2$ as

$$d(V_1, V_2) = \inf \{\|a - b\| : a \in V_1, b \in V_2\}.$$

Denote by F_V the σ - algebra generated by random elements $\{X_a : a \in V\}$. The random field $\{X_a : a \in \mathbb{Z}^2\}$ is said to be m -dependent, if for any $V_1, V_2 \subset \mathbb{Z}^2$ the σ - algebras F_{V_1} and F_{V_2} are independent whenever $d(V_1, V_2) > m$.

Now we formulate one of our results.

Theorem. Let $\{X_{ij}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ be a m -dependent random field with values in a Hilbert space H . Assume the following conditions hold:

$$EX_{ij} = 0, \quad E \|X_{ij}\|^2 \leq \infty, \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2$$

$$m = o(\max(n_1, n_2)).$$

Then as $\max(n_1, n_2) \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{in probability.}$$

REFERENCES

1. de Acosta A., Inequalities for B-valued random vectors with applications to the law of large numbers. Ann.Probab. 9, 157-161. 1981.
2. Adler A., Rosalsky A.A. and Taylor R.L., Some strong laws of large numbers for sums of random elements, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20, pp. 335-357 1992.
3. Azlarov T.A., Volodin N.A. Law of large numbers for identically distributed Banach-valued random variables. Prob.ther. and its appl., 26, v.3, 584-590, 1981.
4. Sharipov O.Sh., Kushmurodov A.A., Strong law of large numbers for random fields with values in Banach spaces. Uzbek Mathematical Journal. No.1, pp.165-171, 2017.

The non uniform bounds of remainder term in CLT for the sum of functions of m -spacings

Lazareva V., A .

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
1748mailbox@mail.ru

Let U_1, U_2, \dots, U_{n-1} be an ordered sample of size $n - 1$ from a uniform $[0, 1]$ distribution, $U_0 = 0, U_n = 1, G_i^{(m)} = U_{im} - U_{(i-1)m}, i = 1, 2, \dots, N', G_{N'+1}^{(m)} = 1 - U_{N'm}$ their m -spacings, where $N' = \lfloor n/m \rfloor$ is the integer part of n/m . Let $N = N'$

if n/m is an integer and $N = N' + 1$ otherwise, and let $h_k(u)$, $k = 1, 2, \dots, N$ be a set of measurable functions. We consider the statistics of the type

$$R_N(G) = \sum_{k=1}^N h_k \left(nG_k^{(m)} \right), \quad (1)$$

where $m = m(n)$ may increase to infinity jointly with n .

Let $G = (G_1, \dots, G_N)$, $n = 1, 2, \dots$, where $G_i = G_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ are referred to as simple spacings, and let Y_1, Y_2, \dots be independent standard exponentially distributed random variables, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Then $\mathcal{L}(nG) = \mathcal{L}(Y/S_n = n)$, where $\mathcal{L}(X)$ denotes the distribution of the random vector X . We suppose that the moments used below exist. Put $Z_{k,m} = Y_{(k-1)m+1} + \dots + Y_{km}$, $k = 1, 2, \dots, N'$, $Z_{N,m} = Z_{N'+1,m} = Y_{N'm+1} + \dots + Y_n$ if n/m is not an integer, and $Z_{N,m} = 0$ otherwise; $S_{N,m} = Z_{1,m} + \dots + Z_{N,m}$, $R_N(Z) = \sum_{k=1}^N h_k(Z_{k,m})$, $\rho = \text{corr}(R_N(Z), S_n) = \text{corr}(R_N(Z), S_{N,m})$, $f_k(u) = h_k(u) - Eh_k(Z_{k,m}) - (u - m)\rho\sqrt{\text{Var } R_N(Z)/Nm}$, $T_N(G) = \sum_{k=1}^N f_k(nG_k^{(m)})$, $T_N(Z) = \sum_{k=1}^N f_k(Z_{k,m})$. Note that $\sigma_N^2 = \text{Var } T_N(Z) = (1 - \rho^2) \text{Var } R_N(Z)$ and

$$ET_N(Z) = 0, \quad \text{cov}(T_N(Z), S_{N,m}) = 0. \quad (2)$$

From the definition of σ_N^2 , it follows that $\sigma_N^2 = 0$ if and only if $h_k(u) = Cu + b_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, where constants b_k are arbitrary and C does not depend on k for all $k = 1, \dots, N$. We suppose that $\sigma_N^2 > 0$ for all $N = 1, 2, \dots$

Put $\bar{f}_k = f_k(Z_{k,m})/\sigma_N$, $\bar{Z}_{k,m} = (Z_{k,m} - m)/\sqrt{Nm}$.

$$\beta_{jN} = \sum_{k=1}^N E|\bar{f}_k|^j, \quad P_N(x) = P[T_N(G) < x\sigma_N],$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt. \quad (3)$$

Theorem. There is a constant $C > 0$ such that for arbitrary integer $s > 2$ and $n > s + 1$

$$\Delta_n(x) = |P_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C(s)}{1 + |x|^s} \left(\beta_{3n} + \beta_{sn} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

LITERATURE

1. Bhattacharya, P.H., and R. Ranga Rao. Normal approximation and Asymptotic Expansions. New York: Wiley, 1976.
2. Mirakhmedov, S.A., Lower Estimation of the Remainder Term in the CLT for a Sum of the Functions of k-Spacings. Statistics and Probability Letters, Elsevier.

2005. Vol. 73, No.4, pp. 411–424.

3. Holst, L. Asymptotic normality of sum-functions of spacings. Ann. Prob. 1979. Vol. 7, pp. 1066–1072.

Central limit theorem for dependent random variables with values in $L_p[0, 1]$

Muxtorov I. G¹, Sharipov O. Sh.²

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan

ibrohimmuxtorov199719@gmail.com

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan

osharipov@yahoo.com

The central limit theorem and the invariance principle for random variables with values in Banach spaces have been studied by many authors; see, for instance, [1] and [2]. Such theorems are important because of their applications in mathematical statistics. We consider the central limit theorem for triangular arrays of weakly dependent random variables with values in $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ (space of all \mathfrak{S} -measurable functions $f(t)$, $t \in [0, 1]$ such that $\int_0^1 |f(t)|^p \lambda(dt) < \infty$ with the norm $\|f(t)\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \lambda(dt)\right)^{\frac{1}{p}}$, where $\lambda(\cdot)$ -Lebesgue measure and \mathfrak{S} -Borel σ -field of $[0, 1]$). We assume that random variables satisfy mixing conditions. Introduce mixing coefficients for triangular arrays.

$$\varphi_m(k) = \sup_{n \in \mathbb{N}, j_n > k} \sup_{\Pi_m} \max_{1 \leq h \leq j_n - k} \sup \left\{ |P(A/B) - P(A)| : B \in \Psi_{1h}^{(n)}(m), \right.$$

$$\left. A \in \Upsilon_{h+k, j_n}^{(n)}(m), P(B) > 0 \right\}, (k \in \mathbb{N})$$

where $\{X_{nj}(t) : j = 1, \dots, j_n, n \in \mathbb{N}\}$ is a triangular arrays of random variables with values in $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, $\Psi_{a,b}^{(n)}(m)$ is the σ -field generated by random variables $\prod_m X_{na}(t), \dots, \prod_m X_{nb}(t)$ and $\prod_m : L_p[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a projective operator, i.e., $\prod_m X_i(t) = (X_i(t_1), \dots, X_i(t_m))$, $t_i \in [0, 1]$.

We say that $\{X_{nj}(t) : j = 1, \dots, j_n, n \in \mathbb{N}\}$ is a φ_m -mixing if $\varphi_m(k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ for any fixed $m = 1, 2, \dots$.

Theorem. Let $\{X_{nj}(t) : j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$ be a φ_m -mixing triangular array of row-wise stationary, centered L_p -valued $1 \leq p < 2$ random variables. Assume that for some $0 < q \leq p$ and for some $r > 2$, the following conditions hold:

1. $nE |X_{n1}(t+h) - X_{n1}(t)|^q \leq \varepsilon(h)$ for $0 \leq h < 1$, $0 \leq t \leq 1-h$ and $n = 1, 2, \dots$, for some function $\varepsilon(\cdot)$ such that $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$,
2. $\varphi_m(n) = O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$, $\lambda > \frac{r}{r-1}$ for all $m = 1, 2, \dots$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} nEX_{n1}(t_1)X_{n1}(t_2) = \sigma(t_1, t_2)$ for $t_1, t_2 \in [0, 1]$ where $|\sigma(t_1, t_2)| < \infty$,
4. $(E |X_{n1}(t)|^r)^{\frac{2}{r}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ for $t \in [0, 1]$.

Then the following weak convergence holds:

$$S_{nn}(t) = \sum_{i=1}^n X_{ni}(t) \Rightarrow N_T(t)$$

where $N_T(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and the covariance function $T(x, y) = \text{cov}(N(x), N(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(S_{nn}(x), S_{nn}(y))$, where $x, y \in [0, 1]$.

REFERENCES

1. Chen X., White H. Central limit theorem and functional central limit theorems for Hilbert-valued dependent heterogeneous arrays with applications. *Econometric Theory*. 1998. 14. P. 260-284.
2. Dehling H., Sharipov O., Wendler M. Bootstrap for dependent Hilbert space-valued random variables with application to von Mises statistics. *J. of Mult. Anal.* 2015. Vol. 133, P. 200-215.

Strong laws of large number for random fields with values in infinite dimensional Banach spaces

Ruzieva D. S.¹, Sharipov O. Sh.²

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
dilnura.saidovna@gmail.com

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan
osharipov@yahoo.com

Let $\{\xi(t), t \in Z^2\}$ be a random field with values in a separable Hilbert space H (with inner product (\cdot, \cdot) and a norm $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$), c_0 (a space of all sequences $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ with a norm $\|x\| = \sup_n |x_n|$) and l_p ($1 \leq p \leq 2$) (a space of the sequences $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p < \infty$ with a norm $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p)^{1/p}$) can be defined analogously. In these spaces as a basis we take the following standard basis

$\{e_j, j \geq 1\}$ $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. By $\{e_i, i \geq 1\}$ we denote an orthonormal basis of H .

Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a random field with values in H . Thus we can write

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} X^{(j)}(t) e_j, \quad t \in Z^2, \quad j \in N.$$

Assume that the following representations hold

$$X^{(i)}(t) = g_i(\xi_i(t - s), \quad s \in Z^2) \quad i = 1, 2, \dots \tag{1}$$

where $g_i, i = 1, 2, \dots$ are measurable functions. Such real valued random fields were considered, for instance in [1].

Let $\{\xi_i^|(t), t \in Z^2\}$ be an independent copy of $\{\xi_i(t), t \in Z^2\}$ and

$$\bar{X}^{(i)}(t) = g_i(\xi_i^*(t - s), \quad s \in Z^2) \quad i \in N$$

where

$$\bar{X}^{(i)}(t) = g_i(\xi_i^*(t - s), \quad s \in Z^2) \quad i \in N$$

$$\xi_i^*(j) = \begin{cases} \xi(j), & \text{if } j \neq 0 \\ \xi^|(0), & \text{if } j = 0 \end{cases}$$

$$\delta_i(t, p) = \left(E \left| X^{(i)}(t) - \bar{X}^{(i)}(t) \right|^p \right)^{1/p}$$

$$\Delta_p(j) = \sum_{t \in Z^2} \delta_j(t, p).$$

Denote $S_{G_n} = \sum_{t \in G_n} X(t)$, where $\{G_n, n = 1, 2, \dots\}$ – is a sequence of finite sets from Z^2 .

We assume that $G_k \subset G_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|G_k|}{Ck^\gamma} = 1$, for some $\gamma \geq 1, C > 0$ where $|G_k| = \text{card } G_k$.

Theorem 1. Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a random field with values in H defined by equation (1). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2 < \infty,$$

then for $\beta > \frac{1}{2}$ and $\alpha < \min \left\{ \frac{1}{2\gamma\theta}, \frac{\gamma\theta-1}{2\gamma\theta} \right\}$, for some $\theta > 1$

$$\frac{(|G_n|)^\alpha S_{G_n}}{(\text{Log } |G_n|)^\beta |G_n|} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Theorem 2. Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a c_0 -space-valued random field defined by (1). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_p^p(j) < \infty, \quad \text{for some } p \geq 2.$$

Then as $n \rightarrow \infty$ for $\beta > \frac{1}{2}$ and $\alpha \leq \min \left\{ \frac{1}{2\gamma\theta}, \frac{\gamma\theta-1}{2\gamma\theta} \right\}$ for any $\theta > 1$

$$\frac{(|G_n|)^\alpha}{(\text{Log } |G_n|)^\beta |G_n|} S_{G_n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Theorem 3. Let $\{X(t), t \in \mathbb{Z}^2\}$ be a $l_p(1 \leq p \leq 2)$ -space-valued random field defined by (1). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_p(j))^{p/2} < \infty \quad \text{for some } p \geq 2.$$

Then as $n \rightarrow \infty$ for $\beta > \frac{1}{2}$ and $\alpha \leq \min \left\{ \frac{1}{2\gamma\theta}, \frac{\gamma\theta-1}{2\gamma\theta} \right\}$ for any $\theta > 1$

$$\frac{(|G_n|)^\alpha}{(\text{Log } |G_n|)^\beta |G_n|} S_{G_n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

In the talk strong laws of large numbers for random fields with weights will be given as well.

REFERENCES

1. M.E.Machkouri, D.Volny, W.B.Wu. A central limit theorem for stationary random fields. //Stochastic Processes and their Applications. 2013. 123, P. 1–14.

Strong law of large numbers for random walks in weakly dependent random scenery

Sharipov S.O.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
sadi.sharipov@yahoo.com

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. The random variables we deal with are all defined on $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Let $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be two independent sequences of independent identically distributed (i.i.d.) random variables taking values in \mathbb{R} and \mathbb{Z} , respectively. The sequence $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is called the random scenery. The sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is the sequence of increments of the random walk $(S_n)_{n \geq 0}$ defined by $S_0 = 0$ and $S_n := X_1 + \dots + X_n$ for $n \in \mathbb{N}$.

We define the random walk in random scenery as the process $(Z_n)_{n \geq 0}$ given by

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n \xi_{S_k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

In fact, (1) is a cumulative sum process whose summands are drawn from the scenery, the order in which the summands are drawn is determined by the path of the random walk. A considerable number of papers have been devoted to studying the limiting behavior of (1). We refer the reader to the survey by Pene [1].

The purpose of the talk is to provide the recent results on the validity of the SLLN for (1) when the random scenery is non-stationary and satisfies the θ_2 -weakly dependent condition. Furthermore, we establish the SLLN for (1) when the random walk is a stationary Gaussian sequence satisfying corresponding condition. In the special case where the scenery is identically distributed and satisfies θ_1 -weakly dependence condition, we also prove the SLLN.

We recall definition of the dependence coefficients which we shall use in the sequel. As a measure of dependence, we will use the weakly dependent coefficient introduced by Dedecker et al. [2].

On the Euclidean space \mathbb{R}^m , we define the metric

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|.$$

Let $\Lambda = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_m$, where Λ_m is the set of Lipschitz functions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ with respect to the metric d_1 . If $f \in \Lambda_m$, we denote by $\text{Lip}(f) := \sup_{x,y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_1(x,y)}$ the Lipschitz modulus of f . Define the set of functions $\tilde{\Lambda} = \{f \in \Lambda : \text{Lip}(f) \leq 1\}$.

Definition 1. Let ξ be \mathbb{R}^m -valued random variable defined on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, assumed to be square integrable. For any sub σ -algebra \mathcal{M} of \mathfrak{F} , we define the θ_2 -dependence coefficient

$$\theta_2(\mathcal{M}, \xi) = \sup \left\{ \|\mathbb{E}(f(\xi) | \mathcal{M}) - \mathbb{E}(f(\xi))\|_2, f \in \tilde{\Lambda} \right\},$$

where $\|g\|_2 = \left(\mathbb{E} |g(\xi)|^2 \right)^{1/2}$ for $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

We now define the coefficient $\theta_{k,2}$ for a sequence of σ -algebras and a sequence of random variables.

Definition 2. Let $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of square integrable random variables with values in \mathbb{R} . Let $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of sub σ -algebras of \mathfrak{F} . For any $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ and $n \in \mathbb{N}$, we define

$$\theta_{k,2}(n) = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{1}{l} \sup \{ \theta_2(\mathcal{M}_p, (\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l})), p+n \leq j_1 < \dots < j_l \}$$

and

$$\theta_2(n) = \theta_{\infty,2}(n) = \sup_k \theta_{k,2}(n).$$

The sequence $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is said to be θ_2 -weakly dependent with respect to $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ if $\theta_2(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Our main result reads as follows.

Theorem. Let $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d. random variables with $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Assume that the following conditions hold:

(i) $(\xi_i^2)_{i \in \mathbb{Z}}$ is a uniformly integrable;

(ii) $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is θ_2 -weakly dependent with $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_{1,2}(j) < \infty$.

Then, as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{Z_n - \mathbb{E}Z_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

LITERATURE

1. Pene F. Random walks in random sceneries and related models. ESAIM: Proceedings and Surveys. 68 (2020), P. 35-51.
2. Dedecker J., Doukhan P., Lang G., León J. R., Louhichi S. and Prieur C. Weak Dependence: With Examples and Applications. Lect. Notes in Stat. 190. Springer, New-York, 2007.

Некоторые асимптотические оценки распределений сумм независимых случайных векторов.

Сирожитдинов А. А.

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent,
Uzbekistan;*

abdulhamidsirojitdinov@gmail.com

В этом работе обобщен один результат Розена для сумм случайных величин на сумму случайных векторов. Для сравнения приводим сначала результат Розена.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – последовательность независимых случайных с общим невырожденным распределением $F_\xi(x)$. Пусть $F_n(x)$ функция распределения суммы

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$(a, a + l_n)$ – интервал на оси x , и C – константа, независимая от n и l_n

Теорема 1. [1].

(a) Если $l_n \leq n^p$, $0 < p < \frac{1}{2}$, то для любого $-\infty < a < +\infty$

$$P(a < \zeta_n < a + l_n) \leq C / n^{\frac{1}{2}-p}$$

(b) Если $l_n \leq \varepsilon \sqrt{n}$, $\varepsilon > 0$, то для любого $-\infty < a < +\infty$

$$P(a < \zeta_n < a + l_n) \leq \varepsilon (C + \tau(\varepsilon, n)),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\varepsilon, n) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$;

(с) Если $l_n \leq M$, то для любого $-\infty < a < +\infty$

$$P(a < \zeta_n < a + l_n) \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

(d) $\max_a P(\zeta_n = a) \leq C/\sqrt{n}$.

Прежде, чем приводит наш результат теперь, обозначим через $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – последовательность независимых случайных s -мерных векторов с общей распределение вероятностей P , и положим $\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_s|)$, – норма вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in R^s$.

Далее положим

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad a_i = \int_{|x| \leq N} P(dx), \quad a(a_1, \dots, a_s),$$

$$m = \int_{\|x-a\| \leq N} P(dx), \quad Q(t) = \int_{\|x-a\| \leq N} (t, x-a)^2 P(dx),$$

где N – некоторое положительное постоянное число.

Теорема 2. Пусть, I_n есть n -мерный шар в s радиусом r_n , пусть далее существует конечное $N > 0$ такое, что $m > 0$ и квадратичная форма $Q(t)$ положительно определена.

(а) Если $r_n \leq n^\alpha$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$), то

$$P(S_n \in I_n) \leq \frac{C}{n^{s(\frac{1}{2}-\alpha)}};$$

где ε означает не зависящую от n константу не всегда одну и тут же.

(b) Если $r_n \leq \varepsilon\sqrt{n}$, то

$$P(S_n \in I_n) \leq \varepsilon^s (C + \eta(\varepsilon, n));$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(\varepsilon, n) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$;

(с) Если $r_n \leq C$, то

$$P(S_n \in I_n) \leq \frac{C}{n^{s/2}}.$$

(d) $\max_b P(S_n = b) \leq \frac{C}{n^{s/2}}$.

Замечание. Для любого $S \subset R^s$ положим $\rho = \max_{x,y \in S} |x - y|$, т.е. ρ – максимальное расстояние между точками S .

Литературы

1. Rosen B. On the asymptotic distribution of sums of independent identically random variables. Arkiv for mathematic, 4, pp.323-332, 1977.

Условия асимптотической нормальности и оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для статистики от вектора спейсингов

Каландаров У. Н.

ТУИТ имени Мухаммада ал- Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
qalandarov@tuit.uz

Асимптотический анализ распределения сумм случайных величин является одним из центральных задач теории вероятностей. Это объясняется тем, что многие случайные величины, используемые в приложениях, представимы в виде сумм случайных величин. В частности, некоторые классы статистик, используемых для построения критериев проверки статистических гипотез является суммами функций от тех или иных характеристик выборки. В этих случаях, как правило, слагаемые не являются независимыми случайными величинами и не входят в класс так называемых слабо зависимых случайных величин, которые к настоящему времени достаточно изучены. Важным классом таких сумм является суммы функций от спейсингов (т.е. разностей соседних членов вариационного ряда наблюдений). Статистики, представимые в виде сумм функций от спейсингов, используются, в частности, для построения критериев проверки гипотезы о неизвестном распределении. Следует отметить, что при проверки гипотезы о неизвестном распределении без ограничения общности можно предположить, что основная проверяемая гипотеза предполагает равномерность на $(0,1)$ неизвестного распределения. Кроме того, в ряде задач исследование распределения статистик от произвольных спейсингов сводится к рассмотрению соответствующих статистик от равномерных спейсингов. Случайные величины являющиеся суммами от равномерных спейсингов, применяются также в задачах о покрытии[1].

Пусть U_1, U_2, \dots — последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных величин, и пусть $0 = U_{0,n} \leq U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n-1,n} \leq U_{n,n} = 1$ — вариационный ряд случайных величин U_1, \dots, U_{n-1} . По определению вектором равномерных спейсингов называется случайный вектор $\mathbf{D}^{(n)} = (D_{1,n}, \dots, D_{n,n})$, $D_{i,n} = U_{i,n} - U_{i-1,n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Далее, пусть $f_m(y) = f_{m,n}(y)$, $m = 1, 2, \dots, n$ — совокупность измеримых функций неотрицательного аргумента y .

Рассматриваются следующие статистики от вектора спейсингов

$$R_n(\mathbf{D}) = \sum_{m=1}^n f_m(nD_{m,n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Статистика $R_n(\mathbf{D})$ называется *симметрической*, если $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = f(x)$. Заметим, что в наших рассмотрениях функции $f_m(x)$ могут

быть случайными. В этом случае предполагаем, что при каждом фиксированном x последовательность $f_1(x), \dots, f_n(x)$ является последовательностью независимых с.в., не зависящих от вектора $\mathbf{D}^{(n)}$.

Пусть $\mathbf{1}\{A\}$ — индикатор события A , Пусть $Y_1(\lambda), Y_2(\lambda), \dots$ — последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ ,

$$S_n(\lambda) = Y_1(\lambda) + \dots + Y_n(\lambda), \quad Y_i = Y_i(1), \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n), \quad S_n = S_n(1).$$

$$R_n(\mathbf{Y}) = \sum_{m=1}^n f_m(Y_m), \quad \rho = \text{corr}(R_n(\mathbf{Y}), S_n),$$

$$g_m(Y_m) = f_m(Y_m) - E f_m(Y_m) - (Y_m - 1)\rho \sqrt{\frac{DR_n(\mathbf{Y})}{n}},$$

$$T_n(\mathbf{Y}) = \sum_{m=1}^n g_m(Y_m), \quad A_n = ER_n(\mathbf{Y}),$$

$$\sigma_n^2 = DT_n(\mathbf{Y}) = (1 - \rho^2)DR_n(\mathbf{Y}), \quad \beta_{j,n} = \frac{1}{\sigma_n^j} \sum_{m=1}^n E|g_m(Y_m)|^j.$$

$$P_n(x) = P\{R_n(\mathbf{D}) < x \sigma_n + A_n\}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Из определения σ_n^2 следует, что $\sigma_n^2 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$f_m(y) = C, y + b_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где C и b_m — постоянные (и C не зависит от m). В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma_n^2 > 0$ при всех n .

Теорема 1. Если выполнено условие Линдеберга для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n^3} \sum_m E[g_m(Y_m) \mathbf{1}\{|g_m(Y_m)| \geq \varepsilon \sigma_n\}]^2 = 0,$$

то статистика $R_n(\mathbf{D})$ асимптотически нормальна с параметрами A_n и σ_n^2 .

Теорема 1 обобщает результат работ J.Beirlant, P.Janssen и M.Veraverbeke [2], на необязательно симметрические статистики.

Теорема 2. Существует абсолютная константа C такая, что для любого $\delta \in (0, 1]$ и $n > 2$ имеет место неравенство

$$\Delta_n := \sup_x |P_n(x) - \Phi(x)| \leq C\beta_{2+\delta,n}.$$

Оценка, данная теоремой 2, является неулучшаемой с точностью до абсолютной константы C . Из нее, в частности, вытекает следующий результат.

Следствие. Пусть для некоторого $\delta \in (0, 1]$ выполнены условия

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma_n^2 > 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n E |g_m(Y_m)|^{2+\delta} < \infty.$$

Тогда $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$ ($n \rightarrow \infty$).

При $\delta = 1$ следствие является результатом работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Mirakhmedov S., Kalandarov U. The Non Uniform Bounds of Remainder Term in CLT for the Sum of Functions of Uniform Spacings, Turkish Journal of Mathematics 22, (1), 53-60, 1998.
2. Beirlant J., Janssen P., Veraverbeke M., On the asymptotic normality of functions of uniform spacings. Canadian J.Stat., v.19.no 1, p.93-101,1991.
3. Does R.J.M.M., Klaassen C.A.J. The Berry-Esseen theorem for function of uniform spacings. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Gebiete.,v.65. p.461-474, 1984.

СЕКЦИЯ 7. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
SECTION 7. CONTEMPORARY PROBLEMS IN MECHANICS

Numerical solution of the boundary value inverse problem for the equation of nonstationary relaxation filtration with the De Souza marching method

Kholiyarov E. Ch., Turaev D. Sh.

(Termez university of economics and service, Termez, Uzbekistan;
 e.kholiyarov@mail.ru, turaevdilmurod8@gmail.com;)

Let us consider the formulation of a boundary inverse problem for the equation of non-stationary relaxation filtration of a liquid in a porous medium. The values of liquid pressure are given at points $x = L$ and $x = d, d \in (0, L)$. The initial pressure distribution is also known $p(x, 0) = p_0, \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0$ where $p_0 = const$. The problem is reduced to determining the pressure field of region $(0, d)$ and $(x = 0)$ based on pressure measurements in $(x = d)$. The problem requires finding the pressure of the liquid in $(x = 0)$. Let us formulate the problem in the form of an equation of non-stationary relaxation filtration

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right) \tag{1}$$

and additional conditions

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in (0, L], \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, L], \tag{3}$$

$$p(d, t) = z(t), \quad t \in (0, t_m], \tag{4}$$

$$p(L, t) = p_0, \quad t \in (0, t_m], \tag{5}$$

where t_m is the time during which the process is studied.

To solve the boundary inverse problem, we write out additional data in detail, i.e. $z(t)$ in (4). To do this, in segment $[0, L]$ for equation (1), we solve the direct problem. Therefore, the boundary condition (Darcy’s law) is written as follows:

$$v(0, t) = v_0 = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad t \in [0, t_m], \tag{6}$$

where v is the filtration rate.

To solve direct problems (1), (2), (3), (5), (6) we will use the finite difference method. First, we define the area D , i.e. $D = D_1 \cup D_2 = \{0 \leq x \leq d, 0 \leq t \leq t_m\} \cup \{d \leq x < \infty, 0 \leq t \leq t_m\}$, then we enter the grid there

$$\omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), x_i = ih, x_n = nh = d, t_j = j\tau, h = \frac{L}{N}, \tau = \frac{t_m}{M} \right\}$$

$$i = 0, 1, \dots, n, n + 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$$

where L is some characteristic length of the layer. First, we approximate problems (1), (2), (3), (5), (6):

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^{j-1}}{2\tau} + \lambda_v \frac{p_i^{j+1} - 2p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2} = \varkappa \left[\frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda_p}{\tau} \left(\frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^j - 2p_i^j + p_{i-1}^j}{h^2} \right) \right], \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1,$$

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\frac{p_i^1 - p_i^0}{\tau} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (9)$$

$$p_N^{j+1} = p_0, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (10)$$

$$v_0 = -\frac{k}{\mu} \left[\frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} + \frac{\lambda_p}{\tau} \left(\frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} - \frac{p_0^j - p_1^j}{h} \right) \right] \quad (11)$$

Let us write the difference equation (7) as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa}{h^2} \left(1 + \frac{\lambda_p}{\tau} \right) p_{i-1}^{j+1} - \left[\frac{2\varkappa}{h^2} \left(1 + \frac{\lambda_p}{\tau} \right) + \frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda_v}{\tau^2} \right] p_i^{j+1} + \frac{\varkappa}{h^2} \left(1 + \frac{\lambda_p}{\tau} \right) p_{i+1}^{j+1} = \\ = \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{\lambda_v}{\tau^2} \right) p_i^{j-1} + \left(\frac{2\lambda_v}{\tau^2} + \frac{2\varkappa\lambda_p}{\tau h^2} \right) p_i^j - \frac{\varkappa\lambda_p}{\tau} \left(\frac{p_{i+1}^j + p_{i-1}^j}{h^2} \right) \end{aligned}$$

which leads to a system of linear equations (8), (9), (10), (11) and is solved by the sweep method.

Additional data for the inverse problem are formed on the basis of a quasi-real experiment

$$z^\delta(t) = z(t) + 2\delta(\sigma(t) - 0, 5),$$

where δ is the error, $\sigma(t)$ is a uniformly distributed random variable on $[0, 1]$.

To solve the boundary inverse problem, we apply the marching method of De Souza. From equation (7) we find

$$\begin{aligned} p_{i-1}^{j+1} = \left(2 + \frac{h^2(\tau + 2\lambda_v)}{2\varkappa\tau(\tau + \lambda_p)} \right) p_i^{j+1} - p_i^{j+1} + \frac{h^2(2\lambda_v - \tau)}{2\varkappa\tau(\tau + \lambda_p)} p_i^{j-1} - \\ - \frac{2(h^2\lambda_v + \tau\varkappa\lambda_p)}{\varkappa\tau(\tau + \lambda_p)} p_i^j + \frac{\lambda_p}{\tau + \lambda_p} (p_{i+1}^j + p_{i-1}^j), \quad (12) \\ i = n, n - 1, \dots, 1; j = 1, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

LITERATURE

1. Molokovich Yu.M., Neprimerov N.N., Pikuza V.I., Shtanin A.V. Relaxation filtration, Kazan: Kazan University Publishing House, - 1980.
2. Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley, 1985.
3. B. Khuzhayorov, T.O. Djiyanov, M.S. Zokirov. Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium // International Journal of Applied Mathematics, 2024, Volume 37, No. 1. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10>
4. Kholiyarov E., Turaev D., Buriev J. Numerical solution of boundary inverse problem for fluid relaxation filtration in porous media. AIP Conference Proceedings. AIP Publishing, 2024.

Tebranishlardan himoyalannuvchi nomukammal elastik plastinkaning tebranishlari ustuvorligi

Xasanov J .A.

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston.

xasanovjaxongir089@gmail.com

Ushbu ishda kinematik jarayonlarda gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so'ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko'ndalang tebranishlari ustuvorligi Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidan foydalanilgan holda tekshirilgan. Ustuvorlik shartlari sistema parametrlariga bog'liq holda analitik ko'rinishda aniqlangan. Sonli hisoblashlar natijasida ustuvorlik chegaralari va sohalari sistema parametrlari bo'yicha tahlil qilingan, tavsiyalar ishlab chiqilgan.

Nomukammal elastik doiraviy plastinkaning gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali elastik dempferlovchi elementga ega dinamik so'ndirgich bilan birgalikdagi ko'ndalang tebranishlari ustuvorligini tekshirish masalasini qaraymiz.

Doiraviy plastinkaning dinamik so'ndirgich bilan birgalikda chiziqlimas ko'ndalang tebranishlari differensial tenglamalar sistemasini xususiy formalar bo'yicha qatorga yoyish usulini qo'llash natijasida quyidagi differensial tenglamalarga ega bo'lamiz [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \omega_{01}^2 RT - n^2 \mu_0 \mu_1 P_0 Q_0 N \zeta &= -d_* W_0; \\ P_0 Q_0 \ddot{T} + \ddot{\zeta} + n^2 N \zeta &= -W_0, \end{aligned} \tag{1}$$

bunda W_0 -asos tezlanishi; ω_{01} - plastinkaning xususiy chastotasi; $\eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2$ - lar o'zgarimas koeffitsientlar bo'lib, plastinka materialining gisterezis sirtmog'idan aniqlanadi [2];

$$R = 1 + (-\eta_1 + j\eta_2) R_1 + (-\nu_1 + j\nu_2) R_2;$$

$$R_1 = \frac{3D}{\omega_{01}^2 \rho h d_1} \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1} (i_1 + 3)} |T|_a^{i_1} G_{i_1};$$

$$G_{i_1} = \iint_S PQ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\beta_1 |\beta_1|_a^{i_1}) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \beta_2 |\beta_2|_a^{i_1} \right] dS;$$

$$R_2 = \frac{6D(1-\mu)}{\omega_{01}^2 \rho h d_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} \frac{h^{i_2}}{2^{i_2} (i_2 + 3)} |T|_a^{i_2} H_{i_2};$$

$$H_{i_2} = \iint_S PQ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\beta_3 |\beta_3|_a^{i_2}) dS;$$

$$d_* = \frac{d_2}{d_1}; \quad d_1 = \int_0^{2\pi} Q^2 d\theta \int_{r_0}^{R_0} P^2 dr; \quad d_2 = \int_0^{2\pi} Q d\theta \int_{r_0}^{R_0} P dr;$$

R_0 - doiraviy plastinka radiusi; r_0 - chegaraviy shartlar berilgandagi ichki soha radiusi;

$$\beta_1 = Q \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} Q \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} P \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \right);$$

$$\beta_2 = \frac{1}{r} Q \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} P \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \mu Q \frac{\partial^2 P}{\partial r^2};$$

$$\beta_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} P \frac{\partial Q}{\partial \theta};$$

$P = P(r)$ va $Q = Q(\theta)$ - lar mos ravishda radius r va burchak θ larga bog'liq funksiyalar bo'lib, chegaraviy shartlardan aniqlanadi; $T = T(t)$ - vaqtning funksiyasi; $C_{i_1} (i_1 = 0, \dots, k_1)$, $K_{i_2} (i_2 = 0, \dots, k_2)$ - α_{1i} , α_{2i} , α_{3i} va z_i materialni siklik deformatsiyalardagi koordinatalarga mos nuqtalarda eksperimental tanlangan $\alpha_1 = f_r(z)$, $\alpha_2 = f_\theta(z)$, $\alpha_3 = g(z)$ chiziqlardan aniqlanuvchi gisterezis parametrlari [3]; $n = \sqrt{\frac{c}{m}}$, c , m - mos ravishda dinamik so'ndirgichning xususiy chastotasi, birligi va massasi; ζ - plastinkaga nisbatan dinamik so'ndirgichning ko'chishi; $\mu_0 = \frac{m}{\rho h \pi R_0^2}$; $\mu_1 = \frac{\pi R_0^2}{d_1}$; $N = 1 + (-\gamma_1 + j\gamma_2) [D_0 + f(\zeta_0)]$; γ_1 , γ_2 - lar o'zgarimas koeffitsientlar bo'lib, dinamik so'ndirgich materialining gisterezis sirtmog'idan aniqlanadi [2]; $f(\zeta_{ot})$ - dinamik so'ndirgich elastik dempferlovchi elementi materialining nisbiy deformatsiya maksimal qiymatlari- ning umumiy ko'rinishdagi funksiyasi bo'lib tebranishlar dekrementini ifodalaydi. $f(\zeta_{ot}) = D_1 \zeta_{ot} + \dots + D_{s_1} \zeta_{ot}^{s_1}$; D_0 , D_1 , \dots , D_{s_1} - lar gisterezis sirtmog'idan topiladigan, so'ndirgich elastik dempferlovchi elementini dempferlash xossalariga bog'liq tajribadan aniqlanadigan parametrlar [2]; $P_0 = P_0(r_0)$ va $Q_0 = Q_0(\theta_0)$ - lar mos ravishda radius r_0 va burchak θ_0 larga bog'liq funksiyalari.

Asos tezlanishini $W_0 = \varepsilon p_0 \cos \omega t$ deb olib ($\varepsilon p_0 \ll 1$), (1) differensial tenglamalar sistemasi yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$T = T_a(t) \cos(\omega t + \alpha(t));$$

$$\zeta = \zeta_a(t) \cos(\omega t + \beta(t)), \quad (2)$$

bunda $T_a(t), \alpha(t)$ va $\zeta_a(t), \beta(t)$ – sekin o'zgaruvchan funksiyalar bo'lib, mos ravishda T va ζ o'zgaruvchilarning amplituda va boshlang'ich fazalari hisoblanadi.

(2) yechimlarni va ulardan olingan ikkinchi tartibli hosilalarni (1) differensial tenglamalar sistemasiga qo'yib, ba'zi hisoblashlardan so'ng garmonik qo'zg'alishlarda gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so'ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko'ndalang tebranishlarini normal ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi keltirib chiqarilgan. Tenglamalar sistemasi variatsiyalar orqali ifodalanib, xarakteristik tenglamasi olingan. Gurvits kriteriyasi- ga asosan qaralayotgan tebranishlardan himoyalalanuvchi doiraviy plastinkaning ustuvorlik shartlari aniqlangan. Sonli hisoblashlar natijasida ustuvorlik chegaralari va sohalari sistema parametrlari bo'yicha tahlil qilingan, tavsiyalar ishlab chiqilgan.

LITERATURE

1. O.M. Dusmatov, J.A. Khasanov. Vibrations of hysteresis type dissipative characteristic circular plate. AIP Conf. Proc.3177, 080003 (2025) <https://doi.org/10.1063/5.0295351>.

2. Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. Ц Киев: Техника, 1997. -204 с.

3. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. Ц Киев: Наукова думка, 1981, - 219 с.

Boundary value problem for the free vibration equation of a beam

Yuldasheva A. V.

Moscow State University, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan;

a_v_yuldasheva@mail.ru

In the domain $(0, \pi) \times (0, T)$ we consider a boundary value problem for the equation of free vibrations of a beam

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$w(0, t) = w(\pi, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(\pi, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$w(x, T) = \psi(x), \quad w_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \quad (3)$$

where w is the transverse displacements, $\psi(x)$ is given sufficiently smooth function.

Set

$$\alpha_k = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \frac{T}{\pi}}, k \geq 1. \quad (4)$$

The main result of the paper is follow

Theorem. Let the number α_k , defined by equality (4), be an algebraic number of degree $n > 1$ for all $k \geq 1$. Then, for any function $\psi(x)$ from the Sobolev class $W_2^{2n-1}(0, \pi)$, the solution of the problem (1)-(3) exist and unique.

In cases where the governing equation involves differences of arbitrary even-order derivatives, related problems have been investigated in [1].

LITERATURE

1. Yuldasheva A. V.; On solvability of the boundary value problem for one even-order equation, Bulletin KRASEC. Phys.and Math. Sci.,2016. 12:1. P.35-40.

Высокочастотная динамика—отсутствующее звено в эволюции динамики

Беляев А.К.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
Россия

vice.ipme@gmail.com

Существует много разновидностей динамик. Основные виды динамик вместе с их рабочими частотами будут обсуждены в докладе. Исторически, первой была динамика абсолютно твердого тела, которая характеризуется нулевыми собственными частотами. Динамика деформируемого твердого тела оперирует с так называемыми механическими частотами. Термодинамика также является видом динамики с частотами тепловых вибраций, значительно превышающими частоты механических колебаний. Динамика абсолютно твердого тела выводится из динамики деформируемого твердого тела, так как твердотельные движения присутствуют в теории колебаний. Уравнения динамики деформируемого твердого тела получаются из динамики твердого тела при представлении деформируемого тела периодической структурой элементарных систем с одной степенью свободы. Это означает, что динамика

абсолютно твердого тела и динамика деформируемого твердого тела могут рассматриваться как две соседствующие динамики.

Однако попытки вывести уравнения динамики деформируемого твердого тела из термодинамики и наоборот наталкиваются на огромные трудности моделирования. Сами трудности, возникающие при попытке связать термодинамику с динамикой деформируемого твердого тела, указывают на то, что они не являются соседями и между этими двумя теориями существует зазор, крезервирующий место для некой новой динамики. Эта новая динамика является низкочастотным предельным случаем термодинамики и высокочастотным предельным случаем динамики деформируемого твердого тела. Новая динамика, заполняющая указанный зазор, будет называться высокочастотной динамикой, а соответствующие частоты Ω высокими частотами механических колебаний.

В докладе будут представлены методы моделирования высокочастотной вибрации, выведенные как из динамики деформируемого твердого тела, так и из термодинамики. Будет показано, какими новыми свойствами обладает высокочастотная динамика в сравнении с динамикой деформируемого твердого тела и термодинамикой. Также будут указаны границы высокочастотной динамики. Наконец, будут выведены граничные задачи высокочастотной динамики и предложены решения нескольких практических задач.

Рассеяние поверхностных волн в неглубоких полостях в вязкоупругих полупространствах

**Болтаев З. И.¹, Рузиев Т. Р.², Отажонова С. Ш.³, Эсанов Н. К.⁴,
Ибодов Н. М.⁵**

¹Бухарский государственный технический университет, Узбекистан,
zafarboltaev1201@gmail.com

²Бухарского государственного педагогического института, Узбекистан,
ruzievtulkin@gmail.com

³Азиатский Международный университет, Бухара, Узбекистан,
sitorabonu-shuxratovna@mail.ru

⁴Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
esanov-7373@mail.ru

⁵Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан,
ibodovnab@yandex.ru

Когда в ниже лежащем полупространстве присутствует полость, полная воздуха, прямые (или падающие) R-волны рассеиваются. В поле рассеянных волн перед полостью доминируют обратно рассеянные R-волны, и образуются интерференционные полосы. В поверхностном волновом поле позади

полости дифрагированные волны под полостью могут вызывать увеличение спектральной амплитуды относительно амплитуды над полостью на некоторых низких частотах. Преобразуя спектр в область длинных волн, предлагается метод оценки горизонтальной протяженности и глубины залегания полости из спектральных изменений в области длин волн смещения. Осуществимость проверена предварительным экспериментом. Многочисленные исследования показали возможность обнаружения неоднородностей с использованием сейсмического метода, например, [1,2]. Изменения в кривых дисперсии R-волн связаны со структурой скорости S-волн слоистых почв. Наличие полости представляет собой сильную латеральную вариацию в подповерхности. Это может привести к аномалиям в спектре скорости-частоты, отображенном по сейсмической записи вдоль сейсмического профиля [3]. Однако этот метод может не подходить для прямого обнаружения полостей из-за ограничений разрешения профилей скорости S-волн. Интегральное представление для полных смещений волнового поля можно получить с помощью теоремы взаимности. Хотя объемные волны также преобразуются в рассеянные P-, S- и R-волны, рассеянная энергия слаба по сравнению с энергией прямых R-волн и легко затеняется прямыми R-волнами.

Таким образом, рассеяние прямых R-волн образует наиболее значительную часть рассеянного волнового поля. Рассеянные в обратном направлении волны R могут приводить к флуктуациям кривой кажущейся фазовой скорости волн R, полученной с использованием метода спектрального анализа поверхностных волн. Когда дифракции волн R распознаются во временной области, уравнение времени прохождения дифракции волн R может использоваться для оценки глубины полости. В этой работе структуры смещения основной моды R-волн сначала изучаются в слоистых полупространствах. Выполняя двумерное преобразование Фурье для вертикальных поверхностных откликов дифрагированных волн над полостью, полученных с помощью численного моделирования, доминирующая мода волн пластины идентифицируется из спектра к частота-волновое число. Если предположим рассматриваемая система полностью линеаризуется в Эйлеровом пространстве в произвольной криволинейной системе координат x^i записывается в виде:

$$\rho_o \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - F = \nabla_i \sigma^i \equiv \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} + \sigma^n \lambda_{ni}^i = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{G} \sigma^m) = \text{div} \tilde{\sigma}$$

$$G = +|\sigma_{ij}|; \quad 2\varepsilon_{ij} = C_i U_j + C_j U_i; \quad \nabla_i U^m \equiv \frac{\partial U^m}{\partial x^i} + U^n \lambda_{ni}^m;$$

$$\nabla_i U_e \equiv \frac{\partial U_e}{\partial x^i} - U_e \lambda_{ie}^n; \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}; \quad C^{jkl} = C^{klij}$$

Приведенные уравнения динамической теории упругости, получены в предположении идеальной упругости материала, т.е. без учета рассеяния энергии. Однако учет диссипации в ряде случаев становится необходимым, особенно при резонансных колебаниях [4]. Анализируются эффекты горизонтальной протяженности и глубины залегания полости на спектральные изменения как в области смещенной частоты, так и в области смещенной длины волны. Некоторые особенности спектральных изменений используются для оценки горизонтальной протяженности и глубины залегания полости. Для слоистого полупространства, в котором скорость сдвиговой волны слоя увеличивается с глубиной слоя, в подповерхностном волновом поле доминирует фундаментальная мода R-волн. Горизонтальные и вертикальные структуры смещения фундаментальной моды R-волн связаны с контрастами скорости S-волн. Поскольку энергия рассеяния R-волны связана с отношением длины волны к глубине залегания, глубину залегания можно оценить по длинам волн, соответствующим спектральным изменениям. Спектр смещения частоты можно преобразовать в область смещения длины волны, используя соотношение между длиной волны, частотой и фазовой скоростью

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang D, Wang M, Li J, Feng S (2014) Ground surface response induced by shallow buried explosions. *Earthq Eng Eng Vib* 13(1):163–169
2. Hei B, Yang Z, Chen Z (2016) Scattering of shear waves by an elliptical cavity in a radially inhomogeneous isotropic medium. *Earthq Eng Eng Vib* 15(1):145–151
3. Rahnema H, Mirassi S, Dal Moro G (2021) Cavity effect on Rayleigh wave dispersion and P-wave refraction. *Earthq Eng Eng Vib* 20(1):79–88
4. Chai HY, Goh SH, Phoon KK, Wei CF, Zhang DJ (2014) Effects of source and cavity depths on wave fields in layered media. *J Appl Geophys* 107:163–170

Метод векторных функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений

Буранов Ж. И.¹, Каххоров А. Э.²

ТГТУ имени И.Каримова, Ташкент, Узбекистан;

jamshid.buranov.19881996@gmail.com, azizqahhorov@gmail.com

Одно из основных направлений в теории устойчивости базируется на принципе сравнения, позволяющим свести задачи об исследовании свойств устойчивости решений рассматриваемых уравнений к определению аналогичных свойств решений соответствующих уравнений сравнения [1,2]. В работах [3,4] по этому направлению получены критерии определения предельных свойств (притяжения, асимптотической устойчивости и неустойчивости) для функционально-дифференциальных уравнений на основе функции

Ляпунова-Разумихина при отсутствии аналогичных свойств для уравнений сравнения, лишь в предположении устойчивости или ограниченности их решений. Настоящая работа является продолжением [3,4].

Пусть $h > 0$ – некоторое вещественное число, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0\}$, $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H\}$, $H = \text{const} > 0$. Для непрерывной функции $x : R \rightarrow R^n$ и каждого $t \in R$ определим функцию $x_t \in C$ посредством равенства $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$.

Пусть дана система функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t, x_t), X(t, 0) = 0,$$

где $x \in R^n$, $t \in R^+$, функция $X = X(t, \varphi)$, $X : R^+ \times C_H \rightarrow R^n$, определена, вполне непрерывна в области $R^+ \times C_H$.

Системе $\dot{x} = X(t, x_t)$, $X(t, 0) = 0$ поставим в соответствие семейство предельных уравнений вида [5]

$$\dot{x} = X^*(t, x_t),$$

где $X^* : R \times C_H \rightarrow R^n$ – функция, предельная к X .

Рассмотрим задачу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе векторных функционалов Ляпунова-Красовского.

Доказана следующая теорема о локализации квазиинвариантного (по определению из [5]) относительно семейства предельных систем $\dot{x} = X^*(t, x_t)$, положительного предельного множества $\omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ решения $x(t, \alpha, \varphi)$ системы $\dot{x} = X(t, x_t)$, $X(t, 0) = 0$.

Теорема. Пусть решение $x(t, \alpha, \varphi)$ системы $\dot{x} = X(t, x_t)$, $X(t, 0) = 0$ ограничено некоторым компактом $K \subset C_H$ для всех $t \geq \alpha - h$, и существует функционал $V = V(t, \varphi)$, такой, что имеет место соотношение

$$\dot{V}^*(t, \varphi) = U(t, V(t, \varphi)) + W(t, \varphi, V(t, \varphi)).$$

LITERATURE

1. Абдулин Р.З., Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Наука, 1987. pp. 754-761.
2. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and Integral Inequalities, Vols. I, II Academic Press, New York 1969.
3. Buranov J.I., Khusanov D.Kh. On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space, Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. Middle Volga Mathematical Society Journal. Scientific Journal. 2021. Vol. 23, No. 3. P. 273-284.
4. Buranov J.I., Khusanov D.Kh. On the comparison method in the stability

problem with respect to a part of variables for functional- differential equations with a finite delay, Uzbek Mathematical Journal. 2021. No 3. P.1-15.

5. Хусанов Д.Х. К конструктивной и качественной теории функционально - дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 2002. с. 256

**Динамические напряженно - деформированные состояния
прямолинейных участков трубопроводов при воздействии
внешних нагрузок**

**Ишмаматов М.¹, Ахмедов Ш. Р.², Алмуратов Ш. Н.³, Мухитдинов
Р. Т.⁴, Собиров С. Ж.⁵**

¹Навоийского горно-технологического университета, Навои. Узбекистан
matlab1962@mail.ru

²Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан;
ahmedovsarifboj652@gmail.com

³ Образовательный университет РЕНЕССАНС. Узбекистан;
al-shavkat@mail.ru

⁴Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан;
ahmedovsarifboj652@gmail.com

⁵Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан;
Sobirovsobir19771@gmail.com

Магистральные трубопроводы и трубопроводы предприятий энергетической, нефтехимической и других отраслей промышленности составляют достаточно большую часть их материальных активов. Для решения задачи исследования напряженно-деформированного состояния был использован метод конечных элементов [1] и компьютерное моделирование. В основу математической модели системы положены динамические трехмерные уравнения линейной теории вязкоупругости согласно реологической модели Кельвина-Фойгта [2]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^s, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \theta \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

где, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}$ - тензоры напряжений и деформаций; e - девиатор тензора деформаций $e = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3} \mathbf{E}$; \mathbf{E} - единичный тензор; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, t)$, $\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(r, t)$ - векторы перемещений и заданных объемных сил, зависящих от времени t и радиуса вектора точек сплошной среды r ; λ, μ, η - коэффициенты Ляме и вязкость материала; ρ - плотность; θ - объемная деформация; ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона.

Приведенная дифференциальная постановка задачи теории вязко - упругости эквивалентна вариационной постановке в виде принципа возможных

перемещений:

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_v dV + \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_S dS + \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{inert} dV = \delta \pi,$$

где $\delta \mathbf{u}$ -вектор возможных перемещений точек сплошной среды; интегралы слева представляют собой работы внешних объемных и поверхностных сил, а также сил инерции $\mathbf{f}_{inert} = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ на возможных перемещениях; $\delta \pi$ - виртуальная работа внутренних сил при деформации тела: $\delta \pi = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$. Для численного решения этого уравнения применена стандартная процедура конечно-элементной дискретизации по пространственным переменным с использованием 20-узлового изопараметрического элемента [3]. С учетом вида, определяющего соотношения, записанного в матричной форме, с использованием матриц упругих и вязких модулей $DS : \boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon} + S\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, получено следующее матричное дифференциальное уравнение по времени:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + \mathbf{R} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(t),$$

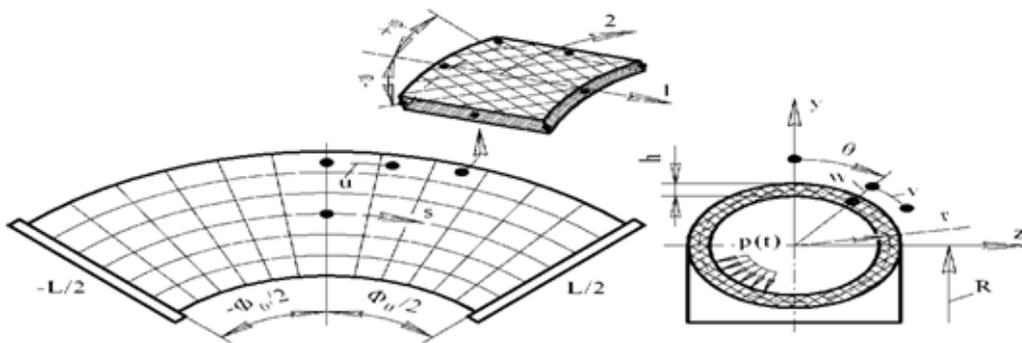


Рис. 6: Расчетная схема.

где $U = U(t)$, $F = F(t)$ - глобальные векторы узловых перемещений и узловых сил как функции от времени, K , M , R - глобальные матрицы жесткости, масс и диссипации.

Дальнейшее преобразование основано на стандартном подходе, используемом в линейной теории упругих колебаний. Предположим, что внешняя нагрузка изменяется во времени по гармоническому закону, что может быть записано в виде:

$F(t) = F e^{i\omega t}$, $F \in Re$ где F, ω - амплитуда и круговая частота силы, i - мнимая единица. Рассмотрим трубу (рис.1), осевая линия которой представляет дугу окружности радиуса R , длиной L , с центральным углом (угломгиба) Φ_0 . Труба имеет идеально круглое поперечное сечение радиуса r , причём $r/R \leq 1/5$. Толщина стенки h . Труба находится под действием моногармонического давления $p(t) = P_m(1 + \psi \cos \Omega t)$, где p_m -среднее (рабочее)

давление, $\psi = p_0/p_m < 1$ - параметр пульсации; p_0 и Ω - амплитуда и круговая частота.

Стержневая (балочная) форма отражает перемещения, связанные с движениями поперечного сечения трубы как жесткого, целого, оболочечные формы, связанные с деформированием стенки оболочки. Рассматриваются $n = 2, 3, 4, \dots, \infty$ волн в окружном направлении и одна полуволна в осевом направлении.

Проведенное исследование показало влияние воздействий и граничных условий на значения частот и статическую устойчивость газопроводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чичелов В. А. Расчеты напряженно-деформируемого состояния трубопроводов, эксплуатируемых в сложных условиях, в нелинейной постановке. М.: ИРЦ Газпром, 2006. 80 с.
2. Шаммазов А. М. Разработка метода расчета напряженно-деформированного состояния газопроводов, проложенных в сложных инженерно-геологических условиях // Нефтегазовое дело. 2004. 2. С. 119-128.
3. Шашкин А. Г., Шашкин К. Г. Физическая модель слабого глинистого грунта как структурно-неустойчивой среды при деформациях формоизменения // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2001. 4. С. 119-126.

Осесимметричные вязкоупругие волны в цилиндрической оболочке

Каримов И. М.¹, Махмудова Д. М.², Эргашева Н. Ш.³, Файзуллаев Ф. Б.⁴, Сулайманова Г. Х.⁵

¹Ташкентский химико-технологический институт, г. Ташкент, Узбекистан;
israil.karimov@mail.ru

²Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет,
Самарканд, Узбекистан;
dilrabomahmudova521@gmail.com

³Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан;
nazokatargasheva713@gmail.com

⁴Учителя физики школы No 74 Денауского района, Сурхандаря,
Узбекистан;

fazliddinfayzulayev1@gmail.com

⁵Sulaymonovag858@gmail.com

В работе исследуется задача о распространении собственных волн в вязкоупругом сплошном цилиндре. Гармонические волны цилиндра описываются с помощью пространственных уравнений вязкоупругости в цилиндрической системе координат. Внешняя поверхность цилиндра освобождена от усилий (или напряжений). Для описания реологических (или вязкоупругих) свойств материала применяются два типа ядра: ядро Ржаницена-Колтунова и дробно-экспоненциальное ядро Работнова. Дифференциальное уравнение в рассматриваемом случае имеют вид:

$$(\kappa_F^2 - 1)\text{graddiv}\vec{u} + \nabla^2\vec{u} - \Omega^2\vec{u} = 0, \quad (1)$$

где $\kappa_F^2 = \frac{2(1-\nu^F)}{1-2\nu^F}$; $\Omega^2 = \omega^2 \frac{(1+\nu^F)}{(1+\nu^F)E^F}$. На внешней поверхности цилиндра ставятся следующие условия

$$r = R : \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0.$$

Тогда дисперсионное уравнение для протяженного цилиндрического тела имеет следующий вид

$$(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2)^2 J_0(a)J_1(b) + 4\tilde{\chi}^2 ab J_0(b)J_1(a) - 2\Omega^2 a J_1(a)J_1(b) = 0. \quad (2)$$

Здесь a и b - внутренний и внешний радиусы оболочки, $\tilde{\chi} = \chi - i\delta$, $b\chi$ - волновое число, $\delta > 0$ - коэффициент затухания,

$$\Omega^2 = \omega^2 \frac{1 + \nu^F}{(1 + \nu)E^F}, \quad E^F = 1 - \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}$$

при этом однозначная ветвь степенной функции изменяется в интервале $-\pi < \arg(i\omega) < \pi$. Здесь k, β - параметры материала. Дисперсионное уравнение (трансцендентное уравнение) (2) решается численно - методами Мюллера. В ходе вычисления определяются несколько мод комплексных корней. Результаты расчетов приведены на рисунках 1 и 2 при $k = 0,45$; $\beta = 1,0$; $\nu = 0,25$. Изменение мнимой части фазовой скорости в зависимости от частоты, полученные для двух ядер (Ржаницына - Колтунова и Работнова) в начальный период почти одинаково (рисункам 1 и 2 соответствуют аperiодические колебания), без учета вязкости (рис.1). На рис. 2 приведено изменение мнимой части фазовой скорости при различных числах (1-5, 2-7, 3-9, 4-11) членов разложения специальных функций Бесселя и Неймана. Они при высоких частотах отличаются друг-от друга до 6%. Сплошные линии соответствуют результатам при $\beta = 1,0$ а пунктирные линии - $\beta = 1,0$. Установлено, что поведение мнимой части фазовой скорости сильно зависит от сингулярности параметра α . Результаты расчетов получены с помощью разработанного

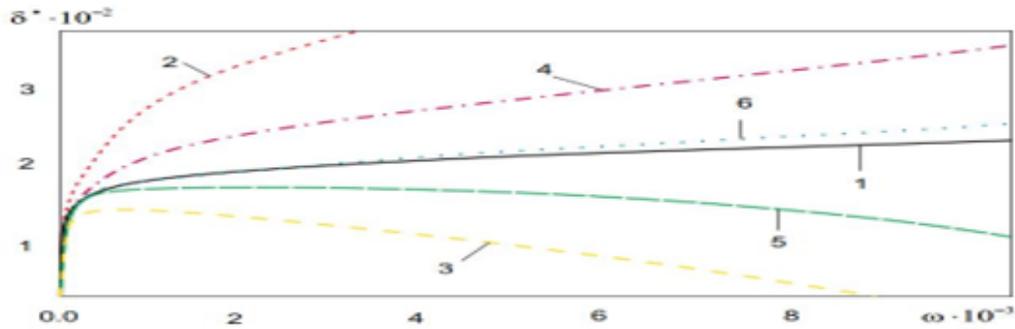


Рис. 7: Изменение коэффициента демпфирования, соответствующего первой моде, от частоты при $\alpha = -2/9$.

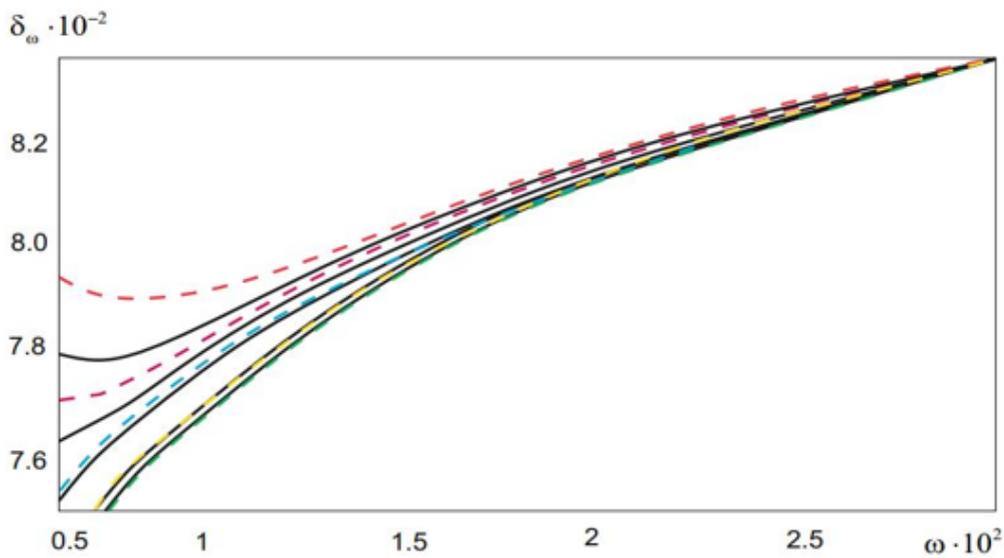


Рис. 8: Изменение коэффициента демпфирования, соответствующего первой моде, от частоты при $\alpha = -1/6(n = 2, 3, \dots)$.

алгоритма (рис. 1 и рис.2). Результаты изменения фазовой скорости сравниваются с результатами работы [1].

Результаты расчетов отличаются до 10%. Для вязкоупругого цилиндра предлагаются следующие соотношения:

$$c_{phR} = 1, 3552R_{SCS}, c_{phI} = -1, 273 \cdot 10^{-2}R_{SCS},$$

где $R_S \in (1 - k\Gamma^s, 1 - \Gamma^s)$, $0 < k < 1$ Таким образом, разработанная методика и алгоритм для решения поставленных задач, позволяют найти динамические характеристики (собственные частоты, коэффициентов демпфирования, групповые скорости и формы колебаний) и напряженно-деформированное состояние волноводов при воздействии стационарных воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites // Technische Mechanik. 2010. Vol. 30, no. 1-3. P. 122-135.

Поперечный удар тела сферические формы по деформируемой пластинке

Марасулов А. М.¹, Уралов У.², Курбанов У.³, Отажонова С. Ш.⁴, Жумаева А. А.⁵

Казахско-Турецкий международный университет, Туркестан, Казахстан¹;
marasulov11@mail.ru.

Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан²;
utkirbekurolov@mail.ru.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет,
Самарканд, Узбекистан³;
utkiriinfo@gmail.com.

Азиатский Международный университет, Бухара, Узбекистан⁴;
sitorabonushuxratovna@mail.ru.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет,
Самарканд, Узбекистан⁵

В данной работе проанализирован процесс деформации, возникающий в результате удара стального снаряда по алюминиевой плите при различных скоростях. С использованием программного комплекса Abaqus исследовано воздействие стального шара на поверхность плиты и получены соответствующие графические результаты. С целью определения баллистической прочности плиты был проведен анализ деформации и глубины проникновения шара. Результаты показали, что для алюминиевой плиты и стального шара с заданной геометрией и механическими характеристиками баллистическая скорость составила 387 м/с. При скоростях, меньших баллистической, в процессе отскока шара от плиты наблюдалось формирование и последующее закрытие зазора между поверхностью шара и участком контакта на плите в течении определенного времени.

В настоящее время для производства средств индивидуального бронирования (или бронежилетов) и защитных панелей для техники используется широкий спектр материалов, включающий в себя металлы и волокнистые композиты на основе высокопрочных полиэтиленовых волокон [1,2,3]. Современные высокие требования к весу броне панели, увеличение доли бронебойных снарядов, снабженных сердечниками из твердых сталей и сплавов, требуют также применения в защитной конструкции дополнительного лицевого слоя из технической керамики [4,5]. Вплоть до сегодняшнего дня основ-

ным методом разработки новых типов бронежилетов служит эксперимент. Высокая стоимость материалов и большой объем варьируемых параметров приводят к значительным затратам средств и времени при создании новой конструкции [6,7]. В связи с этим возрастает потребность в аналитических и численных методах, позволяющих выполнять достоверный анализ динамических процессов, связанных с пробиванием преград со сложной структурой, и прогнозировать поведение всей защитной конструкции.

Рассмотрим задачу об ударе сферического ударника по преграде - толстой круглой пластине, по нормали. Процесс проникания таких ударников сопровождается большими деформациями материала преграды за счет его вытеснения. Эти деформации имеют необратимый характер и связаны с пластическими свойствами среды. Торможение ударника происходит под действием силы сопротивления со стороны материала преграды, интенсивность которой зависит от многих факторов. К ним относятся: геометрия головной части, масса ударника, его прочностные характеристик, толщина преграды, ее плотность и динамический предел текучести материала. Решение задачи о проникании сферического ударника в пластине (результаты эксперимента) приведена в работе [5]. Будем считать ударник жесткой. Параметры ударника: масса- $m=2\text{кг}$, радиус- $R=3\text{см}$. Параметры преграды: толщина- $h = 4.5\text{см}$, $a = b = 1\text{м}$, плотность- $\rho = 7.85 \text{ г/см}^3$ коэффициент объемного сжатия- $K = 1.7\text{Мбар}$ модуль сдвига- $\mu = 0.8\text{Мбар}$, граница динамической текучести- $Y_0 = 0.0072\text{Мбар}$.

Уравнение движения системы имеет вид [3]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i,$$

а также удовлетворяет критерию Джонсона - Кука [3]:

$$\epsilon_f = [D_1 + D_2 \cdot e^{D_3 \cdot \sigma^*}] \cdot \left(1 + D_4 \cdot \ln \frac{\epsilon_p}{\epsilon_0} \right) \cdot (1 + D_5 \cdot T^*),$$

Результаты расчетов подставлены на рис. 1.

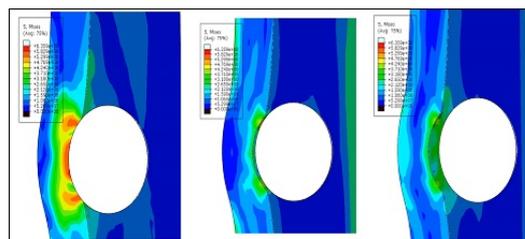


Рис. 9: Рис. 1. Процесс деформации, возникающий в результате удара снаряда по плите

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аптуков В.Н., Мурзакаев А.В., Фонаров А.В. Прикладная теория проникания. Москва: Наука, 1992. 105 с.
2. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростные взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
3. Скрипняк В.А., Скрипняк Е.Г., Козулин А.А., Пасько Е.Г., Скрипняк В.В., Коробейников М.В. Влияние поровой структуры хрупкой керамики на разрушение при динамическом нагружении // Известия ТПУ. Серия "Математика и механика. Физика". 2009. Т. 315, Номер 2. - С. 113-117.
4. Герасимов А.В., Михайлов В.Н., Сурков В.Г. Ударное нагружение комбинированных преград // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2006. - Т. 12. - Номер 2. - С. 237-255.
5. Герасимов А.В., Пашков С.В. Численное моделирование естественного дробления твердых тел // Физическая мезомеханика. - 2004. - Т. 7. - Спец. вып. - Ч. 1. - С. 313-316.

**Задача дифракции и собственных значений для упругих
механических трубопроводных систем**

**Сафаров И. И.^{1,a)}, Тешаев М. Х.^{2,b)}, Нуриддинов Б. З.^{1,c)}, Мирзоева
Г. Т.^{3,d)}, Зарипов Б. Ш.^{3,e)}**

¹Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан

²Бухарского отделения Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан

³ Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан.

^{a)}safarov54@mail.ru, ^{b)}Muhsin-5@mail.ru, ^{c)}baxtiyornuriddinov1985@gmail.com, ^{d)}gulimirzoyeva1992@gmail.com, ^{e)}begzodzaripov331@gmail.com

В настоящей работе колебания трубопроводов моделируется как цилиндрическое тело с внутренним и внешним радиусами (\bar{r} и R), находящегося в деформируемой среде. Среда заменяется вязким демпфером в радиальном и касательном направлениях. Основной целью работы, является исследование собственных колебаний цилиндра с внешним трением. При исследовании выше указанного, определены оптимальные значения коэффициентов демпфирования, при которых колебания трубопроводов максимально затухают.

Рассмотрим задачу в цилиндрической системе координат (r, θ, z) Предполагая, что координата z не влияет на процесс колебаний, получим систему уравнений, распадающуюся на две независимые задачи [1,2]:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = f; \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right), \\
 \sigma_{\theta z} &= \mu \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} &= f_r; \\
 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \rho \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} &= f_\theta; \\
 \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right); \\
 \sigma_{r\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

с краевыми условиями при $r = R$: $\sigma_{rr} = -\alpha_1 \frac{\partial U_r}{\partial t}$; $\sigma_{r\theta} = -\alpha_2 \frac{\partial U_\theta}{\partial t}$; $\sigma_{rz} = -\alpha_1 \frac{\partial U_z}{\partial t}$; где R - радиус цилиндра; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ -параметры внешнего трения. При $r_0 = \varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{rz} < \infty \\ U_z < \infty, \end{cases} \begin{cases} \sigma_{rr} < \infty \\ \sigma_{r\theta} < \infty \\ U_r < \infty \\ U_\theta < \infty \end{cases} . \tag{3}$$

Тогда назовем краевую задачу (1) - антиплоской, а (2) - плоской или задачей о плоских колебаниях цилиндра. Трубопровод в деформируемой среде занимает все пространство. Решение системы определяется заданием вектора перемещений, \vec{u} и вектора скорости в начальный момент времени $t = t_0 = 0$, [3] :

$$\vec{u} |_{t=t_0} = \vec{u}_0(x) \quad \vec{v} |_{t=t_0} = \frac{\partial \vec{u}(x, t)}{\partial t} = v_0.$$

Такая задача называется задачей Коши. Решение задачи Коши для изотропной упругой среды по методу Вольтера изложена С.А. Соболевым. Частным случаем задачи Коши является задача о точечном источнике в упругой среде (или задача о сосредоточенной силе):

$$\vec{u}_0 = \vec{v}_0 = 0; \quad F^{(i)} = P(t)H(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta_{ia}\vec{e}_a,$$

где $H(t)$ -функция Хевисайда;

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_{01}) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_{02}) = \delta(\vec{x}_3 - \vec{x}_{03}),$$

δ -функция Дирака и x_0 точка приложения силы. Решение последней называется фундаментальным решением. При наличии границы дополнительно к начальным условиям (1) должны быть заданы краевые условия.

Теорема. Пусть собственные значения ω_k краевой задачи

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \frac{1}{c^2}\omega^2 U = 0; \quad C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}};$$

$$r \rightarrow a : U = 0 : a = \coth > 0, \quad r \rightarrow R : U' + i\omega\alpha U = 0;$$

простые. Тогда система функций $y_k = \begin{cases} U_k \\ i\omega_k U_k \end{cases}$ где U_k -собственные функции задачи (1), соответствующие собственным значениям ω_k , образует базис Рисса в пространстве $L \oplus W_2^1[3]$

Таким образом, изложена математическая постановка и методы решения задачи колебаний трубопроводов, взаимодействующих с упругой средой (или вязкоупругой средой). Приведены общие дифференциальные уравнения трубопроводов цилиндрического поперечного сечения, а также начальные и граничные условия. На контакте двух тел ставятся условия жесткого (выполняется условие равенства перемещение и соответствующей напряжению) и скользящего (равенство нулю касательных напряжений) контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nobahar A. Effect of soil spatial variability on soil-structure interaction: thesis Doctor of Philosophy. St. John, Canada, 2003. 305 p.
2. Munjiza A. The Combined Finite-Discrete Element Method. Wiley, 2004. 331 p.
3. И.И.Сафаров, М.Х. Тешаев, З.И. Болтаев. О распространении гармонических волн в деформируемой цилиндрической панели. 2014, Май. Материалы X Международной конференции по Неравновесным процессам в соплах и струях. Москва, 25-31 мая 2014 г. С.305-306

Математическое моделирование процесса распространения пылевых частиц в атмосфере

Шафиев Т. Р.¹, Бобожонова М. А.¹

¹Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан; e-mail: tursun@buxdu.uz

Распространение пылевых частиц в атмосфере представляет собой одну из наиболее актуальных экологических и климатических проблем современности. Пылевые выбросы, возникающие в результате природных процессов (вет-

ровая эрозия почв, пылевые бури) и антропогенных факторов (строительство, промышленное производство, транспорт), оказывают значительное влияние на качество атмосферного воздуха, здоровье населения и устойчивость экосистем.

Особое значение имеет моделирование движения пыли вблизи поверхности земли, так как именно в этом слое атмосферы концентрация вредных частиц максимальна, что приводит к ухудшению видимости, повышению риска респираторных заболеваний и ускоренному износу инженерных сооружений.

Создание достоверных математических моделей распространения пыли позволяет прогнозировать зоны ещ накопления, оценивать воздействие на сельскохозяйственные угодья, инфраструктуру и энергетические системы (например, солнечные панели), а также разрабатывать меры по снижению негативных последствий пылевых бурь и выбросов.

Таким образом, исследование процессов переноса и осаждения пылевых частиц в атмосфере имеет важное научное и практическое значение для обеспечения экологической безопасности и устойчивого развития.

Для исследования процесса переноса и диффузии пылевых частиц в атмосфере рассмотрим математическую модель, описывающую на основе закона гидромеханики с помощью многомерного дифференциального уравнения в частных производных[1]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \mu_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \lambda,$$

соответственно, начальные и граничные условия: $\theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z)$;

$$-\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi(\theta_e - \theta); \quad -\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \xi(\theta_e - \theta);$$

$$-\mu_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi(\theta_e - \theta); \quad -\mu_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \xi(\theta_e - \theta);$$

$$-\kappa_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = S + \xi(\theta_e - \theta); \quad -\kappa_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} = \xi(\theta_e - \theta),$$

где - $\theta(x, y, z, t)$ концентрация частиц почвы, u, v, w скорости ветра по направлениям, μ_x, μ_y - коэффициент диффузии, κ_z - коэффициент турбулентной диффузии, S - масса пыли, поднятая ветровой эрозией (функция источника), λ - потеря частиц пыли в результате осаждения или других механизмов (функция потерь), ξ - коэффициент массообмена с внешней средой через границу раздела, θ_e - концентрация вредных веществ за пределами области решения проблемы, $\theta_0(x, y, z)$ - начальная концентрация пыли, L_x, L_y - размеры x и y в области счета, H - высота рассматриваемой области.

Так как разработанная математическая модель мониторинга и прогнозирования процесса распространения пылевых частиц в атмосфере описывается многомерным дифференциальным уравнением в частных производных с соответствующими начальными и краевыми условиями, для ее решения разработан численный алгоритм [2-3] с использованием неявной конечно-разностной схемы.

Проведенное моделирование показало, что ключевую роль в процессе подъема пылевых частиц с поверхности земли играют размер частиц, скорость приземного ветра и влажность воздуха. Мелкодисперсные частицы диаметром менее 5 мкм способны подниматься на значительные высоты и переноситься на дальние расстояния даже при слабом ветре. Более крупные частицы быстро осаждаются под действием силы тяжести.

Влажность воздуха существенно влияет на процесс: при высокой влажности пылевые частицы склонны агрегироваться и становиться тяжелее, что ускоряет их осаждение. При низкой влажности частицы дольше сохраняются во взвешенном состоянии и переносятся на большие расстояния. Численные расчеты также подтвердили, что турбулентная диффузия усиливает вертикальное перемешивание пылевых масс, а коэффициент осаждения λ определяет интенсивность выпадения частиц обратно на поверхность.

Практическая польза исследования заключается в том, что предложенный подход позволяет заблаговременно определять наиболее опасные зоны накопления пыли, а также учитывать климатические параметры (в частности, влажность воздуха), что даст возможность органам экологического мониторинга и местным властям принимать меры для смягчения последствий пылевых явлений.

LITERATURE

1. Shafiev T., Bobozhonova M. Creation of a software tool for monitoring and forecasting the process of transport and diffusion of harmful substances in the atmosphere // Proceedings of SPIE. Vol. 13217. 2024. DOI: 10.1117/12.3036773.
2. Shafiev T. Development of a mathematical model and an efficient computational algorithm for predicting atmospheric pollution in industrial regions // AIP Conference Proceedings. Vol. 3004. 2024. P. 060005. DOI: 10.1063/5.0199817.
3. Равшанов Н., Шафиев Т.Р. Моделирование процесса распространения загрязняющих веществ в атмосфере с учетом физико-механических свойств частиц // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. 3(27). С. 60-75.

Собственные колебания криволинейных участков трубопроводов, взаимодействующих со средой

Усмонов Б.Ш.^{1,a)}, Рахмонов Б.С.^{2,b)}, Сафаров У.И.^{3,c)}, Сабирова Р.А.^{3,d)}, Гаффоров И.И.^{3,e)}

¹Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан;

²Ургенчского государственного университета, Ургенч, Узбекистан;

¹Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан;

a) busmonov@hotmail.com, b) bah-bahodir@yandex.ru, c) uchqun2025@mail.ru,

d) rano-sobirova85@mail.ru, e) ibrohimovich1102@gmail.com

В работе рассматриваются собственные колебания криволинейного участка трубопровода на основе теории оболочек. Получена система нелинейных уравнений колебаний. Исследовано изменение собственной частоты и коэффициента демпфирования в зависимости от параметров системы трубопровод - окружающая среда.

Для расчета прямолинейных и криволинейных трубопроводов рассмотрим уравнение движения цилиндрических оболочек с протекающей жидкости [1, 2]. Уравнения равновесия элемента оболочки сведем к одному разрешающему уравнению в перемещениях. Рассматривая малые перемещения, можно отбросить все нелинейные слагаемые, в результате чего придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^3} + h_v^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\tilde{v}_2 + \frac{\partial^3 \tilde{v}_2}{\partial \theta^3} \right) - \frac{r \cdot p}{Eh} \frac{\partial^3 \tilde{v}_2}{\partial \theta^3} \cdot \frac{r \cdot p}{Eh} \left(ph + \frac{p_* \cdot r}{2} \right) \cdot$$

$$\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2} \partial t^2 + \frac{\partial^3 V}{\partial \xi \partial t^2} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{r}{Eh} (p_* \cdot V^2 + p) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2} \right] + \frac{2pr^2 V}{Eh} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (1)$$

где $h^v = \frac{h}{r\sqrt{12(1-\nu^2)}}$ Приступая к решению (1) отметим, что все перемещения и углы поворота представим через ω . Разделяя переменные, примем ω в виде ряда.

$$\omega = \sum_n \sum_m f_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \cos m\theta, \quad (2)$$

где ω - круговая частота свободных колебаний. Тогда

$$\vartheta_1 = \sum_n \sum_m \frac{1}{m} f_m(\xi) e^{i\omega t} \sin m\theta; \quad u = - \sum_n \sum_m \frac{1}{m^2} f_m n'(\xi) e^{i\omega t} \cos m\theta$$

$$\vartheta_2 = - \sum_n \sum_m \frac{m^2 - 1}{m} f_m n(\xi) e^{i\omega t} \sin m\theta;$$

$$\tilde{\vartheta}_1 = - \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} \frac{1}{m^2} f_m n'(\xi) e^{i\omega t} \cos m\theta. \quad (3)$$

Подставляя (3) и (2) в уравнение (1) и используя алгоритм метода Бубнова-Галеркина

$$\int_0^{2\pi} L^* \cos k\theta d\theta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где L^* - левая часть уравнения (4), получим систему уравнений для определения искомых функций $f_{mn}(\xi)$, причем коэффициенты этой системы при $k \neq m$ обращаются в нуль:

$$f_{mn}^{IV}(\xi_0) + a_{mm} f_{mn}''(\xi_0) + b_{mm} f_{mn}'(\xi_0) + c_{mm} f_{mn}(\xi_0), \quad (5)$$

здесь f_{mn} -функция переменной $\xi_0 = \xi \sqrt{h_v}$, изменяющейся в пределах

$$0 < \xi_0 < I_0; \quad I_0 = \sqrt{h_v L/r}.$$

Коэффициенты системы уравнений (5) определяются выражениями:

$$a_{mn} = \frac{r^2}{h_v^2 E h} \left(\rho h + \frac{p_* \cdot r}{2} \right) \omega^2 + m^4 \frac{r}{E h h_v^2} (p_* V^2 + p);$$

$$b_{mn} = i \frac{2p_* \cdot r^2 \cdot V}{E h h_v^2} m^4 \omega;$$

$$c_{mn} = m^4 (m^2 - 1)(m^2 + p_* - 1) - \frac{r^2}{E h h_v^2} \left(\rho h + \frac{p_* \cdot r}{2} \right) (m^2 + m^4) \omega^2,$$

$$\text{где } p_* = 12(1 - \nu_2) \frac{p}{E} \left(\frac{r}{h} \right)^3.$$

Анализ полученных результатов показал, что влияние кориолисовой силы на частоту свободных колебаний мало. Поэтому в дальнейшем влияние этой силы не учитывается. Тогда выражение для определения квадрата частоты принимает вид

$$\omega^2 = \frac{E h_v^2 \left[\lambda_n^4 - m^4 \frac{r}{E h h_v^2} (p_* \cdot V^2 + p) \lambda_n^2 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 + p_r - 1) \right]}{r^2 \left(p + \frac{p_* \cdot r}{2h} \right) (\lambda_n^2 h_v + m^2 + m^4)} \quad (6)$$

Члены, содержащиеся во второй скобке знаменателя (6) отражают влияние различных составляющих сил инерции. Некоторые результаты, отражающие зависимость от внутреннего давления, сведены в таблицу (принято $L/d = 5$, $m = 2$, $n = 1$, $V = 3m/c$)

Приведенные значения частоты в зависимости от угла

Угол α_0					
$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$
0,99	1,32	2,62	6,59	17,97	54,75
0,89	1,27	1,53	5,48	13,85	52,01

Расчеты подтверждают известный вывод о том, что с увеличением скорости V , частота уменьшается. При дальнейшем увеличении V одна из частот может обращаться в нуль, что приводит к потере устойчивости оболочки. Для коротких и тонких труб с ростом V низшая частота при $m = 2$ уменьшается быстрее, чем при $m = 1$. У длинных труб, наоборот, низшие частоты при $m = 1$ достигают нуля быстрее, чем при $m = 2$. В заключение отметим, что формула (6), полученная на основе полу без моментной теории, позволила обследовать более широкий класс труб по сравнению с решениями, основанными на теории колебаний стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авлиякулов Н.Н., Сафаров И.И. Современные задачи статики и динамики подземных трубопроводов. Ташкент, Fan va texnologiya. 2007. 306 с.
2. Алешин В. В. [и др.] Численный анализ прочности подземных трубопроводов. М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2003. 320 с.
3. Базаров М.Б. Сафаров И.И., Шокин Ю.М. Численное моделирование колебаний диссипативно-неоднородных и однородных механических систем.- Новосибирск, Сибирского отд. РАН, 1996. -189 с.

Моделирование внутренних течений на основе полной уравнений Навье-Стокса

**Ходжиев Сафар¹, Аминов Хаётжон¹, Элмуродов Жамшид¹,
Пиримов Акрам², Турсинбоева Зебо²,**

¹Ориентал университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: safar1951@yandex.ru

¹Ориентал университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: xayotjon2018@mail.ru ¹Ориентал университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: mrelmurodov@mail.ru

²Навоийский государственный горно-технологический университет, Навои, Узбекистан
e-mail: pirimovakram778@gmail.com

²Навоийский государственный горно-технологический университет, Навои, Узбекистан
e-mail: ztursinboyeva@mail.ru

В мире уделяется большое внимание актуальным проблемам теории турбулентности, турбулентного струйного внутреннего течения. Интерес к таким течениям обусловлен увеличением числа технических приложений, как

потребности ядерной энергетики, создания различных смесительных и топочных устройств, камер сгорания различных энергетических установок, и уменьшения выброса вредных газовых веществ в окружающую среду. В то же время, проблема адекватного описания не только трехмерных, но и даже двумерных турбулентных струйных течений газовых смесей до настоящего времени остается в механике и прикладной физике одной из самых сложных. Сложность рассматриваемой проблемы связана с одной стороны, с незавершенностью теории турбулентности, с другой заключающихся в чрезвычайно сложном характере взаимного влияния процессов турбулентного переноса и кинетики на процессы тепло-и массопереноса.

В работах [1, 2] фундаментально сформулированы актуальность, современное состояние и области применимости различных подходов к моделированию турбулентных внутренних течений и общая характеристика существующих подходов. Вместе с тем, приводится хорошее высказывание, как УОбщий прогресс вычислительной аэродинамики, разумеется, не мог не сказаться и на состоянии проблемы моделирования турбулентности. В частности, в последние годы все большее применение находят подходы к моделированию турбулентности, базирующихся на первых принципах аэродинамики (метод прямого численного моделирования - в англоязычной литературе Direct Numerical Simulation или DNS и метод моделирования крупных вихрей - Large Eddy Simulation или LES).

Целью данной работы является моделирование турбулентных течений спутных коаксиальных потоков в плоском канале постоянного и переменного сечения на основе двумерной системы дифференциальные нестационарные уравнений Навье-Стокса для течения сжимаемого газа и формулирование граничные и начальные условия для численного исследования.

При постановке граничных условий полагается, что на входе в канал имеются два потока с физическими параметрами и канал (длиной L и полувысотой $-f_0$) является симметричным. В этом случае можно ограничиться рассмотрением течения в области между осью симметрии и одной из стенок канала и можно реализовать с помощью следующих начальных и граничных условий:

начальные и граничные условия: $t = t_0$:

$$x = 0 : \quad \mu = \mu_2, \rho = \rho_2, p = p_2, u = u_2, v = 0, E = E_2, \text{ при } 0 \leq y \leq R_1,$$

$$u = u_1, v = 0, E = E_1, \mu = \mu_1, \rho = \rho_1, p = p_1, \text{ при } R_1 < y < f_0, \quad (1)$$

$$u = 0, v = 0, E = E_\omega, \rho = \rho_\omega, p = p_\omega, \mu = \mu_\omega, \text{ при } y = f_\omega.$$

$$0 < x \leq L : \quad u = 0, v = 0, E = E_0, \rho = \rho_0, p = p_0, \mu = \mu_0, \text{ при } 0 < y < f_\omega,$$

$$u = 0, v = 0, E = E_\omega, \rho = \rho_\omega, p = p_\omega, \mu = \mu_\omega, \text{ при } y = f_\omega.$$

$$t > t_0, \quad x = 0 :$$

$$u = u_2, \quad v = 0, \quad E = E_2, \quad \mu = \mu_2, \quad \rho = \rho_2, \quad p = p_2, \text{ при } 0 \leq y \leq R_1, \quad (2)$$

$$u = u_1, \quad v = 0, \quad E = E_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \rho = \rho_1, \quad p = p_1, \text{ при } R_1 < y < f_0, \quad (3)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad E = E_\omega, \quad \rho = \rho_\omega, \quad p = p_1, \quad \mu = \mu_\omega, \text{ при } y = f_\omega. \quad (4)$$

$$0 < x \leq L : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad E = \tilde{E}_\omega, \quad \rho = \tilde{\rho}_\omega, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0,$$

$$\mu = \tilde{\mu}_\omega, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad T = \tilde{T}_\omega, \quad y = f_\omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = 0. \quad (6)$$

$$x = L : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } 0 < y < f_\omega. \quad (7)$$

Здесь ρ_1, E_1, μ_1 и ρ_2, E_2, μ_2 , соответственно, вычисляются для заданной температуры потоков T_1, T_2 и давления p_1, p_2 струи (индекс -2) и спутного потока (индекс -1 , полувысотой R_1). Значения $\rho_\omega, E_\omega, \tilde{\rho}_\omega, \tilde{E}_\omega, \tilde{\mu}_\omega$ вычисляются заданием граничных условий на стенке по u, v, T, p , а $u_0, E_0, \rho_0, \mu_0, T_0$ — некоторые начальные значения искомых параметров.

Для численного решения уравнений Навье-Стокса в форме законов сохранения с начальными и граничными условиями (1)-(7) используется неявная факторизованная разностная схема Бима-Уорминга.

В данной работе приводятся численные результаты исследования на влияния заданных начальных значений искомых параметров внутри канала (внутренних расчетных узлах сетки) и в границах канала и число Рейнольдса на параметры смещения и распространения спутных потоков в канале. Выявлено, что эти параметры существенно влияют на параметры смещения и сходимости решения, а также в каких случаях в начальном участке наблюдается рециркуляционная зона.

Литература

1. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука. 1989. -368 с.
2. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений.// Учебное пособие. Изд-во Политех. Ун-та, 2012.- 88 с.

**СЕКЦИЯ 8. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.
SECTION 8. PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF
MATHEMATICAL EDUCATION**

**Фрактальная геометрия в школьном курсе: теория, алгоритмы и
оценивание**

Абдухошимов А.

University of Financial Management and Technologies, Ташкент, Узбекистан
abduhosimovazizbek3@gmail.com

В настоящем докладе формулируется и обосновывается формальная схема интеграции фрактальной геометрии (самоподобие, IFS, размерности $\dim *H / \dim *B$) в школьный курс без перегрузки теорией: задаётся компактный теоретический минимум, далее — спиральное обучение (траектория 5–11) и согласованные инструменты оценивания. Ключевая идея — связать строгие определения с алгоритмами (GeoGebra / Python) и проверяемыми учебными результатами.

Фракталы естественно соединяют строгость (подобия, размерности) с алгоритмикой (итерации/рекурсия). Чтобы обеспечить связность изложения, сначала фиксируем теоретическое ядро, на которое далее опираются цели и кспиральнь заданий, а затем показываем, как методика и цифровые практики реализуют эти идеи в классе. *Вклад*: (i) единая дидактическая рамка IFS+ $\dim *H / \dim *B$ как связка определение \rightarrow алгоритм \rightarrow оценивание; (ii) школьная процедура измерения \dim_B с регрессией $\log N - \log(1/\varepsilon)$ и разбором источников ошибки; (iii) согласованная рубрика оценивания и набор реплицируемых цифровых практик.

Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Отображение $S! : X \rightarrow X$ — подобие коэффициента $r \in (0, 1)$, если $d(Sx, Sy) = r, d(x, y)$. Строго самоподобное множество F удовлетворяет $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$. IFS $\mathcal{S} = X; S_i * i = 1^m$ действует оператором Хатчинсона $\mathcal{H}(A) = \bigcup_i S_i(A)$; при сжимаемости S_i существует единственный аттрактор F с $\mathcal{H}(F) = F$. Коробочная размерность

$$\dim *BE = \lim * \varepsilon \downarrow 0 \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon}$$

(если предел существует); всегда $\dim *HE \leq \dim *BE$. При OSC существует единственное $s > 0$ с $\sum_i r_i^s = 1$, и $\dim *HF = \dim *BF = s$ (Морэн–Хатчинсон). Этот минимум прямо поддерживает формулировку учебных целей и конструирование заданий.

Опираясь на идеи спиральной учебной программы Дж. Брунера, возвращаемся к тем же понятиям с возрастающей глубиной и алгоритмизацией.

Далее переносим цели в спираль 5–11, согласованную с актуальным содержанием курса; каждый виток возвращает к тем же понятиям на более строгом и алгоритмическом уровне:

- **5–6 классы (доли площади):** построение 2–3 шагов на миллиметровке, подсчёт долей закраски; без размерностей и без пределов.
- **7–8 классы (масштабирование и рекурсия без предела):** фиксируем коэффициент $1/3$, правило замещения котрезок \rightarrow 4 отрезка длины $1/3$ нь, рекурсивная процедура в Scratch; обсуждаем соотношения длин, но не предел.
- **9 класс (формальные прогрессии; “школьный” box-counting):** строгий вывод периметра снежинки $P_n = P_0(4/3)^n$ через геометрическую прогрессию; межпредметное упражнение по оценке \dim_B как линейной регрессии $\log N$ на $\log(1/\varepsilon)$ (без углублённой статистики).
- **10–11 классы (элементы анализа; IFS и Python):** предел (парадокс крастущий периметр — конечная площадьь), формулировка результата Морэна–Хатчинсона при OSC: если $\sum_i r_i^s = 1$, то $\dim_H F = \dim_B F = s$; реализация IFS и кхаотической игрынь в Python.

Выбранные приёмы для интеграции фрактальной геометрии в школьный курс (Think–Pair–Share, Gallery Walk, Numbered Heads Together) переводят интуитивные образы в формальные рассуждения и программные артефакты. GeoGebra служит для геометрических построений и измерений P_n, S_n , Python/Scratch — для реализации IFS и сбора данных $(\log N, \log(1/\varepsilon))$. Именно эти данные далее входят в оценивание и научную проверку эффективности.

Заключение и эффективность применения. Для ученика модуль формирует устойчивый понятийный аппарат (самоподобие, IFS, \dim_H / \dim_B) и связывает его с базовыми темами курса (подобие, прогрессии, предел). Он развивает алгоритмическое мышление через реализацию итераций в Scratch/GeoGebra/Python и учит переводить определение в работающий алгоритм. Повышается доказательная культура: от визуальной интуиции — к формализации и проверке гипотез на данных (график $\log N - \log(1/\varepsilon)$, оценка наклона). Формируются метанавыки обработки данных: регрессия, оценка погрешностей, воспроизводимость эксперимента и корректная интерпретация результатов. Проектные формы и мгновенная визуальная обратная связь

повышают мотивацию и позволяют дифференцировать задания под разный уровень подготовки. Для учителя модуль сокращает подготовительные издержки благодаря готовым шаблонам построений, стандартным скриптам и единой рубрике, что облегчает объективное и сопоставимое оценивание. Наконец, встроенный протокол эффективности дадут прозрачную методическую отчетность и аргументы для масштабирования практики без апелляции к процентам улучшения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson. J.E, Fractals and Self-Similarity. Indiana Univ. Math. J, 1981.
2. Moran P.A, Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Math. Proc. Camb. Philos. Soc.1946.
3. Falconer K, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 2014.
4. Barnsley M. F, Fractals Everywhere, 2nd ed. Academic Press, 1993.
5. Peitgen H.O, Jurgens H, Saupe D, Fractals for the Classroom. Part One: Introduction to Fractals and Chaos Springer/NCTM, 1992.

Topologiya fanini o'qitishda interfaol metodlardan foydalanish

Akmurzayeva V. A.¹, Qarordinov S. R.²

Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekistan;

vaziraakmurzayeva446@gmail.com

Buxoro Davlat universiteti, Buxoro, Uzbekistan;

s.r.qarordinov@buxdu.uz

Ushbu ishda topologiya fanini o'qitishda interfaol metodlardan foydalanish bo'yicha to'liq tavsiyalar hamda xulosalar haqida so'z yuritiladi. Natijada esa bu metodlar talabalarni faol ishtirokchi qilish, mavzuni chuqurroq tushunishga undash va mustaqil fikrlash ko'nikmalarini rivojlantirishga yordam beradi.

Dastlab biz bir nechta metodlarni qo'llash haqida ma'lumotlar berib o'tamiz.

1. Muammoli vaziyat yaratish. Har bir mavzuni boshlashdan oldin talabalarni hayratga soladigan savol yoki muammoli masala berish tavsiya etiladi. Masalan: "Sharining yuzasida ikki xil nuqtani kesmaydigan chiziq bilan bog'lash mumkinmi?". Talabalar javob izlar ekan, biz topologik tushunchalarni (bog'lanishlilik, sfera, doira) asta-sekin kiritib borishimiz foydali bo'ladi.

2. Guruhli ishlash va "Matematik debat". Talabalarni kichik guruhlariga bo'lib, ularga turli topologik mashq va masalalar berish tavsiya etiladi. Guruhlar o'zlarining yechimlarini bayon qiladi va yechim bo'yicha boshqa guruhlarining savollariga javob beradi. Masalan: "Mo'bius lentalarining kesilishlari haqida nima

deya olasiz?". Bu metod talabalarda mantiqiy asoslash va isbotlash madaniyatini kuchaytiradi.

3. Vizualizatsiya va modellashtirish. Abstrakt tushunchalarni geometrik ko'rinishda ko'rsatish uchun interaktiv dasturlar GeoGebra 3D, TopoVista, Mathematica kabilardan foydalanish tavsiya etiladi. Oddiy vositalarni ham qo'llash ham mumkin, masalan: rezina, qog'oz, iplardan sirt va fazoviy obyektlarni yasash. Talaba Myobus yaprog'ini o'zi yasab ko'rsa, bu jarayon Myobus yaprog'i uning xotirasida uzoq vaqt saqlanib qolishiga sabab bo'ladi.

4. "O'yinlashtirish" (Gamification). "Topologik kvest" tashkil etish tavsiya qilinadi: talabalar vazifalarni yechib, keyingi bosqichga o'tadi. Masalan: "Uy topologiyasi" o'yini - xona ichida narsalarni joylashtirish orqali bog'lanishlilik, kompaktlik tushunchasini tushuntirish. Natijada talabalar nazariyani amaliy hayotda sezadi.

5. Case-study (real hayotiy misollar). Talabalarga real hayotdagi topologik masalalarni berish tavsiya etiladi. Masalan, internet tarmoqlarini topologik modellar orqali tushuntirish yoki GPS tizimida yo'l topish muammosini graf topologiyasi orqali ko'rsatish.

Umumiy tavsiya: Har bir interfaol metodni maqsadli qo'llash lozim. Masalan, abstrakt tushunchalarni yoritishda - vizualizatsiya, muammoli vaziyatda - guruhli ishlash, real hayotga bog'lashda - case-study metodlari samaraliroq.

Adabiyotlar

1. Diego VizcaГґно, Victor Vargas, Adriana Huertas, Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database, Mathematics teaching research journal. Vol. 15, No. 1. P. 198–222, 2023.

O'zbekistonda matematika fanini rivojlanish bosqichlari va istiqbollari

Avliyoqulov A. A.

Termiz Davlat Universiteti, O'zbekiston

Insoniyat matematika fanining paydo bo'lishi va rivojlanish bosqichlarini, matematika so'zining ma'nosi (etimologiyasini) matematikaning bir butun mukammal fan bo'lib shakllanishi qanday kechganligini bilishga qiziqadilar. O'rta asrlarda mintaqamiz hududida ro'y bergan Birinchi va Ikkinchi Renesanslar davrida ham ilm nihoyatda qadrlangan edi. Birinchi Uyg'onish davrida Movarounnahr va Xurosondan yuzlab buyuk allomalar, qomusiy bilimlar sohiblari, mashhur mutafakkirlar yetishib chiqqanlar. Ularning ilmiy ishlari va kashfiyotlari bashariyat tamadduniga mislsiz hissa qo'shdi¹[1; 6-b.].

O'rta Osiyoda matematikani o'rganish juda qadim-zamonlardan boshlangan, jumladan O'zbekiston matematikaga oid ma'limotlarni bundan bir necha yuz yillar ilgari yashagan mashhur allomalarimizning asarlarida uchratamiz. O'zbekistonda matematika fani hozirgi zamonaviy holatiga kelguniga qadar ma'lum tarixiy davrlarni bosib o'tdi. Insoniyat matematika fani elementlariga qadim zamonlardanoq murojaat qilib kelgan. Buyuk matematik A.N.Kolmogorov matematikaning rivojlanishini quyidagi bosqichlarga bo'lgan:

1. Kishilik jamiyati paydo bo'lgandan so'ng milloddan oldingi VI-V asrlar.
2. Elementar matematika davri VI-V asrdan XVI asrgacha.
3. O'zgaruvchi miqdorlar matematikasi XVII asrdan XIX asrning birinchi yarimigacha.
4. Hozirgi zamon matematikasining rivojlanish davri XIX asrning 2-yarimidan to hozirgacha bo'lgan davr.

Birinchi davrda kishilar dastlabki matematik tushunchalar va tasavvurlarga ega bo'lgan. Birinchi davrda asosiy tushunchalardan biri bo'lgan son tushunchasi shakllandi va asta-sekin rivojlanib bordi. Mashhur matematik olimimiz, akademik T.A.Sarimsoqov Fanimizning ravnaq yo'llari nomli maqolasida matematika fanining taraqqiyotini to'rt bosqichga bo'lib ko'rsatgan.

Birinchi bosqich "matematikaning qadimgi Gretsiya (Yunoniston)da rivojlanish bosqichi bo'lib, unda Ptolomey, Aflotun (Platon), Arastu (Aristotel), Yevklid, Pifagor, Arximed kabi olimlarning nomlari tilga olingan. Shunday qilib, matematika atamasining kelib chiqishi ham qadimgi Gretsiyada fan sifatida shakllanishiga bog'liq bo'lib, grekcha matematik"fan, bilim ya'ni fanlarni bilish demakdir. Ikkinchi bosqich matematikaning O'rta Osiyoda rivojlanish bosqichi bo'lib, bu bosqichda buyuk bobokalonlarimiz al-Xorazmiy (780-850), Abu Nasr Forobiy (873-950), Umar Xayyom (1048-1131), Abu Rayhon Beruniy (973-1048), Ibn Sino (980-1037), Mirzo Ulug'bek (1394-1449) va boshqalar ilmiy asarlarida matematika fanini yangi bosqichga ko'tarildi. Uchinchi bosqichi G'arbiy Yevropa va Rim imperiyasida (XVII-XVIII asrlar) matematikaning rivojlanishiga to'g'ri keladi. To'rtinchi bosqichi "XIX asrdan shu kunlargacha bo'lgan davrni o'z ichiga oladi. Bu bosqichni xususan, O'zbekistonda ham ilm-fanning qayta rivojlanish bosqichi deb atash mumkin. Bu bosqichda O'zbekistonda matematika va boshqa aniq fanlar maktablari yuzaga keldi. T.Qori-Niyoziy, T.Sarimsoqov, S.Sirojiddinov, H.Abdullayev, O.Sodiqov, B.Qobilov, Y.To'raqulov, H.Rahmatulin, T.O'rozboyev, Sh.Alimov, S.Azimov, R.Habibullayev, M.Salohiddinov, T.Jo'rayev, T.Azlarov, N.Satimov kabi ko'plab olimlar yetishib chiqqan. O'tgan davr mobaynida matematikani, umuman ilm-fanni va ta'limni yangi sifat bosqichga olib chiqishga qarata qator tizimli ishlar amalga oshirildi. Shuningdek, Matematika sohasida buyuk asarlar

yaratgan, ulkan dunyoviy ilmni meros qoldirgan ajdodlarimiz haqida ham ko'proq ma'lumotlarga ega bo'lish bugungi avlodlar oldidagi ham qarz ham farzdir² [2; 6-b.].

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risidagi PQ-4708 sonli qarori, 2020-yil 9-iyuldagi Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risidagi PQ-4387 sonli qarori shular jumlasidandir. 2020-yilda Matematika institutiga ilmiy darajalar berishda mustaqillik berildi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Ilm-fan sohasini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi to'g'risidagi farmoni qabul qilindi. Mamlakatimizda ta'lim sohasini rivojlantirish va amalga oshirilayotgan keng qamrovli islohotlar matematika fanini o'qitish jarayoniga xalqaro tajribalarni samarali tatbiq etish, o'quvchilarning intellektual qobiliyatini rivojlantirishda integrativ ta'lim metodologiyalaridan foydalanish darajasini oshirdi.

Tariximizga yana bir nazar tashlasak, O'rta Osiyoda matematikani o'rganish juda qadim zamonlardan boshlangan, jumladan O'zbekiston matematikaga oid ma'lumotlarni bundan bir necha yuz yillar ilgari yashagan mashhur allomalarimizning asarlarida uchratamiz. Miloddan avvalgi II asrda tuzilgan Matematikaning to'qqiz kitobi degan asar diqqatga sazovordir. Qadimda matematikaning asoslari tushuntirilib berilgan. Bu kitob, dehqon, olim, hunarmand, tarixchi, astronom, chorvodor va me'morlar uchun uzoq vaqtgacha qo'llanma bo'lib xizmat qilgan. Hozirgi davrda matematika fani shartli ravishda ikkiga ajraladi:

1). elementar matematika. 2). Oliy matematika.

Prezidentimiz tashabbusi bilan Matematika fani va ta'limini rivojlantirishni qo'llab-quvvatlash jamg'armasi tashkil etildi. Jamg'arma mablag'lari hisobidan matematika sohasidagi olimlar va yosh tadqiqotchilarning xorijdagi xalqaro ilmiy-amaliy tadbirlarda ishtiroki ta'minlanmoqda. Matematika ta'lim yo'nalishlarida ta'lim olayotgan talabalar va tadqiqotchilar uchun akademik T.Sarimsoqov nomidagi stipendiya ta'sis etildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sh.Minovarov. Uchinchi Renesans-Yangi O'zbekiston kitob-fotoalbomi: ilmiy ommabop nashr-loyiha. Toshkent. Zilol buloqBΓ№ nashriyoti. 2022-yil, 252-bet.
2. B.A.Xudayarov. Matematika. I qism. Fan va texnologiya nashriyoti. Toshkent. 2018-yil, 283-bet.

Zamonaviy raqamli vositalar yordamida fazodagi tekislikni o'rgatishning samaradorligi

Bahriddinova D. F.

Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
bahriddinovadilnoza36@gmail.com

Mazkur ishda analitik geometriyada tekislik tushunchasini o'rganishda raqamli texnologiyalardan, xususan GeoGebra dasturidan foydalanish imkoniyatlari ko'rib chiqiladi.

So'nggi yillarda raqamli texnologiyalar ta'lim jarayonining ajralmas qismiga aylandi. Ayniqsa, analitik geometriya kabi fazoviy tafakkurni talab qiluvchi kurslarda interaktiv vositalardan foydalanish o'quvchilarning mavzuni chuqur anglashiga yordam bermoqda. Raqamli vositalar murakkab tushunchalarni ko'rgazmali ko'rinishda tasvirlash, parametrlarni o'zgartirish orqali natijani tezda kuzatish, hisoblashlarni avtomatlashtirish imkonini beradi.

Maple, Wolfram Mathematica va GeoGebra kabi dasturlar fazoviy obyektlarni o'rgatishda keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, GeoGebra 3D Graphing moduli fazodagi to'g'ri chiziq va tekisliklarni ko'rgazmali tarzda ko'rsatishda samarali vosita hisoblanadi.

GeoGebra 3D Graphing muhitida tekislikni yaratish uchun **Input bar** qismiga quyidagi buyruqlar yoziladi. Masalan, $x + 2y + 3z - 6 = 0$ tekisligini chizish uchun

`Plane[x + 2y + 3z = 6]`

buyrug'idan yoki uch nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini chizish uchun

`Plane[(1,2,3), (2,0,1), (0,1,4)]`

buyrug'idan foydalanamiz. Natijada bizga GeoGebra 3D muhitida tekisliklar ko'rinadi.

A nuqta orqali o'tuvchi p tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini chizish uchun dastlab p tekislik tenglamasini, keyin A nuqtani kiritamiz. So'ngra `Plane[A, p]` buyrug'ni kiritamiz, ya'ni

`p = Plane[x+2y+3z=6]`

`A = (1,2,3)`

`Plane[A, p]`

Natijada bizga parallel tekisliklarni chizib beradi.

Analitik geometriyada parallel tekisliklar bir xil normal vektorga ega bo'ladi. Agar $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ va $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, bu ikki tekislik o'zaro parallel bo'ladi. GeoGebra muhitida parallel tekisliklarni chizishning ikki asosiy usuli mavjud: Birinchisi tenglama orqali:

```
Plane[x + 2y + 3z = 6]
Plane[x + 2y + 3z = 10]
```

Ushbu buyruqlar $(1, 2, 3)$ normal vektoriga ega bo'lgan ikkita parallel tekislikni quradi. Ikkinchisi esa nuqta va tekislik orqali:

```
p = Plane[x+2y+3z=6]
A = (1,2,3)
Plane[A, p]
```

Bu yerda p tekisligiga parallel va $A(1, 2, 3)$ nuqtadan o'tuvchi yangi tekislik quriladi. Parallel tekisliklarni qurish orqali talabalar tenglama va geometrik tushuncha o'rtasidagi bog'liqlikni yanada aniqroq anglaydi.

GeoGebrada tekislikni fazoda aylantirish uchun **Rotate** funksiyasidan foydalaniladi:

Rotate[Object, Angle, Axis]

Masalan, $p : x + 2y + 3z = 6$ tekisligini z oqi atrofida 45° ga aylantirish:

```
p = Plane[x+2y+3z=6]
Rotate[p, 45De, zAxis]
```

Agar aylanish o'qi muayyan nuqtadan o'tishi kerak bo'lsa, masalan $A = (0, 0, 1)$ va vektor $(1, 0, 0)$ orqali:

```
A = (0,0,1)
v = Vector[(1,0,0)]
Rotate[p, 90De, Line[A, v]]
```

Talabalar uchun vizual ko'rgazmalilikni kuchaytirish maqsadida **Slider** qo'shib, tekislikni interaktiv aylantirish mumkin:

```
a = Slider[0De, 360De]
Rotate[p, a, zAxis]
```

Bu usul orqali tekislikni 0° dan 360° gacha erkin aylantirish imkoni yaratiladi.

Yuqoridagilardan shuni ko'rsatdiki, GeoGebra dasturidan foydalanish:

- (i) talabalar uchun nazariy formulalarni vizual ko'rinishda tasavvur qilish imkonini beradi;
- (ii) tekislik va chiziqlarni fazoda joylashuvi haqida aniq tasavvur uyg'otadi;
- (iii) parametrlarni o'zgartirib, natijani tezda ko'rishga imkon beradi;
- (iv) animatsiya yordamida fazodagi obyektning dinamik xossalarini ko'rsatadi.

Raqamli texnologiyalar fazoviy geometriya elementlarini o'qitishda samarali vosita hisoblanadi. Tekislik va chiziqlarning algebraik tenglamalarini grafik

ko'rinishga keltirish, parametrlarni o'zgartirish, ularni harakatlantirish yoki aylantirish orqali talabalarning mavzuni chuqurroq tushunishi ta'minlanadi. Shu bois, raqamli texnologiyalarni ta'lim jarayoniga kengroq tatbiq etish zarur va bu kelajakda matematika o'qitish samaradorligini yanada oshiradi.

ADABIYOTLAR

1. Boxonov Z.S., Analitik geometriyadan masalalar to'plami, Namangan: "Universitet 2018.
2. Romero Albaladejo, I. M., García López, M. Mathematical attitudes transformation when introducing GeoGebra in the secondary classroom. *Education and Information Technologies*, 2024, 29(2), 1451-1472.

Mathematics and the Case Method: The Digital Age, Engineering Education, and Empirical Analytics

Begmatov A. Kh.¹, Allanazarova N. A.², Normatova A.³

¹Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
begmatov59@gmail.com

²Samarkand State University named after Alisher Navoi, Samarkand,
Uzbekistan;
"n.allanazarova@mail.ru

²Kokand State Pedagogical University, Kokand, Uzbekistan;
normatovadham6@gmail.com

The current stage of engineering education is marked by the rapid integration of digital technologies, the internationalization of the educational environment, and a shift toward a competency-based model of training specialists. Under these conditions, the transformation of teaching fundamental disciplines particularly higher mathematics becomes an urgent necessity in order to meet the demands of the 21st century and to enhance the practical relevance of the course. Mathematics is traditionally perceived by students as an abstract and weakly applicable field of knowledge, which decreases motivation and hinders the formation of engineering-oriented thinking. One of the most effective responses to this challenge is the integration of the case-study method into the structure of mathematical education for future engineers.

The case method, as a form of active, context-based learning, shifts the focus from formal theoretical exposition to the solving of complex, multifaceted problems rooted in professional reality [1, 2]. Unlike fragmented practical tasks, case studies encourage students to engage in independent analysis, scenario modeling, and reasoned interpretation of results. This fosters not only subject-specific competencies, but also a broad range of transversal skills from digital literacy and critical thinking to teamwork and self-regulation [3].

This paper presents a model for integrating the case-study method into the higher mathematics curriculum, implemented in three technical universities in Uzbekistan through a pedagogical experiment. The program covered topics such as analytic geometry, linear algebra, mathematical analysis, and elements of mathematical modeling. A total of 12 case scenarios were developed and introduced, adapted to the specificities of various engineering fields: logistics, structural design, energy systems, and information technology. Each case included a real-world problem, a dataset, visualization tools (graphs, tables, diagrams), and instruments for digital processing.

The experimental sample consisted of 307 second-year students, divided into control and experimental groups. The research methodology employed both quantitative and qualitative methods: surveys, testing, observation, and interviews. Key indicators included academic performance, cognitive activity dynamics, development of digital skills, and the degree of interdisciplinary integration. Compared to the control group, students exposed to the case-study approach demonstrated a 14

A particularly noteworthy finding was the enhancement of students ability to transfer mathematical knowledge across contexts: they began to confidently apply mathematical methods to real-world engineering problems, use terminology and symbolic notation appropriately, and construct well-founded hypotheses and interpretations. Thus, the case-study method helped shape a meta-disciplinary view of mathematics as a language for describing and transforming engineering reality.

Special attention during the study was given to mathematical literacy and the communicative culture of future engineers. The case method made it possible to organically integrate formulas, diagrams, and terminology into coherent professional discourse, aligning mathematical reasoning with the demands of engineering communication. This is especially important in the digital age, where the ability to interpret numerical, graphical, and algebraic data is a core component of functional literacy.

It is also worth noting that the introduction of case studies sparked increased interest in mathematics among students. Increased attendance, active classroom participation, and a willingness to collaborate in pairs and small groups were observed. Cases involving real problems from regional economies, urban planning, traffic optimization, energy efficiency, and logistics were particularly well received. As a result, mathematics ceased to be perceived as a detached abstraction and came to be viewed as a meaningful and powerful problem-solving tool.

The findings confirm the relevance of the proposed model for the modern demands of digital and engineering education. This aligns with international

research emphasizing the effectiveness of active learning in improving academic and professional outcomes in STEM fields [1, 3]. Moreover, the experiment demonstrates the potential for scaling the approach both nationally and across the broader Eurasian educational space. The implementation of the case method does not require abandoning theoretical foundations, but rather rethinking how material is structured and emphasized.

Thus, the case-oriented model of teaching higher mathematics can be considered a promising strategy for addressing the strategic challenge of training next-generation engineers. The integration of rigorous mathematical content with practical and digital components ensures not only effective learning outcomes but also helps students develop holistic engineering thinking, which is essential for success in the context of digital economies and technological transformation. The empirical evidence obtained supports the inclusion of the case-study method in educational standards and its large-scale adoption across engineering universities in the CIS region.

REFERENCES

1. Freeman S. et al., Active learning increases student performance in STEM, PNAS. 2014. 111(23). P. 8410–8415.
2. Allen D., Tanner K., Infusing active learning into the large-enrollment class, CBE Life Sci Educ. 2005. 4(4). P. 262–268.
3. Drijvers P, Digital tools in math education, In: ICME-12. Springer, 2019. P. 135–151.
4. Begmatov A.Kh., Allanazarova N.A., Normatov A.A., An innovative model for integrating the case-study method into higher mathematics for training 21st-century engineers. Integration of Science and Education. 2025, vol.3, no 2, pp. 51-57.

Biologik jarayonlarni tahlil qilishda matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasining qo'llanilishi

Bozorov Z. R.¹, Davlatova D. S.²

V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Buxoro bo'linmasi, O'zbekiston
zavqiddinbozorov2011@mail.ru

Buxoro davlat universiteti, O'zbekiston
dilobar.davlatova@gmail.com

Matritsa tushunchasi biologiyada ko'p o'lchovli ma'lumotlarni tartibga solishda muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, o'simliklarning o'sish ko'rsatkichlari, hayvonlarning turli sharoitdagi o'zgarishlari yoki hujayra bo'linish jarayonlariga oid statistik ma'lumotlar matritsa ko'rinishida ifodalanib, keyingi hisob-kitoblarni

soddalashtiradi. Biologik modellashtirishda keng qo'llaniladigan matritsalaridan biri Leslie matritsasi bo'lib, u populyatsiyani yosh guruhlarga ajratish orqali har bir guruhning demografik ko'rsatkichlarini matematik tarzda ifodalaydi.

Leslie matritsasi- $n \times n$ o'lchamli kvadrat matritsa bo'lib, u quyidagi ko'rinishga ega:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Ushbu matritsa ikki asosiy parametrga tayanadi: f_i - ko'payish darajasi, y'ani i -yosh guruhidagi individlarning nechta yangi tug'ilishiga sabab boalish ehtimoli; s_i - tirik qolish ehtimoli, yaani i -yosh guruhdagi individlarning keyingi yosh bosqichiga necha foizi omon yetib borishi mumkinligini ifodalaydi. Bu kvadrat matritsa populyatsiyaning yosh guruhlari bo'yicha tuzilishini ko'rsatadi. U boshlang'ich populyatsiya vektoriga ta'sir etib, kelajakdagi individlar sonini quyidagi tenglama orqali prognozlaydi:

$$x(t + 1) = L \cdot x(t),$$

bu yerda $x(t)$ - hozirgi vaqtdagi individlar soni bo'yicha vektor, $x(t + 1)$ - keyingi yil uchun prognoz qilingan individlar sonlari [2].

Masala. Oq kit populyatsiyasini modellashtirishni qaraymiz.

Oq kitlar populyatsiyasi uch guruhdan tashkil topgan: n - yangi tug'ilgan individlar (yosh kitlar); v - voyaga yetgan, ammo hali ko'paymaydigan (reproduktiv bo'lmagan) individlar; p - voyaga yetgan reproduktiv individlar (ko'payish imkoniyatiga ega).

Dastlabki oq kitlar soni quyidagicha berilgan:

$$n(t) = 12, \quad v(t) = 18, \quad p(t) = 25.$$

Quyidagi topshiriqlarni bajarish kerak:

1. Oq kit populyatsiyasining matritsali modelini tuzish.
2. Ushbu ma'lumotlarga asoslangan holda populyatsiya yo'qolish xavfini baholash.

Yechish: Oq kitlar populyatsiyasining dinamikasi **o'tish (transitsiya) matritsasi** ya'ni Lesli matritsasi orqali ifodalanadi. Bu matritsa har bir yosh guruhining keyingi bosqichga o'tish ehtimolini ko'rsatadi:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Keyin oq kit populyatsiyasining matritsali modeli quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} n(t+1) \\ v(t+1) \\ p(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n(t) \\ v(t) \\ p(t) \end{pmatrix}.$$

Endi populyatsiyaning 5 yil mobaynidagi dinamikasini kuzatib, yo'qolib ketish xavfini baholaymiz: 1-yildan keyin 34,4 ta; 2-yildan keyin 22,4 ta; 3-yildan keyin 16,303 ta; 4-yildan keyin 11,458 ta; 5-yildan keyin 8,08 ta individ qoladi. Bundan ko'rinib turibdiki, har yili populyatsiya sezilarli ravishda kamayib bormoqda. Dastlabki 55 ta individ 5 yil ichida deyarli 7 baravarga kamayib, 8 ta atrofida qoladi. Bu shuni bildiradiki, hozirgi sharoit va ko'payish omillari bilan populyatsiya barqaror emas, balki yo'qolib ketish xavfi ostida. Agar bu tendensiya davom etsa, 10-12 yil ichida populyatsiya butunlay tugab ketishi mumkin. Quyidagi grafikda buni yaqqol ko'rishimiz mumkin.

Chiziqli tenglamalar sistemasi biologik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladigan samarali vositadir. U yordamida oziq-ovqat zanjiri elementlari orasidagi o'zaro bog'liqlikni aniqlash, genetik jarayonlarni bir nechta omillar ta'sirida tahlil qilishda yoki ekologik muhitda turli populyatsiyalar o'rtasidagi munosabatlarni matematik shaklda ifodalash mumkin. Bunday usullar murakkab biologik jarayonlarni soddalashtirilgan matematik model ko'rinishida ifodalashga, ularni yanada oson tahlil qilishga imkon beradi[3].

Masala. Chorvachilik fermasida sigirlar uchun ozuqa ratsioni uch turdagi yemlardan iborat: pichan, yashil yem va donli yem. Har bir yechim 1 kg da qancha oqsil(g), kalsiy(g) va vitamin (mg) mavjudligi A matritsa shaklida berilgan:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 150 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0.002 & 0.003 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda: 1-qator-oqsil(g), 2-qator-kalsiy(g), 3-qator-vitamin(g). Sigir kuniga 1700 g oqsil, 170 g kalsiy va 65 mg vitamin olishi kerak. Har bir yem turidan kuniga necha kilogram iste'mol qilinsa, sigirning barcha oziq moddalarga bo'lgan ehtiyoji qondiriladi? Ushbu masala Kramer usuli yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish orqali hal qilinadi.

ADABIYOTLAR

1. J.D. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.
2. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra with Applications* (10th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley Sons, 2010.

3. M. N. Kumari, Maruthi, H. U. Kavya , and Y. N. Krupashree , Applications of Linear Algebra in Genetics. Journal of Harmonized Research in Applied Sciences 6, no. 4: 236. 2018.

The CaPeB model as an innovative pedagogical framework for teaching linear algebra in higher education

Bozorov Z. R.¹, Mamatoxunova Y. A.²

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of
Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan
zavqiddinbozorov2011@mail.ru

Bukhara State Pedagogical Institute, Bukhara, Uzbekistan
yulduzxonmamatohunova@gmail.ru

Linear algebra is a fundamental subject in mathematics and physics, yet it presents considerable conceptual difficulties for students. In many traditional instructional settings, emphasis is often placed on procedural tasks such as solving systems of linear equations, computing determinants, and performing matrix operations. Falk and Levenberg (1993) emphasize that such procedural approaches dominate linear algebra instruction, which may result in superficial learning and hinder the development of conceptual understanding.

To address these pedagogical challenges, various interactive and student-centered teaching methods have been investigated. Among them, **Peer Instruction**, as described by Crouch and Mazur (2001), has proven effective in fostering conceptual change. Their model involves a two-step process: students first consider a conceptual question individually, then discuss it with peers before revising their answers. This structured interaction creates cognitive conflict, which prompts students to re-evaluate their understanding and construct more accurate mental models.

Another promising approach is **Case-Study** which connects theoretical knowledge with practical, real-world scenarios. Herreid (2007) characterizes case-study pedagogy as a method that encourages students to apply learned theories to complex, often interdisciplinary problems situated in realistic contexts. Although Herreid does not specifically focus on linear algebra, the principles of case-based instruction can be adapted to topics such as vector spaces or matrix rank by embedding them in applied problem contexts, such as engineering systems or physical modeling tasks.

In addition, **Blended Learning**, examined by Means et al. (2014), offers a flexible instructional format that combines digital, self-paced learning with active in-class engagement. Their research demonstrates that blended environments accommodate diverse learning styles and allow students to engage with material

both independently and collaboratively. This dual-mode learning environment supports deeper engagement and retention of abstract concepts by offering multiple opportunities for reinforcement and application.

Building on these foundations, the CaPeB model integrates Peer Instruction, Case-Study Based Learning, and Blended Learning into a unified framework. The aim is to promote active learning, facilitate deeper conceptual understanding, and enhance learner motivation. By combining structured peer discussions, contextualized problem-solving, and flexible digital engagement, CaPeB creates a rich learning environment in which students can meaningfully connect theory with practice. In the context of linear algebra education, this approach supports the development of both abstract reasoning and real-world application skills ВГҮ outcomes that are often lacking in more traditional pedagogical models.

Initial interviews and diagnostic surveys conducted with students revealed a high interest in modern, real-life integrated teaching methods. Taking this into account, lessons in the experimental groups were designed using the CaPeB model. Each lecture session was organized by connecting it to real-life problems and events. As an example, we can take the topic of vector spaces.

Example: During the Apollo 13 mission, in an emergency situation, the astronauts had to use the available Lunar Module (LM) thrusters to generate the required force direction for reorientation in space. The question is as follows: Is it possible to generate the necessary force direction using the three available thruster directions?

The three active LM RCS thrusters provide force in the following directions:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 2, 3).$$

The total force direction the astronauts want to generate is given by:

$$\vec{F}_r = (6, 9, 14).$$

Can this be formed as a linear combination of the given vectors? That is:

$$\vec{F}_r = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$$

The lesson began with a real-life scenario the Apollo 13 mission which captured students attention and significantly increased their motivation to learn. Through the use of concept maps and peer instruction, students engaged in deeper analysis of the topic. Particularly during the guided problem-solving stage, students developed the following skills:

- Performing operations on vectors;
- Constructing linear combinations;

- Modeling systems in 3D space;
- Identifying concepts of rank and basis;
- Understanding boundaries based on the concept of span.

The experimental results showed that lessons based on the CaPeB model improved not only students' conceptual understanding but also their practical mathematical skills. Students began applying their knowledge in real-world contexts, rather than relying solely on memorization.

REFERENCES

1. Crouch, C. H., Mazur, E., Peer instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics*, 2001.
2. Egara, F. O., Mosimege, M. D., Effect of blended learning approach on secondary school learners mathematics achievement and retention. *Education and Information Technologies*, 2024.
3. Falk, G., Levenberg, S., The function concept in college students: Linearity and homogeneity. *Journal of Research in Science Teaching*, 1993.

Mantiqiy va olimpiada masalalarining o'quvchilar fikrlash qobiliyatini rivojlanishiga ta'siri

Do'stova Sh. B.¹, Mahmudova R. M.²

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston;

Ushbu tezisdan nostandart, mantiqiy va olimpiada masalalarini yechish usullari haqida ko'rsatma va tavsiyalar ko'rsatilgan. Ba'zi masalalarning yechilish usullari tushintirilgan.

Bizga ma'lumki matematika fanini o'rganish jarayonida biz noan'anaviy yechish usullari-ga ega bo'lgan mantiqiy fikr yuritib yechiladigan masalalarga duch kelamiz. Matematika fani paydo bo'lgan dastlabki asrlardan muammoli masalalar matematika fanini rivojlantirishga asos bo'lgan. Bu masalalar juda qadimdan mavjud va ular yildan-yilga, asrdan asrga o'z-o'zini rivojlantirib kelmoqda. Mantiqiy va nostandart olimpiada masalalari o'zining serqirraligi va mantiqan fikrlashga undashi bilan boshqa oddiy masala va testlardan farq qiladi. Matematika fanini o'qitishda masalaning ahamiyati juda katta bo'lib, bunda o'quvchilarda matematikaga bo'lgan qiziqishni orttirish, tayanch va fanga oid kompetensiyalarni shakllantirish uchun ta'lim jarayonida amaliy va nostandart xarakterdagi masalalardan foydalanish maqsadga muvofiq. Ayrim hollarda amaliy va nostandart xarakterdagi masalalarning yechimi darhol topilmasdan, bir necha bor urinishlar natijasidagina aniqlanishi mumkin. Nostandart masalalardan ayrim turlarini yechish uslublarini ko'rib o'tamiz.

"Oxiridan boshlab" usuli bilan yechish.

1- masala. Dehqon birinchi xaridorga qopdagi guruchning yarmini va yana 1 kg guruch sotdi. Ikkinchi xaridorga qolgan guruchning yarmini va yana 1 kg guruch sotdi. Uchinchi xaridorga qolgan guruchning yarmini va yana 1 kg guruch sotdi. Shundan so'ng qopda 14 kg guruch qoldi. Dastlab qopda necha kg guruch bo'lgan. **Yechish.** Masalani "Oxiridan boshlab" usulini qo'llab yechamiz. Qopda uchinchi xaridorga qo'shimcha 1 kg guruch sotgandan keyin qopda 14 kg guruch qolgan. Demak, undan oldin qopda $(14+1)=15$ kg guruch bo'lgan. Bu esa o'z navbatida 3-xaridor kelishidan oldingi qopdagi guruchning yarmisi bo'lgan. Bundan esa 3-xaridor kelishidan oldingi qopdagi guruchning $15 \cdot 2=30$ kg ekanligini bildiradi. Endi 2-xaridor kelishidan oldingi guruch miqdorini topamiz. Avval ikkinchi xaridor qo'shimcha 1 kg guruch olgandan keyin qopda 30 kg guruch qolganini hisobga olsak, undan oldin qopda $(30+1)=31$ kg guruch bo'lganligini kelib chiqadi. Bu esa o'z navbatida 2-xaridor kelishidan oldingi qopdagi guruchning yarmisi bo'lgan. Bundan esa 2-xaridor kelishidan oldingi qopdagi guruchning $31 \cdot 2=62$ kg ekanligini bildiradi. Endi xuddi shunday dastlab qopda qancha guruch borligini hisoblash uchun avval uning olgan qo'shimcha 1 kg guruchini hosil qilgan natijamizga qo'shamiz. $(62+1)=63$ bo'ladi. Bu esa dastlabki guruchning yarmi hisoblanadi. Demak, dastlab qopda $63 \cdot 2=126$ kg guruch bo'lgan.

"Shartlarga ko'ra qismlarga bo'lib yechish" usuli bilan yechish.

2-masala. Uchta uychada 3 ta: oq, qora, jigarrang mushuklar yashaydi. Birinchi va ikkinchi uychada yashaydigan mishiklar qora emas bo'lib, oq rangli mushuk birinchi uychada yashamasa, qaysi mushuk qaysi uychada yashashini aniqlang. Yechish. Masalani "Shartlarga ko'ra qismlarga bo'lib yechish" usulini qo'llab yechamiz. Masalaning birinchi sharti hisoblangan "Birinchi va ikkinchi uychada yashaydigan mishiklar qora emas" degan shartga ko'ra, qora mushukning 3- uychada yashashi kelib chiqadi. Endi 2-shartga o'tamiz. Ikkinchi shartga ko'ra "oq rangli mushuk birinchi uychada yashamasa demak uning 2-uychada yashashi kelib chiqadi. Va bu o'z navbatida 1-uychada jigarrang mushuk yashaydi degan xulosani keltirib chiqaradi.

Javob: 1-uychada jigarrang, 2-uychada oq va 3-uychada qora mushuklar yashar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Do'stova Sh.B., Yuqori darajali tengsizliklarni oraliq usulidan foydalanib yechish, Scientific progress, 2:1 (2021, noyabr), pp. 195-196
2. Shahlo Baxtiyorovna Do'stova, EHMLar davrida π vasvasasi. "Science and Education" Scientific Journal 2021, Volume 2 Issue 11 www.openscience.uz pp. 12-25

Talabalarning ijodiy tafakkurini rivojlantirishda oddiy differensial tenglamalar sistemalarini muammoli texnologiyalar yordamida o'qitishni takomillashtirish

Durdiyev D.Q.¹, Abdusalomova A.²

V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Buxoro bo'linmasi, Buxoro,
O'zbekistan
d.durdiev@mathinst.uz

Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekistan;
:abdusalomovaaziza@gmail.com

Zamonaviy ta'lim jarayonida talabalarning faolligi, mustaqil fikrlashi va ijodiy tafakkurini shakllantirish masalasi eng dolzarb vazifalardan biri hisoblanadi. Xususan, matematika fanini o'qitishda nafaqat nazariy bilimlarni yetkazish, balki talabalarni mustaqil izlanishga, yangicha yechimlarni topishga, matematik model yaratish va uni tahlil qilishga yo'naltirish muhimdir. Ta'limning an'anaviy usullari bunday maqsadlarni to'liq qamrab ololmaydi. Shu bois bugungi kunda muammoli ta'lim texnologiyalari pedagogik jarayonning ajralmas qismiga aylanmoqda.

Differensial tenglamalar sistemalari matematik tahlil, fizika, texnika, iqtisodiyot va biologiya kabi ko'plab sohalarida murakkab jarayonlarni ifodalash va ularni modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Mazkur mavzuni talabalarga o'rgatish jarayoni, agar faqat an'anaviy ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarga tayanilsa, ko'pincha murakkab, quruq va abstrakt ko'rinishi mumkin. Talabalar ko'pincha tenglamaning nazariy mazmunini anglamasdan, formulalar va algoritmlar yodlash bilan cheklanib qoladi. Bu esa ularning ijodiy tafakkurini rivojlantirmaydi, mustaqil tahliliy faoliyatini rag'batlantirmaydi.

Muammoli o'qitish esa aksincha, talabalarda fikrlash jarayonini faollashtiradi, ularda nega?, qanday qilib?, qaysi usul eng maqbul? kabi savollarni uyg'otadi. Bunday xolatda professor-o'qituvchi o'quv jarayonida oldindan rejalashtirilgan muammoli vaziyatlarni taqdim etadi, talabalarni uni yechishga undaydi va shu orqali ijodiy tafakkur elementlarini shakllantiradi. Misol uchun, differensial tenglamalar sistemasini yechishda talabaga turli yondashuvlar (analitik, sonli, grafik, taqribiy) usullar berilib, qaysi biri samaraliroq ekani haqida mustaqil xulosa chiqarishga undaladi.

Muammoli o'qitish talabaning kreativ tafakkuri, tanqidiy fikrlashi va innovatsion qarashlarini rivojlantirish masalasida quyidagi tamoyillarga tayanadi:

- Muammoli o'qitishning nazariy asoslari va uning pedagogik tamoyillari;
- differensial tenglamalar sistemalarini o'qitishda muammoli vaziyatlarni yaratish misollari;

- o'quv jarayonida ijodiy topshiriqlar, Case-study va loyihaviy yondashuvlar;
- tajriba-sinov ishlari asosida muammoli o'qitish samaradorligini aniqlash.

Yuqoridagi tahlillar shuni ko'rsatadiki, differensial tenglamalar sistemalarini muammoli o'qitish talabalarning ijodiy tafakkurini rivojlantirishda muhim o'rin tutadi. An'anaviy o'qitish usullaridan farqli ravishda, muammoli ta'lim texnologiyalari talabalarning faolligini oshiradi, ularda yangicha fikrlash, muammoni turli tomondan ko'rib chiqish, alternativ yechimlarni taqqoslash ko'nikmalarini shakllantiradi. Shu bilan birga, muammoli o'qitish asosida tashkil etilgan darslar talabalarda matematik bilimlarni ongli ravishda o'zlashtirish, ijodiy fikrlash va mustaqil qaror qabul qilish madaniyatini shakllantirishga olib keladi. Bu esa ta'lim sifatini oshirish bilan bir qatorda, jamiyatning intellektual salohiyatini rivojlantirishga ham xizmat qiladi.

Adabiyotlar

1. Xoliqov S.H. Method of teaching ordinar differential equations on the basis of innovative technologies, 2020.
2. Xoliqov S.H. Opportunities of information and communication technologies in teaching differential equations, European Journal of Humanities and Educational Advancements, 2021.
3. Xoliqov S.H. Model of increasing the efficiency of the differential equations section in higher educational institutions 2021.
4. Xoliqov S.H. "Differensial tenglamalar" bo'limini o'qitish samaradorligini oshirishda kompyuterning matematik amaliy paketlaridan foydalanish, 2021.

Oliy ta'limda matematika fanini o'qitishning zamonaviy yondashuvlari

G'affarova D. ¹

Navoiy davlat universiteti tayanch doktoranti;
gafforovadilfuza@mail.ru

XXI asrda ta'lim tizimida ro'y berayotgan global o'zgarishlar matematika fanini o'qitishda ham yangi yondashuvlarni joriy etishni talab etmoqda. Matematika, texnika, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari, tabiiy fanlar va pedagogika uchun umumiy metodologik asosdir. Shu bois, oliy ta'limda ushbu fan samaradorligini oshirish jamiyat taraqqiyoti uchun hal qiluvchi ahamiyatga ega. Jahon tajribasi shuni ko'rsatadiki, ta'lim samaradorligini oshirishning muhim shartlaridan biri talabaning o'z bilim faoliyatini boshqarishiga yo'naltirilgan kompetensiyaviy yondashuvdir. Xorijiy reytingig yuqorir universitetlarning tavsiyalarida matematik savodxonlik XXI asr ko'nikmalari ichida eng muhim

o'rinlardan birini egallaydi. Shu jumladan barcha oliy ta'lim muassasalarida matematika fani ko'plab sohalar uchun ham poydevor bo'lib xizmat qiladi. Shu bois ta'lim jarayonidagi islohotlar, raqamlashtirish va kompetensiyaviy yondashuvlar matematika fanini o'qitish metodikasini tubdan qayta ko'rib chiqishni talab etmoqda. oliy ta'lim tizimida matematika fanini samarali o'qitish, metodik yondashuvlar va innovatsion texnologiyalarning o'rni o'z ahamiyatini yo'qotmaydi. Oliy ta'lim tizimida matematika fani chuqur nazariy asosga ega bo'lib, talabdan fikrlashni, ijodkorlikni talab qiladi. Talabada mantiqiy tafakkurni, ijodkorlikni shakllantirishda bugungi kunning zamonaviy o'qituvchisidan katta ma'sulyat izlanish talab etiladi. Zamonaviy matematika o'qituvchisi nafaqat fan bilimdoni, balki metodika va pedagogik texnologiyalarni qo'llay oluvchi shaxs bo'lishi kerak. U interaktiv metodlardan foydalanib, talaba qobiliyati darajasiga mos materiallardan hamda baholash mezonlaridan samarali foydalana olishi muhim ahamiyat kasb etadi. Oliy ta'lim tizimida matematika fanini o'qitishning ta'lim sifatini oshirishda quyidagi asosiy bosqichlarda ta'lim shakllarini tashkil etish samarali natijalarga olib keladi.

- Nazariy va amaliy uyg'unlashuv. Matematika chuqur mantiqiy asosga ega bo'lib, talabalarda tanqidiy va ijodiy fikrlashni shakllantiradi. Shu bilan birga, fan amaliy jarayonlarga uyg'unlashishi kerak;
- kompetensiyaviy yondashuv. Talabada nafaqat nazariy bilim, balki real muammolarni yechish, tahlil qilish, qaror qabul qilish ko'nikmalari shakllanishi zarur;
- ta'limning raqamlashtirilishi. Onlayn platformalar, elektron darsliklar, sun'iy intellekt yordamida ta'limni individuallashtirish imkoniyati kengaymoqda.

Oliy ta'limda matematika fanini o'qitishning zamonaviy yondashuvlari ta'lim sifatini oshirishning muhim omilidir. Muammoli va aralash ta'lim metodlari, AKT vositalari va fanlararo integratsiya orqali talabalar nafaqat nazariy bilim, balki real hayotiy kompetensiyalarga ega bo'ladilar. Jahon tajribasini milliy ta'lim tizimiga uyg'unlashtirish, o'qituvchining ilmiy-metodik kompetensiyalarini oshirish va raqamlashtirish jarayonini chuqurlashtirish oliy ta'limni yangi bosqichga olib chiqadi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov B. "Matematika o'qitish metodikasi Toshkent, 2021.
2. Normatov M. "Zamonaviy pedagogik texnologiyalar Samarqand, 2020. 288b.
3. OECD. "Innovative Teaching for Effective Learning 2018.

Iqtisodiy ta'lim va shaxsning iqtisodiy madaniyatini rivojlantirish masalalari

G'ulomov U.

Profi university Navoiy filiali, Navoiy, O'zbekiston;
gulomovulugbek@mail.ru

Zamonaviy globallashuv sharoitida iqtisodiy ta'limning ahamiyati keskin ortib bormoqda. Aholining ehtiyojlarini qondirish uchun ishlab chiqarish va ishlab chiqarish munosabatlarini rivojlantirish ijtimoiy taraqqiyotning asosiy omili hisoblanadi. Inson taraqqiyoti, avvalo, intellektual mahsulotlar va moddiy ne'matlarda mujassamlangan qadriyatlarni saqlash va to'plash orqali ta'minlanadi. Shu jarayonda iqtisodiy madaniyat shaxsning jamiyatdagi ijtimoiy rolini belgilab beruvchi muhim ko'rsatkichga aylanmoqda. Bozor siyosatini qayta tashkil etish jarayonida iqtisodiyot, siyosat, san'at va madaniyat bilan bir qatorda ta'lim tizimi ham tub o'zgarishlarga duch kelmoqda. Davlat siyosatining muvaffaqiyati ta'lim sohasidagi islohotlar, ilm-fan va madaniy qadriyatlarning rivoji, shuningdek, mamlakat ijtimoiy-iqtisodiy ahvoning barqarorligiga bevosita bog'liqdir. Ta'lim tizimi shaxsning jismoniy, axloqiy va psixologik qiyofasini shakllantiruvchi asosiy institutdir. Ayniqsa, iqtisodiy ta'lim insonda iqtisodiy fikrlash, resurslardan oqilona foydalanish, iqtisodiy manfaat va ijtimoiy mas'uliyat uyg'unligini shakllantiradi. Shu bois, ta'limni isloh qilish bo'yicha ishlab chiqilayotgan kontseptual yondashuvlar shaxsiy iqtisodiy madaniyatni umuminsoniy qadriyat sifatida rivojlantirish masalalarini yoritib beradi. Xalqaro tajriba shuni ko'rsatadiki, kichik va o'rta biznes iqtisodiy taraqqiyotning eng istiqbolli yo'nalishlaridan biridir. Masalan, Germaniya va Yaponiya modelida iqtisodiy bilimlar maktabdan boshlab beriladi va oliy ta'limda amaliy tajriba bilan uyg'unlashadi. Yurtimizda ham bu yo'nalishda sezilarli yutuqlar bo'lsada, amaliy faoliyatga yo'naltirilgan ta'lim mexanizmlarini kuchaytirish zarur. Kichik va o'rta biznes egalari nafaqat korxonaga egasi va boshqaruvchisi, balki konstruktor, menejer, texnolog, buxgalter, iqtisodchi va marketolog sifatida ham faoliyat yuritadi. Shuning uchun ular yuqori intellektual daraja, keng ko'lamli ko'nikmalar va mustahkam iqtisodiy bilimga ega bo'lishi talab etiladi. Iqtisodiy ta'lim shaxsning bilim darajasini oshirish bilan birga, jamiyatning umumiy madaniy rivojlanishiga ham katta hissa qo'shadi. Ta'lim olgan inson iqtisodiy jarayonlarni chuqur anglab, resurslardan oqilona foydalanishni, moliyaviy risklarni boshqarishni, shaxsiy va ijtimoiy manfaatlarni uyg'unlashtirishni o'rganadi. Bu esa jamiyatda iqtisodiy ongning shakllanishi va iqtisodiy madaniyatning yuksalishiga olib keladi. Shuningdek, iqtisodiy ta'lim jamiyatda tadbirkorlik ruhini mustahkamlash, yoshlarni innovatsion faoliyatga jalb qilish, iqtisodiy xavfsizlikni ta'minlashda muhim omil hisoblanadi. Iqtisodiy

bilimlar nafaqat bozor jarayonlarini tushunishga, balki mamlakat taraqqiyoti uchun mas'uliyatli qarorlar qabul qilishga ham yordam beradi. Hozirgi davrda iqtisodiy ta'limni rivojlantirishda innovatsion texnologiyalar va metodlardan foydalanish muhim ahamiyatga ega. Masofaviy ta'lim platformalari, elektron darsliklar, interaktiv testlar va simulyatsion dasturlar talabalarda iqtisodiy jarayonlarni chuqurroq anglashga yordam bermoqda. Xalqaro tajribaga asoslanib aytish mumkinki, iqtisodiy fanlarni o'qitishda "case-study"(amaliy vaziyatlarni tahlil qilish), loyihaviy ta'limi va o'yin texnologiyalari samarali natija bermoqda. Bu usullar talabalarni nazariy bilim bilan cheklanib qolmasdan, uni amaliy faoliyatda qo'llashga undaydi. Shuni e'tirof etish kerakki, zamonaviy ta'lim muhitida ta'lim tizimining rivojlanishi va evolyutsiyasi bo'yicha yetarli nazariy tadqiqotlarga bo'lgan ehtiyoj dolzarbligini yo'qotmaydi. Xulosa qilib aytganda, iqtisodiy ta'lim va iqtisodiy madaniyatni rivojlantirish jamiyat taraqqiyotining muhim sharti hisoblanadi. Bu jarayon davlat siyosati, ta'lim tizimidagi islohotlar, xalqaro tajriba va ilmiy izlanishlar bilan bevosita bog'liq. Mamlakatning iqtisodiy barqarorligi uchun iqtisodiy ta'limni nazariy va amaliy jihatdan rivojlantirish, kichik va o'rta biznesni qo'llab-quvvatlash hamda zamonaviy ta'lim texnologiyalarini joriy etish zaruratiga ehtiyoj sezadi.

ADABIYOTLAR

1. Азимов Л.Б. Преподавание курса "Введение в экономику": Пособие для учителя. -М.: Вита-пресс, 1998 192 с.
2. Бухвалов А. Экономическое образование и уроки зарубежного опыта // Экономическая школа., 1991, т.1, вып.
3. G 'ulomov U. Biznes matematika fanida moliyaviy risklarni baholash mavzusini innovatsion texnologiyalar asosida o'qitishni takomillashtirish.O'zmu xabarlari, 2025, 1/8/1, B. 60-63

Median teoremasi

Muhitdinov D. F.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Ma'lumki, uchburchaklar mavzusi geometriya fanining asosiy boshlang'ich bo'limlaridan biri bo'lib, uning elementlari ko'plab teoremalarga zamin yaratadi. Medianani topish masalasi ham shular jumlasidandir.

Ushbu teoremda uchburchak medianasining uzunligi shu medianaga tushgan tomon va ma'lum burchaklar orqali ifodalanadi hamda yangi natija taqdim etiladi. Isbot davomida oddiy trigonometrik formulalardan foydalaniladi, shu bois faqat asosiy qadamlarning isboti keltiriladi. Teorema jarayonida esa yangi tushuncha **median burchagi** kiritiladi. Bu tushuncha medianani ifodalash

formulasini soddalashtirishda muhim rol o'ynaydi va geometriyada yangi tadqiqot imkoniyatlarini ochib beradi.

TEOREMA. Uchburchakning α burchagidagi uchidan chiquvchi va qarshisidagi a tomoni bilan β burchak tashkil qiluvchi m_a medianasi quyidagicha topiladi:

$$m_a = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha_a}{2} \right).$$

Bu yerda α_a burchak **uchburchakning a median burchagi** deyiladi. Median burchagi teoremadagi burchaklar bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan:

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_a}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Ushbu teorema bundan keyin **Median teoremasi** deb ataladi.

Isbot. Uchburchakning α burchagidan boshqa burchaklarini α' va α'' deb olamiz ($\alpha + \alpha' + \alpha'' = 180^\circ$). Ma'lumki, teoremadagi berilganlardan foydalansak uchburchak S yuzini quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')} = \frac{1}{2} a m_a \sin \beta. \quad (1)$$

Shuningdek, quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha' \cdot \operatorname{ctg} \alpha''}{\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha' - \operatorname{ctg} \alpha''}{2}.$$

Biz quyidagi tenglikni o'rinli deb ishlaymiz:

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''}{2} + \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}. \quad (2)$$

Haqiqatan ham yuqoridagilardan foydalansak (2) tenglik o'rinli bo'lib qoladi:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''}{2} + \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha' + \operatorname{ctg}^2 \alpha''}{2(\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha' \cdot \operatorname{ctg} \alpha''}{\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha' - \operatorname{ctg} \alpha''}{2} \right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha' + \operatorname{ctg}^4 \alpha'' + 4 + 2(2 \operatorname{ctg}^2 \alpha' + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha' \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha'')}{(2(\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''))^2}}} \\ &= \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha' + \operatorname{ctg}^2 \alpha''}{2(\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')}\right)^2} = \frac{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha' + \operatorname{ctg}^2 \alpha''}{2(\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')}.$$

Endi (1) va (2) formulalardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$m_a = \frac{a}{2} \sin \beta \left(\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta} \right).$$

Soddalik maqsadida

$$\operatorname{ctg} \alpha_a = \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha$$

munosabatni kiritib,

$$m_a = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_a}{2}$$

keltirib chiqaramiz. Teorema isbotlandi.

Natija. Median teoremasi va Apollon teoremasidan foydalanib quyidagi natija olinadi:

$$\sin \frac{\alpha_a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{2(b^2 + c^2)}}.$$

ADABIYOTLAR

1. A.P. Kiselyov, Geometriya. Planimetriya-Moskva:Prosveshchenie, 2018.
2. И.Ф. Шарыгин, Задачи по планиметрии. Москва: Наука, 1986.

Topologik fazolarning zichlik tipidagi xossalarini o'qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish

Muxamedkulova A. A.¹, Qarordinov S. R.²

¹Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekistan;
asiyadilzara@gmail.com

²Buxoro Davlat universiteti, Buxoro, O'zbekistan;
s.r.qarordinov@buxdu.uz

Ushbu ishda topologik fazolarning zichlik tipidagi xossalarini o'qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish bo'yicha to'liq tavsiyalar hamda xulosalar haqida so'z yuritiladi. Natijada esa bu metodlar talabalarni faol ishtirokchi qilish, mavzuni chuqurroq tushunishga undash va mustaqil fikrlash ko'nikmalarini rivojlantirishga yordam beradi.

topologik fazolarning zichlik tipidagi xossalarini o'qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish o'qitishda juda samarali hisoblanadi, chunki bu metod orqali nazariy tushunchalarni nafaqat qayta bayon qilish, balki yangi natijalar kashf etish ham mumkin.

Biz to'liq tavsiyalarni bosqichma-bosqich keltiramiz:

1. Metodni qo'llashning boshlang'ich bosqichi.

Mavzuni aniqlash: Zichlik, kuchsiz zichlik, lokal zichlik va lokal kuchsiz zichlik kabi tushunchalar ko'p xil yo'nalishda o'rganiladi. Ya'ni fazoning minimal bazalari soni (separabel bo'lish yoki bo'lmasligi), to'plamlarning zich, kuchsiz zich, lokal zich va lokal kuchsis zich bo'lish shartlari, maxsus fazolarda (metrik, Tikhonov, Stone-Chech kompaktifikatsiyasi) zichlik tipidagi xossalari. Metodni qo'llashni qaysi tushunchani o'rgatishga qaratishni aniq belgilab olish tavsiya etidali.

2. Adabiyotlar sharhi.

Klassik manbalar: Engelking "General Topology Arkhangel'skiy va Shapirovskiy kabi olimlarning ishlarini o'rganish Yangi maqolalar: "Topology and its Applications" Houston J. Math. "Fund. Math." kabi jurnallardan mavzuga oid maqolalarni tanlab olib o'rganish. Bundan maqsad - mavjud natijalarni umumlashtirish va ulardan o'qitishda samarali foydalanish.

3. Ilmiy izlanishlar metodlari.

1. Nazariy (deduktiv) usul: mavjud teoremlardan yangi xulosalar chiqarish, masalan, separabel fazolarda zich to'planning konstruksiyasi haqidagi ma'lumotlar yordamida;
2. Qiyosiy metod: turli sinf fazolar, xususan metrik, normallangan, lokal kompakt kabi fazolarning zichliklarini o'zaro taqqoslash;
3. Model qurish: konkret fazolarda, masalan Yevklid fazolari, Hilbert fazolari, funksional fazolar kabilarda zich to'plamlarni topish;
4. Aksiomatik usul: to'plamda nazariy asosda yangi shartlar kiritish, masalan, MA, CH gipotezalari ostida zichlikning o'zgarishi;
5. Konstruktiv metod: zich, kuchsiz zich, lokal zich va lokal kuchsiz zich kabi to'plamlarni aniq qurish, masalan, natural, ratsional, irratsional va haqiqiy sonlar to'plamlari yordamida Yevklid fazosida zichlik, kuchsiz zichlik, lokal zichlik va lokal kuchsiz zichlik kabilarni hisoblash.

Adabiyotlar

1. Diego VizcaГґно, Victor Vargas, Adriana Huertas, Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database, Mathematics teaching research journal. 2023. Vol. 15, No. 1. P. 198–222.

Topologik fazolarning turli salmoqlarini o'qitishda algebraik metodlardan foydalanish

Muxamedkulova G. A.¹, Qarordinov S. R.²

¹Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekistan;
gulnurkz25@gmail.com

²Buxoro Davlat universiteti, Buxoro, O'zbekistan;
s.r.qarordinov@buxdu.uz

Ushbu ishda topologik fazolarning turli salmoqlarini o'qitishda algebraik metodlardan foydalanish bo'yicha to'liq tavsiyalar hamda xulosalar haqida so'z yuritiladi. Topologik fazolarning turli salmoqlarini, xususan salmoq, to'rli salmoq, k-salmoq, cs-salmoq kabilarni o'qitishda algebraik metodlardan foydalanish haqidagi tavsiyalarni bosqichma-bosqich keltirib o'tamiz:

1. Asosiy tushunchalarni aniqlash.

Topologik fazolarning salmoqlarini to'plamlar nazariyasi elementlari va topologik fazolarning kardinal invariantlari yordamida aniqlash hamda baholash. Masalan: Zichlik ($d(X)$) - eng kichik zich to'plamning kardinali, salmoq ($w(X)$) - bazaning eng kichik kardinali, quvvat ($|X|$) - fazoning to'plam sifatidagi kattaligi, Suslin soni, Lindelyof soni, π -salmoq, $\chi(x, X)$ xarakter kabi invariantlar.

Algebraik metodlarni qo'llashdan oldin, bu o'rganilayotgan salmoqlarni kardinal invariantlar yoki to'plamlar nazariyasi elementlari yordamida ifodalab olish zarur bo'ladi.

2. Algebraik metodlarning o'rni.

Algebraik metodlar deganda, ko'pincha quyidagilar nazarda tutiladi:

1. Algebraik topologiya vositalari: gomotopiya, gomologiya, kogomologiya kabilardan foydalanish;
2. Universal algebradan foydalanish: fazoni yarimgruppa, gruppa yoki halqa strukturasi bilan boyitish;
3. Bo'linishlar va faktor-konstruktsiyalar: algebraik guruhlashlar orqali topologik invariantlarni tahlil qilish;
4. Kardinal arifmetika: $|X|$, $d(X)$, $w(X)$, $nw(X)$, $kw(X)$, $csw(X)$ kabi kardinallar o'rtasidagi algebraik tengsizliklarni tekshirish.

3. Amaliy metodik tavsiyalar.

a) Kardinal tengsizliklardan algebraik usulda foydalanish:

a1) To'plamning (fazoning) quvvatini baholash: $|X| \leq 2^{d(X) \cdot \chi(X)}$;

a2) Zichlik va salmoq o'rtasidagi munosabatni tadbiq qilish: $d(X) \leq w(X) \leq |X|$.

b) Topologik fazoni algebraik strukturaga keltirish:

b1) Agar fazo yordamida topologik gruppa hosil qilish mumkin bo'lsa, unda salmoqlar gruppa strukturasi bilan bog'lanadi va ifodalanadi (masalan, zichlik bazaning zichligiga teng bo'lishi).

b2) Halqa yoki algebra ustida qurilgan topologik fazolarning kardinal invariantlarini algebraik operatsiyalar bilan baholash.

1. Diego Vizca-no, Victor Vargas, Adriana Huertas, Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database, Mathematics teaching research journal. Vol. 15, No. 1. P. 198–222, 2023.

Integrativ yondashuv asosida talabalarning matematik savodxonlik ko'nikmalarini shakllantirish metodikasini takomillashtirish

Sadullayeva I.

Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekiston;
sadullayevairoda@mail.ru

Globalashuv va raqamli iqtisodiyot sharoitida matematik savodxonlik jamiyat taraqqiyotining strategik omillaridan biri hisoblanadi. XXI asrda inson kapitali sifatini belgilovchi asosiy ko'rsatkichlardan biri bu - matematik fikrlash darajasi va matematik bilimlarni amaliy faoliyatga tatbiq etish qobiliyatidir. Shu bois, O'zbekistonda olib borilayotgan ta'lim islohotlarining muhim yo'nalishlaridan biri - matematik ta'lim sifatini oshirish, talabalarda matematik savodxonlikni shakllantirish va uni xalqaro standartlarga moslashtirishdan iborat. Shu jarayonda integrativ yondashuv alohida ahamiyat kasb etadi. Integratsiya nafaqat matematikaning ichki bo'limlarini, balki uni boshqa fanlar bilan uyg'unlashtirish orqali o'quvchi va talabalarni real hayotiy muammolarni yechishga tayyorlaydi. Integrativ yondashuv - bu ta'lim jarayonini turli fanlar o'rtasida uyg'unlikda tashkil etish, bilimlarni yaxlit tizim sifatida shakllantirish tamoyilidir. U matematik bilimlarni biologiya, fizika, iqtisodiyot, informatika va ijtimoiy fanlar bilan bog'lash orqali talabalarning ko'nikmalarini kengaytiradi. Matematik savodxonlik tushunchasi PISA (Programme for International Student Assessment) talqinida "Matematik bilimlarni real hayotiy vaziyatlarda qo'llash, muammoni aniqlash, matematik modellashtirish va yechim topish qobiliyati" sifatida izohlanadi. Shu ma'noda, integrativ yondashuv nafaqat matematik bilimlarni mustahkamlash, balki ulardan foydalanish madaniyatini shakllantirish vositasi hamdir. Rivojlangan davlatlar ta'lim tizimida matematik savodxonlikni rivojlantirish fanlararo integratsiya orqali amalga oshirilmoqda. Masalan:

- Finlyandiya modelida matematika fizika va iqtisodiy bilimlar bilan bog'liq loyihalar orqali o'qitiladi;
- Singapur tajribasida STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) konsepsiyasi asosida o'quv dasturlari ishlab chiqiladi;
- AQSh va Buyuk Britaniyada esa "case-study" va "project-based learning"

metodlari keng qo'llanilib, matematikaning amaliy hayotdagi qo'llanilishi ko'rsatiladi.

Ushbu tajribalar O'zbekiston ta'lim tizimida ham bosqichma-bosqich joriy etilmoqda. Matematik savodxonlikni oshirishda quyidagi integrativ metodik yondashuvlarni takomillashtirish muhim hisoblanadi: -Fanlararo loyihalar asosida o'quv jarayonini tashkil etish;

- Case-study usuli orqali talabalarga real hayotiy iqtisodiy va texnik masalalarni yechish topshiriqlarini berish;
- axborot texnologiyalaridan, xususan, simulyatsiya dasturlari va matematik modellashtirish paketlaridan (Maple, Mathematica, MATLAB) foydalanish;
- interfaol metodlar (klaster, akvarium, brainstorming) orqali matematik tushunchalarni o'zlashtirishni yengillashtirish.

Integrativ yondashuv asosida talabalarning matematik savodxonligini shakllantirish zamonaviy ta'lim jarayonining dolzarb vazifasidir. Ushbu metodika nafaqat matematik bilimlarni chuqurlashtiradi, balki ularni real hayotiy vaziyatlarda qo'llash madaniyatini ham shakllantiradi. Talabalarning matematik savodxonligini oshirish orqali jamiyatda innovatsion tafakkur, iqtisodiy faollik va ijtimoiy barqarorlikni ta'minlash mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Горбунова Н.В. Цифровизация как приоритетное направление модернизации российского образования: монография, под редакцией Н.В. Горбуновой и др. Саратов, 2019. 152 с.
2. Виноградова Н.Ф., Кочурова Е.Э., Кузнецова М.И. и др. Функциональная грамотность младшего школьника, под ред. Н. Ф. Виноградовой. М.: Российский учебник: Вентана-Граф, 2018. 288 с.

Геометрическое место точек в пространстве

Тураева Н. А.

Бухарский государственный университет
nabiyaturaeva48@gmail.com

Геометрическим местом в пространстве называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, обладающих определенным свойством.

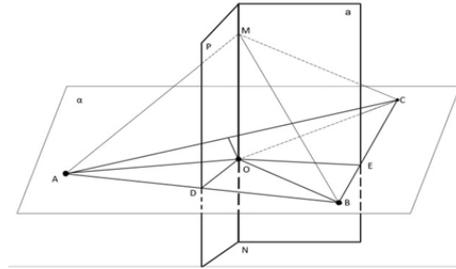
Перечислим несколько геометрических мест точек в пространстве:

1. Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , является плоскость α , перпендикулярная прямой AB и проходящая через середину отрезка AB .

2. Геометрическим местом точек, отстоящих от данной плоскости α на расстоянии d , являются две плоскости, параллельные данной плоскости и находящиеся от неч на расстоянии d .
3. Геометрическим местом точек, удаленных на данном расстоянии d от данной точки O , является сфера с центром в точке O и радиусом d .

Пример 1. Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой.

Решение (1-й способ). Три данные точки A , B и C определяют плоскость α , в которой лежит $\triangle ABC$. Мы знаем, что геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B , есть плоскость P , перпендикулярная отрезку AB и проходящая через середину D стороны AB . Аналогично, для точек B и C таким геометрическим местом точек будет плоскость Q .



Точки, принадлежащие линии пересечения MN плоскостей P и Q , находятся на одинаковом расстоянии от точек A , B и C . Прямая MN - искомое геометрическое место точек.

Точка O пересечения прямой MN с плоскостью α является центром окружности, описанной около треугольника ABC . Следовательно, прямая MN перпендикулярна плоскости α и проходит через центр описанной окружности.

Вывод: искомое геометрическое место точек - прямая, перпендикулярная плоскости, определяемой точками A , B , C , и проходящая через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

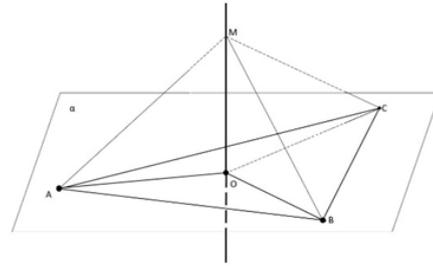
Решение (2-й способ). Пусть M - одна из точек искомого геометрического места, т.е. $MA = MB = MC$, и $MO \perp \alpha$. Наклонные MA , MB , MC равны, следовательно, равны и их проекции на плоскость α , т.е. $OA = OB = OC$.

Отсюда следует:

1. O -центр окружности, описанной около $\triangle ABC$;
2. все точки геометрического места лежат на перпендикуляре к плоскости α , проходящем через точку O .

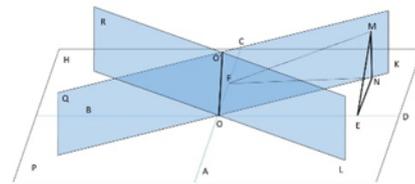
Пример 2. Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

Решение. Пусть AC и BD - данные прямые, и P - плоскость, ими определяемая. Пусть M - точка искомого множества: $MF \perp AC$, $ME \perp BD$, и $MF = ME$.



Опустим перпендикуляр MN на плоскость P . Тогда $NF = NE$, как проекции равных наклонных MF и ME на плоскость P .

Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых на плоскости, являются две биссектрисы KO и HL , делящие углы, образованные AC и BD , пополам.



Все точки перпендикуляра MN принадлежат геометрическому месту точек. Построим плоскость Q через прямые MN и KO . Эта плоскость перпендикулярна плоскости P . Аналогично доказывается существование плоскости R .

Вывод: искомое геометрическое место точек - две плоскости Q и R , перпендикулярные плоскости P , которые также перпендикулярны друг другу и делят углы между прямыми AC и BD пополам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Б.И. и др., Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Изд-во МГУ, 1972, 608 с.
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н., Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1979, 239 с.
3. Герасимова И.С., Гусев В.А., Маслова Г.Г. и др., Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение, 1977, 190 с.

Didaktik birliklarni yiriklashtirish texnologiyasi asosida o'qitish metodikasi

To'rayev Sh. F.

Buxoro Davlat Universiteti, Buxoro, O'zbekiston
 turaevshuxratjon@gmail.com

Zamonaviy ta'lim tizimi ta'lim sifatini oshirish, o'quvchining mustaqil fikrlash va amaliy faoliyat ko'nikmalarini rivojlantirishga qaratilgan ilg'or pedagogik texnologiyalarni joriy etishni talab etadi. Shunday texnologiyalardan biri - **Didaktik birliklarni yiriklashtirish texnologiyasi** bo'lib, u bilimlarni uzviy, tizimli va yirik bloklarda o'zlashtirishga asoslanadi. Ayniqsa, akademik litsey matematika darslarida bu yondashuv o'z samarasini beradi.

P. M. Erdniyev tomonidan ishlab chiqilgan bu texnologiya quyidagilarga asoslanadi:

- Bilimlarni yirik, mantiqan bog'langan birliklarda berish;
- O'quvchilarni umumlashtirish va tahlil qilish ko'nikmalarini rivojlantirish;
- O'qitishning ixcham va samarali tashkil etilishi.

Mazkur yondashuv orqali fanning asosiy g'oyalari chuqur o'zlashtiriladi va takrorlashga kamroq vaqt sarflanadi.

Akademik litseylar matematika darslarida eng qiyin mavzulardan biri bu Irratsional tengsizliklar yechish mavzusi hisoblanadi. Irratsional tengsizliklar xilma-xil va ularni alohida formulalar orqali o'rganish uzoq vaqt talab qiladi va shunda ham o'quvchi mavzuning tub mohiyatiga yetmagani uchun ayrim misollarni yechishda xato qiladi. Irratsional tengsizliklar Didaktik birliklarni yiriklashtirish texnologiyasi asosida o'qitishdan esa biz o'quvchiga bu mavzuni bir butun ko'ra olishiga erishamiz. Albatta, bu o'quvchida katta e'tibor va qunt talab qiladi, lekin odatda bu texnologiyada ta'limning natijaviyligi, samaradorligi yuqori bo'ladi.

Akademik litsey matematika darslarida "Irratsional tengsizliklar" mavzusini "Didaktik birliklarni yiriklashtirish" texnologiyasi asosida o'qitish sxemasi.

Tengsizliklar va yechimlar

1. Tengsizlik:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$$

Yechish usuli:

$$f(x) > g^{2n+1}(x)$$

Misol yechimi:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} &> 2x - 1 \\ x^3 - 3x + 3 &> (2x - 1)^3 \\ x^3 - 3x + 3 &> 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ (x - 1)(7x^2 - 5x + 4) &< 0, x < 1 \end{aligned}$$

Javob: $x < 1$

Mustahkamlash: $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} > x$

2. Tengsizlik:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

Yechish usuli:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, & f(x) > g^{2n}(x) \\ g(x) < 0, & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Misol yechimi:

$$x < \sqrt{x^2 - x - 110}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, & x^2 < x^2 - x - 110 \\ x < 0, & x^2 - x - 110 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, & x < -110 \\ x < 0, & x \leq -10, x \geq 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{yechimga ega emas, } x \leq -10$$

Javob: $x \leq -10$

Mustahkamlash:

$$2x - 3 < 2\sqrt{x^2 - 9}, x - 3 < \sqrt{x^2 - 4x}$$

Irratsional tengsizliklar mavzusini Didaktik birliklarni yiriklashtirish texnologiyasi asosida o'qitish o'quvchilarning mavzuni puxta egallashiga, mantiqiy fikrlash va analiz qilish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Bu metodik yondashuv murakkab mavzularni oddiy, tizimli, bosqichma-bosqich o'rganishga yordam berishi tajribalarda yaqqolroq ko'rinadi.

ADABIYOTLAR

1. Melikulov A, Qurbonov P, Ismoilov P, Matematika II qism, 2003.
2. Turaev Sh, The role of independent education in teaching physics. Society and innovations Special Issue -12, 2021.
3. Abduhamidov A, Nasimov H, Nosirov U, Husanov J, Algebra va matematik analiz asoslari II qism, 2007.

Mustaqil ta'lim samaradorligini oshirishga qaratilgan web ilovalarning ahamiyati

To'rayev Sh. F.¹, Avazxonova M. A.²

¹Buxoro Davlat Universiteti, Buxoro, O'zbekiston
turaevshuxratjon@gmail.com

²Buxoro Davlat Universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Hozirgi kunda ta'limning, ayniqsa, oliy ta'limning asosiy vazifasi ta'lim oluvchilarning intellektual darajasini, ijodkorligini takomillashtirish bilan birga mustaqil izlanishga va yaratuvchanlikka bo'lgan qiziqishini qo'llab-quvvatlashdan iborat. Shuning uchun, kreativ pedagogik ta'lim bugungi keng axborot maydoniga ega dunyo uchun yanada dolzarbdir.

Ta'lim tizimi taraqqiy etgan davlatlar tajribasi shuni ko'rsatdiki, eng ahamiyatlisi biz egallayotgan bilimlar, birinchi navbatda ayni davr uchun dolzarb bo'lib turgan masalalarga qaratilishidir. Tizimdagi o'zgarishlar, davlat ta'lim standartlari va o'quv dasturlarini zamonaviy ehtiyojlarga ko'ra qayta ko'rib chiqish, o'zgartirishlar kiritib borish bu tabiiy va o'ta ma'suliyatli jarayondir. Umuman olganda, oliy ta'limda talabalarga o'z tanlagan kasbiy faoliyati uchun eng ahamiyatli bo'lgan bilimlarni berilishi va tavsiya qilinishi, mustaqil o'zlashtirishga keng imkoniyatlar yaratib berilishi hamda talabaning ijodkorligining qo'llab-quvvatlanishi ta'lim sifatiga ulkan ijobiy ta'sir qiladi.

Respublikamiz oliy ta'lim muassasalarining kredit-modul tizimiga o'tishi, talabalarga ko'plab imkoniyatlar, qulayliklar yaratib berish bilan birga, ularning shaxsiy javobgarligini yanada oshirdi. Buni kredit-modul tizimida, birgina mustaqil ta'lim soatlari to'liq ta'lim soatlarining bakalavriat bosqichida 60%, magistratura bosqichida esa 70% ligidan ham anglash mumkin. Demak, bu tizim talabalar mustaqil ta'limiga asosiy e'tiborni qaratuvchi tizim. Bu tizimda to'g'ri tashkillashtirilgan mustaqil ta'lim ta'lim samaradorligini oshiradigan asosiy omil hisoblanadi [1].

Hozirgi rivojlangan davrda ko'plab platformalar (masalan, Hemis), qidiruv tizimlari, telegram kanallaridagi guruhlar orqali talabalarining mustaqil ta'lim olishiga keng imkoniyatlar yaratilgan. Shunga qaramay, olib borgan tadqiqotimizda talabalarining mustaqil ta'lim olish va guruhdagi boshqa talabalar bilan hamkorlikda o'zlashtirish imkoniyati, shu bilan birga o'z-o'zini nazorat qilaolishi uchun bitta manzildagi saytdan foydalanishi samarali ekanligini angladik. Yuqoridagilarning barchasi inobatga olingan holda, Innovatsion mustaqil ta'lim web ilovasi deb nomlanuvchi yangi, ta'lim web ilovasini ishlab chiqdik va ta'lim jarayoniga tadbiq qildik.

Istalgan veb brovzer yoki qidiruv tizimlariga orqali, <http://mt-turayev.uz/admin/> ilovasiga o'tiladi va bu saytning yaratuvchisi tomonidan o'qituvchi sifatida belgilangan foydalanuvchilar o'zining masus nom va parollari orqali kiradilar. Natijada quyidagi Innovatsion mustaqil ta'lim web ilovasiga kirish bosqichi ishga tushadi [2].

Saytni ko'rish bandi orqali biz o'qituvchi sifatida talabalardan farqli ravishda fan qo'shish, guruhlarni tahrirlash yoki qo'shish, ixtiyoriy fanlarni ma'lumotlar bilan boyitib borish kabi qo'shimcha imkoniyatlarga ham ega bo'ldik. Agar bu

web ilovaga talaba kirsasida quyidagi talaba guruhida o'tiladigan fanlarga va bu orqali o'sha fanga doir barcha asosiy ma'lumotlar: kursning me'yoriy hujjatlari, har bir mavzuga doir materiallar, qolaversa boshqa talabalar bu mavzularga doir joylashtirgan ma'lumotlar va bu haqida qolgan talabalarning fikrigacha hamda eng asosiysi mavzuga doir test sinovidan foydalanish imkoniyatlariga ega bo'lamiz.

<https://mt-turayev.uz> ilova orqali o'qituvchi tomonidan biriktirilgan talaba ushbu web ilova uchun belgilangan o'zining maxsus nomi va parolini kerakli satrlarga kiritadi va Kirish piktogrammasini kursor yordamida bosish orqali yuqoridagi ilovaga kiradi. Natijada quyidagi Innovatsion mustaqil ta'lim web ilovasiga kiradi.

Shunday qilib, bu Web ilovamizda talabalarning o'zaro muloqotini yo'lga qo'yish orqali ularning mustaqil ta'limining samaradorligiga yo'l ochib berilgan. Bu holatda o'qituvchi jarayonni nazoratsiz qoldirmasligi albatta foydali, ammo jarayonga biroz passiv aralashishi talabalarni yanada erkin fikr almashishiga yo'l ochib beradi. Bu ayniqsa, amaliy mashg'ulotlarda o'z aksini topadi. Ya'ni, talabalar mavzuga doir masalalarni yechib, hamma uchun taqdim etadi va xato yechgan bo'lib chiqishidan kamroq xavotir oladi. O'qituvchi asosiy, mazmunan xato joylarda aralashsa bo'ladi, elementar xatolar guruhdagi boshqa talabalar tomonidan tuzatilib borilishi ko'p kuzatildi [3].

Tajriba-sinov natijalarining statistik tahlilidan tajriba guruhining samaradorligi nazorat guruhiga qaraganda 11,3% ga yuqori ekanligi ma'lum bo'ldi. Pedagogik tajribalarning yakuniy bosqichi natijalari (tajriba va nazorat guruhining tajriba oxiridagi natijalari) va ularning matematik-statistik tahlili kredit-modul tizimida talabalar mustaqil ta'limini tashkil etishda innovatsion texnologiyalardan foydalanishning ta'lim samaradorligiga ta'siri yetarlicha ijobiy ekanligini isbotladi.

ADABIYOTLAR

1. Vazirlar Mahkamasining 2020-yil 31-dekabrda 824-son qaroriga 1-ilova Oliy ta'lim muassasalarida o'quv jarayoniga kredit-modul tizimini joriy etish tartibi to'g'risida nizom.
2. Shukhratjon Turayev, Organization Of Independent Education In The Credit-Module System Using Web Applications , 2025.
3. To'rayev Sh.F. Kredit-modul tizimida mustaqil ta'limni innovatsion texnologiyalardan foydalanib takomillashtirish metodikasi, PhD dissertatsiyasi avtoreferati, 45-b.

Methods of working with educational mathematical information

Turgunbayev R.¹, Umaralieva D.²

National Pedagogical University of Uzbekistan named after Nizami, Tashkent,
Uzbekistan;

¹musamat1@yandex.ru ²khaldibekova96@gmail.com

This study examines the methodological approaches required for effective engagement with mathematical texts in higher education. Mathematics, as a discipline, encompasses definitions, theorems, proofs, examples, and rules, and thus demands specialized strategies for comprehension and application. The article systematizes teaching and learning methods of working with educational mathematical information and analyzes their role in fostering students's analytical thinking, creativity, and competence. The findings highlight that the integration of both groups of methods enhances students's independent learning strategies and supports the development of higher-order cognitive skills.

In contemporary higher education, students are expected not only to absorb ready-made knowledge but also to act as independent seekers of information, capable of analyzing, processing, and applying it in practice[5,6]. This expectation is particularly salient in mathematics education, where learning material extends beyond formulas to include definitions, theorems, proofs, and rules, which constitute a holistic body of knowledge.

Working with such texts requires structured methodological approaches. Previous research emphasizes the role of active learning strategies (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985; Vygotsky, 1978)[1,2,3] and highlights the necessity of teaching students how to engage with mathematical information critically and reflectively. Within this framework, methods can be broadly divided into two categories: teaching methods, applied by instructors to guide, motivate, and structure students's activities; and learning methods, applied by students in their direct engagement with mathematical texts.

In this paper, the methods are classified into two categories: teaching methods, applied by instructors to guide and structure the learning process, and learning methods, employed by students in their direct engagement with mathematical texts.[11]

Teaching methods serve as external tools for managing and directing students's learning. They include motivational methods (creating problem situations and real-life examples), guiding methods (clarifying objectives and supporting outlines), operational methods (applying theory through problem-solving), control and corrective methods (Q&A, tests, feedback), organizational forms (lectures, seminars, group work), and resources (textbooks, study guides,

digital tools)[4,8,10].

Learning methods reflect the student's internal strategies for working with texts. They can be classified into: text-based methods (reading and retelling, analysis and synthesis, logical-structural analysis, question-and-answer reading, note-taking, comparison, and application) and independent learning methods (active reading, extracting conditions and conclusions, constructing schemes and graphs, reflection).

The application of these methods in the learning process produced several outcomes. Teaching methods improved students's motivation, guided their attention to objectives, and enabled them to evaluate outcomes effectively. Learning methods also helped students extract main ideas, simplify complex concepts, reformulate and explain knowledge, and apply definitions and theorems in practice. Integration of both sets of methods fostered analytical thinking, reflective practices, and creativity, thereby raising the overall level of student mastery.

The distinction between teaching and learning methods allows for a more structured and efficient organization of the educational process. Teaching methods operate as external managerial tools that ensure direction, focus, and monitoring, whereas learning methods stimulate the internal cognitive activity of the learner, promoting comprehension, transformation, and application of knowledge.

Furthermore, aligning these methods with Bloom's modified taxonomy (to remember'to understandto apply to analyze evaluate to create) provides a hierarchical framework that ensures both progression and coherence in the acquisition of mathematical knowledge. This alignment reinforces higher-order thinking skills and cultivates students's ability to bridge theory with practice[5,7,8].

Dividing methods of working with mathematical information into teaching and learning methods enhances the logical structure of the educational process. Teaching methods represent the guiding and managerial function of the instructor, while learning methods embody students's independent strategies for acquiring knowledge. The integration of both groups supports analytical thinking, reflection, creativity, and the application of theory in practical contexts. Findings confirm that the systematic implementation of these methods effectively strengthens students's competencies in working with mathematical information.

LITERATURE

1. Polya, G., How to Solve It., Princeton University Press, 1945.
2. Schoenfeld, A. H., Mathematical Problem Solving. Academic Press, 1985.
3. Vygotsky, L. S., Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Harvard University Press, 1978.

4. Jonassen, D., Learning to Solve Problems with Technology. Pearson, 2010.
5. Biggs, J., Tang, C., Teaching for Quality Learning at University. Open University Press, 2011.
6. Zakariya, Y. F., Approaches to learning mathematics: preliminary evidence on the mediating role of students's achievement in mathematics. International Electronic Journal of Mathematics Education, 18(2), 2023.
7. Vale, I., Barbosa, A., Active learning strategies for an effective mathematics education. European Journal of Educational Research, 12(2), 2023.
8. Arag'yn, M. M., et al., Teaching strategies, cognitive factors, and mathematics learning. Education Sciences, 14(2), 2024.
9. Turgunbayev, R. M., Umaraliev, D. U., The question method in teaching students to work with mathematical texts. Proceedings of FMI, Tashkent: T. N. Qori Niyoziy Institute of Pedagogical Research, no. 6, p. 30, 2023.
10. Anderson L.W., Krathwohl D.R., Airasian P.W., Cruikshank K.A., Mayer R.E., Pintrich P.R., et al., A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing, A: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives, (Abridged Edition). New York: Longman, 2001. - 336 p
11. Umaraliev, D. U., The question method in teaching students to work with mathematical texts. Scientific Bulletin of TSPU, no. 7, p. 406, 2023.
12. Episheva, O. B., Cognitive approaches to teaching mathematics in higher education. Moscow: Publishing House, 2012.

Ta'limda kompyuter modellashtirishning roli

Umedov Sh.K.¹ Rajabov B.H.²

^{1,2}Buxoro Davlat Pedagogika Instituti, Buxoro, O'zbekistan;

¹umedov0106@gmail.com ²rajabovboboxon@gmail.com

Ilmiy izlanishlarda real hodisalarni o'rganishning ikki asosiy usuli mavjud: klassik tajriba va kompyuter modellashtirish. Har ikkisi o'ziga xos metodologiyaga ega bo'lib, ular bir-birini to'ldiruvchi yondashuvlar hisoblanadi. Klassik tajriba - bu fizik, kimyoviy yoki biologik jarayonlarni maxsus laboratoriya sharoitida real asbob-uskunalar yordamida o'rganish jarayonidir. Tajriba vaqtida o'lchovlar amalga oshiriladi, natijalar kuzatiladi va tahlil qilinadi. Klassik tajriba empirik uslubga asoslanadi va to'g'ridan-to'g'ri voqelikda yuz beradigan hodisalarni sinovdan o'tkazish imkonini beradi.

Kompyuter modellashtirish esa tabiiy yoki texnik tizimlarning matematik modelini tuzish va uni kompyuterda dasturiy vositalar yordamida sinash jarayonidir. Bu usulda real tajriba emas, balki uning matematik ifodasi orqali hodisaning rivoji, natijalari, muqobil holatlari va oqibatlari simulyatsiya qilinadi.

Modellashtirishda parametrlar istalgancha o'zgartirilishi, turli senariylar sinab ko'rilishi mumkin.

Mazkur ikki usulning umumiy maqsadi - hodisani chuqur tahlil qilish, qonuniyatlarni aniqlash va natijalarni baholashdir. Biroq ularni amalga oshirish uslubi, texnik imkoniyatlari va qo'llanilish sohasi turlicha. Tajriba ko'proq real muhitda natijalarni aniqlashga yo'naltirilgan bo'lsa, modellashtirish murakkab tizimlarni soddalashtirilgan model orqali o'rganishga imkon yaratadi.

Shunday qilib, kompyuter modellashtirish va klassik tajriba ilm-fan va ta'limda muhim o'rin tutadigan, bir-birini to'ldiruvchi vositalardir. Ularning har biri turli holatlarda samarali qo'llanilishi mumkin va har ikki yondashuvning imkoniyatlarini to'g'ri anglash zamona-viy tadqiqotlar uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

Kompyuter modellari turlari: matematik, fizik, grafik modellarga orqali tushuntiriladi. Kompyuter modellashtirishda real obyekt yoki hodisa o'rniga uning soddalashtirilgan, formal ifodasi - modeli quriladi. Ushbu model voqelikning muhim tomonlarini aks ettiradi va kompyuter yordamida tahlil qilinadi. Kompyuter modellari vazifasiga, ifoda shakliga va qo'llanish doirasiga qarab turli toifalarga bo'linadi. Ulardan asosiylari quyidagilardir:

Matematik modellashtirish - Bu modellar real jarayonlarning matematik tenglamalar, formulalar, funksiyalar va tengsizliklar orqali ifodalanishiga asoslanadi. Ular odatda differensial tenglamalar, statistik modellar, matritsalar yoki algoritmik shaklda tuziladi. Masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoni Fyurje tenglamasi bilan modellashtiriladi.

Afzalliklari: nazariy tahlil uchun qulay; analitik yechimlar topish imkonini beradi; yaxshi soddalashtirish va umumlashtirish imkonini beradi.

Fizik modellashtirish-bu real obyektlarning kompyuterda fizik qonunlarga asoslangan simulyatsiyasi. Bu turdagi modellashtirishda modellar tabiiy muhit sharoitini real vaqtga yaqinlashgan tarzda taqlid qiladi. Masalan, suyuqlik oqimini modellashtirishda Nave-Stoks tenglamalari asosida fizika modellar tuziladi.

Afzalliklari: jarayonni real sharoitga yaqin tarzda aks ettiradi; ko'plab parametrlarni hisobga olish imkonini beradi; amaliy masalalarni yechishda foydalidir.

Grafik (vizual) modellashtirish-bu obyekt yoki jarayonning kompyuter grafikasi vositalarida tasvirlanishidir. Ushbu modellar foydalanuvchi uchun qulay interfeys yaratadi va ko'rish orqali tahlil qilish imkonini beradi. Masalan, PHET simulyatsiyalari, AutoCAD modellar, 3D biologik hujayra modellar.

Afzalliklari: vizual ko'rinishi tushunarli va ta'sirchan; ta'lim jarayonida samaradorlikni oshiradi; interaktiv ishlash imkonini beradi.

Xulosa: matematik, fizik va grafik modellar bir-birini to'ldiruvchi vositalar

bo'lib, ularning to'g'ri tanlanishi modellashtirilayotgan hodisaning xarakteriga bog'liq. Ko'pincha bu modellarning bir nechta birgalikda kompleks yondashuv sifatida qo'llaniladi.

Modellashtirish bosqichlari. Kompyuter modellashtirish-bu real tizim yoki jarayonni o'rganish uchun uning soddalashtirilgan, formal shaklini qurish va tahlil qilish jarayonidir. Bu jarayon bir necha muhim bosqichlardan iborat bo'lib, har bir bosqich modellashtirish sifatiga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Quyida modellashtirishning asosiy bosqichlari bayon etiladi:

Muammoni tahlil qilish va maqsadni aniqlash. Modellashtirishdan avval o'rganiladigan jarayon yoki obyekt haqida to'liq tasavvur hosil qilinadi. Real obyekt yoki jarayonni formallashtirish. Bu bosqichda real tizimning muhim xususiyatlari ajratib olinadi va ularni matematik yoki mantiqiy shaklda ifodalash boshlanadi. Matematik modelni tuzish. Jarayonni ifodalovchi matematik formulalar, tenglamalar yoki algoritmlar tuziladi.

Kompyuter dasturini yaratish (modelni algoritmlashtirish). Modelga mos keluvchi dasturiy algoritmlar tuziladi va u maxsus dasturiy platformalarda (MATLAB, Python, PHET, Simulink va boshqalar) kodlanadi.

Modelni tekshirish (verifikatsiya). Yaratilgan model texnik jihatdan to'g'ri ishlayotganini aniqlash: Modelni tajriba ma'lumotlari bilan solishtirish (validatsiya). Model real hayotdagi ma'lumotlar bilan solishtiriladi. Agar model natijalari haqiqatga yaqin bo'lsa, u haqiqiy hisoblanadi. Aks holda, u takomillashtiriladi.

Tajriba o'tkazish (simulyatsiya qilish). Model asosida turli holatlarni kompyuterda sinash, o'zgaruvchilar ta'sirini tahlil qilish, natijalarni vizual tarzda ko'rish.

Natijalarni tahlil qilish va xulosa chiqarish. Olingan simulyatsiya natijalari tahlil qilinadi, grafik va jadvallar tuziladi. Natijalar asosida ilmiy yoki amaliy xulosalar chiqariladi.

Bugungi kunda eng ko'p qo'llaniladigan amaliy dasturlar: PHET Interactive Simulations (University of Colorado Boulder), MATLAB (MathWorks), COMSOL Multi-physics, GeoGebra, ANSYS, Python (kutubxonalar bilan: NumPy, SciPy, Matplotlib, SimPy),

Xulosa. Modellashtirish bosqichlari bir-biri bilan uzviy bog'liq bo'lib, ularning har birida aniqlik va to'g'rilik talab etiladi. Har bir bosqichda yuzaga keladigan xatolik butun modelning ishonchliligiga salbiy ta'sir ko'rsatishi mumkin.

LITERATURE

1. Karimov, A., Soliyev, B. . Zamonaviy fizika laboratoriya mashg'ulotlari. Toshkent: Fan va Texnologiya, 2020.

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI O'QITISHDA MUAMMOLI TA'LIM TEXNOLOGIYALARIDAN FOYDALANISH

Xolikov S.,¹, Absalomova A.²

Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekiston;

xolikovsuyunjon@gmail.com

Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekiston;

absalomovaaziza@gmail.com

Oddiy differensial tenglamalar sistemasi zamonaviy fan va texnikaning ko'plab sohalarida muhim o'rin tutadi. Ular orqali turli fizik, biologik, kimyoviy, iqtisodiy va texnologik jarayonlarning matematik modellari tuziladi va ularning dinamik xatti-harakatlari tahlil qilinadi. Ayniqsa, vaqtga bog'liq o'zgaruvchan tizimlarni tavsiflashda keng qo'llaniladi. Shu jumladan quyidagi jarayonlarni misol keltirish mumkin:

- Fizikada - elektr zanjirlar, mexanik tebranishlar, issiqlik tarqalishi kabi jarayonlar;
- biologiyada - populyatsiyalar o'sishi, epidemiyalar tarqalishi, oziq-ovqat zanjiri;
- kimyoda - reaksiya tezligi, konsentratsiya almashuvi;
- iqtisodiyotda - kapital oqimi, iste'mol va investitsiya tizimlari, ishlab chiqarish-moddiy muvozanat.

Shunday qilib, real hayotdagi murakkab tizimlarni soddalashtirilgan matematik model shaklida ifodalashga, ularni chuqur tahlil qilishga va amaliy qarorlar qabul qilishga imkon yaratadi. Bu esa nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham o'ta dolzarb va samarali vosita sifatida e'tirof etishga asos bo'ladi. Hozirgi davrda ta'lim jarayonida muammoli ta'lim texnologiyalaridan foydalanish o'quvchilarning mustaqil fikrlashini rivojlantirish, matematik tafakkurni kengaytirish va nazariy bilimlarni amaliy masalalar yechishda qo'llash ko'nikmalarini shakllantirishda muhim ahamiyat kasb etmoqda. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamalar sistemasi kabi murakkab mavzularni o'rgatishda muammoli vaziyatlar yaratish orqali talabalarni ilmiy izlanishga yo'naltirish samarali natija beradi. Muammoli ta'limning asosiy g'oyasi shundan iboratki, talabalarga dmashtirish vaqtida oldindan ishlab chiqilgan maxsus muammoli vaziyatlarni yaratadi va talabalar ushbu vaziyatni hal etishda yangi bilimlarni o'zlashtiradilar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasini o'qitishda bu yondashuv quyidagilarga asoslanadi:

- Muammoli savollarni qo'yish. Berilgan differensial tenglamalar sistemasining yechimi mavjudmi? mavjud bo'lsa yagonami? kabi savollar orqali talabanning diqqatini jalb etish;
- ilmiy izlanishga yo'naltirish: talabalar mustaqil izlanib, nazariy tushunchalarni o'zlari kashf qiladilar;
- amaliy ahamiyatini ochib berish: iqtisodiy, fizik, biologik modellar orqali oddiy differensial tenglamalar sistemasining qo'llanishini tushuntirish.

Oddiy differensial tenglamalar sistemasini o'qitishda muammoli ta'lim texnologiyalaridan foydalanish talabalarning nafaqat nazariy bilimlarini chuqurlashtiradi, balki ularni ilmiy izlanishga, ijodiy fikrlashga ham yo'naltiradi. Muammoli vaziyatlar asosida tashkil etilgan mashg'ulotlar talabalarni dars jarayonida faol ishtirok etishga undaydi, ularning qiziqishini oshiradi hamda kasbiy faoliyatida zarur bo'lgan matematik modellashtirish ko'nikmalarini shakllantiradi. Shu bois, mazkur metodika aniq fanlarni o'qitishda samarali yondashuv sifatida keng qo'llanishi maqsadga muvofiqdir.

Adabiyotlar

1. Xoliqov S.H. Methodology of using problem educational technologies in teaching simple differential equations Berlin Studies Transnational Journal of Science and Humanities Pedagogical sciences, 2021, Vol.1, e 1.5, -P. 510-515.
2. Xoliqov S.H. Opportunities of information and communication technologies in teaching differential equations // European Journal of Humanities and Educational Advancements, 2021, Vol.2, e 1, -P. 16-20.
3. Xoliqov S.H. "Differensial tenglamalar" bo'limini o'qitish samaradorligini oshirishda kompyuterning matematik amaliy paketlaridan foydalanish // Узлуксиз таълим илмий-услубий журнал, 2021, Маҳсус сон. 72-75 - Б.

A visual-genetic approach to studying trigonometric formulas involving inverse trigonometric functions

Xonkulov U. X.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

u_xonqulov@mail.ru

Introduction. Educational practice shows that many school students experience difficulties in solving trigonometric problems whose arguments involve inverse trigonometric functions. One of the main reasons for this is the lack of a deep understanding of the properties of inverse trigonometric functions [1,2]. The visual-genetic approach we propose enables a profound understanding of the essence of trigonometric functions and supports more meaningful learning.

Methods. The practical modification of the visual-genetic approach is based on constructing and understanding the genetic (origin and development) aspects of trigonometric formulas-whose main parts and arguments are inverse trigonometric functions such as

$$y = \text{Arcsin } x, \quad y = \text{Arccos } x, \quad y = \text{Arctg } x, \quad y = \text{Arcctg } x$$

- through visual (demonstrative-graphical, in particular, right triangles, the unit circle, vectors, rotations, and inversion) tools.

Results. The essence of the visual-genetic method is presented below. The function $y = \text{Arccos } x$ is a multivalued function defined on the interval $x \in [-1, 1]$. The portion of the function corresponding to $y \in [0, \pi]$ is called the principal branch of the $\text{Arccos } x$ function and is denoted as $\text{arccos } x$. The remaining values of the function can be derived from the principal branch using the following formula:

$$\text{Arccos } x = 2\pi k - \text{arccos } x, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Let us consider trigonometric functions with arguments $\text{Arccos } x$ and $\text{arccos } x$ (Fig.1). From an arbitrary point $x \in [-1, 1]$ on the OX axis, draw \overrightarrow{AB} and $\overrightarrow{A'B'}$ parallel to the OY axis, where $|\overrightarrow{OA}| = x$. Let $\angle AOB = \alpha$. Then $\alpha' = \angle A'OB' = 2\pi - \alpha$, so computations are made relative to the OX axis. Hence, $\cos \alpha = x$ and $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha' = x$. Taking full rotation around the unit circle into account, all angles corresponding to points B and B' whose cosine equals x can be found using the formula:

$$K = \{\angle AOB + 4lk\} \cup \{\angle AOB' + 4lk\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Where l represents one quarter of the unit circle. The radian measures of these angles form the following set:

$$K^* = \text{Arccos } x = (\alpha + 2\pi k, \alpha' + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

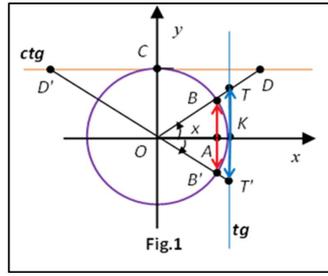


Рис. 10:

Since $\cos \alpha = x$ and $\cos(2\pi - \alpha) = x$, and $\arccos x = \alpha$, it follows that $\arccos x = \alpha' = 2\pi - \alpha$. Thus, we derive $2\pi - \arccos x = \alpha$, confirming that formula (1) is valid from equation (2). The vectors \overrightarrow{AB} and $\overrightarrow{A'B'}$ determine the range of the function $\sin(\text{Arccos } x)$, where the length of \overrightarrow{AB} gives the exact value of the function $\sin(\arccos x)$. From triangles $\triangle OAB$ and $\triangle OA'B'$ we have:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \overrightarrow{A'B'} = -\sqrt{1 - x^2}$$

Therefore,

$$\sin(\text{Arccos } x) = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1];$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

The magnitudes of the vectors \overrightarrow{KT} and $\overrightarrow{KT'}$ represent the values of the function $\tan(\text{Arccos } x)$, while the vector \overrightarrow{KT} alone represents the value of $\text{tg}(\arccos x)$. From the triangles $\triangle OTK$, $\triangle OKT'$, and $\triangle OAB$ we get:

$$\overrightarrow{KT} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \overrightarrow{KT'} = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

Here $x \neq 0$. If $x = 0$, these triangles do not exist. Therefore,

$$\text{tg}(\text{Arccos } x) = \pm\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1];$$

$$\text{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

The magnitudes of the vectors \overrightarrow{CD} and $\overrightarrow{CD'}$ represent the values of the function $\text{ctg}(\text{Arccos } x)$, while the vector \overrightarrow{CD} gives the value of $\text{ctg}(\arccos x)$. From the triangles $\triangle ODC$, $\triangle O'DC$, and $\triangle OAB$ we get:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \overrightarrow{CD'} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Here $x \neq \pm 1$. If $x = \pm 1$, the triangles do not exist. Therefore,

$$\text{ctg}(\text{Arccos } x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Conclusion. The visual-genetic approach complements traditional techniques by revealing the process of concept formation (proof of the formula), its origin, geometric basis (as the core cognitive tool), and the interrelationships between its visual representations.

LITERATURE

1. Lorxaypao, K., Jailani, N., Hartono, N. The ability of grade X students at nampheun secondary school to solve trigonometry problems in Indonesian textbooks, AIP Conference Proceedings 2024.
2. Hanggara, Y., Agustyaningrum, N., Ismayanti, N. Analysis of students errors in solving trigonometry problems, AIP Conference Proceedings 2024.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'qitish jarayonida tabaqalashtirilgan yondashuv

Yusupova A.K.¹

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston ;

Professor-o'qituvchining asosiy vazifasi har bir talabani fan bo'yicha o'zlashtirishda muvaffaqiyatga erishishga yordam berishdir. Talaba muvaffaqiyatga erishish uning o'z kuchiga bo'lgan ishonch beradi, yana yangi yutuqlarga erishishiga undaydi.

Ta'lim berish jarayoni talabani rivojlantirishga qaratilgan bo'lishi kerak, har bir talabani o'ziga xos faoliyat uslubini shakllantirishini ta'minlash lozim. Fanning mazmuni, shakllari va usullarining xilma-xilligi prinsipi har bir talabaga o'zining shaxsiy imkoniyatlari va qiziqishlariga muvofiq o'quv materialini tanlash imkoniyatini beradi. Metodist olimlarning [1] ilmiy izlanishlari va tajribalarini inobatga olib, talabalarning qobiliyatlarini shakllanish darajasiga ko'ra ularni uchta guruhlariga bo'lish amaliyotini qo'llayman.

Birinchi guruhga kirgan talabalar dastur materialini bo'yicha bilimlarga ega emaslar, qoidalar mazmunini masalalarni hal qilishda va qo'llashda xatolarga yo'l qo'yadilar, mustaqil ravishda masala va misollarni hal qila olmaydilar. Murakkabroq masalalarni hal qilishga urinmaydilar ham, har doim ham muvaffaqiyatga erishmaydilar.

Ikkinchi guruhdagi talabalar fan bo'yicha yetarli bilimga ega, standart masalalarni hal qilishda ulardan foydalanishlari mumkin. Yangicha turdagi masalalarni hal qilishda qiyinchiliklarga duch keladilar, ammo ularni yechish usullarini o'zlashtirgach, murakkab masalalarni hal qilish bilan shug'ullanishadi. Bu talabalarda evristik fikrlash usullari shakllanmagan, ular masalalarni hal

qilish jarayonida oraliq yechim va yakuniy yechimlar haqida fikr yuritishda qiyinchiliklarga duch kelishadi.

Uchinchi guruhni qiyin masalalarni oddiy qismga ajratish, yechimni izlash jarayonida yechish yo'llarini topish, yangi usullarni kiritish va asoslash, olingan bilimlarni yangi sharoitga, yani yangi turdagi masala va misollarni yechishda qo'llash qobiliyatiga ega talabalar tashkil qiladi. Bu talabalar bir xil turdagi masalalarni yechish usullarini tez va oson umumlashtiradilar.

Birinchi guruh talabalari faqat oddiy masalalarni yechishi kerak, deb hisoblayman. Ammo uchchala guruh talabalari oddiy masalalar bilan birga murakkab masalalarni ham yechishga undash kerak. Uchchala guruh talabalari bir xil masalalarni yechishlari mumkin, lekin har bir guruh uchun topshiriqlar va o'qituvchi beradigan yordam talabalarning guruxiga qarab turlicha bo'ladi.

Ushbu darajalar masalalarni hal qilishning beshta bosqichining xususiyatlari bilan belgilanadi:

1. Yechimga tayyorgarlik;
2. Yechim rejasini izlash;
3. Yechim rejasini tuzish;
4. Yechimni amalga oshirish;
5. Topilgan yechimni muhokama qilish. Talabalarga tabaqalashtirilgan yondashuv asosida beriladigan topshiriqlarga namunalar

1-guruxga

1. Uchta kub tashlashda kublarni ustida tushgan sonlar yig'indisini 16 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

2. Idishda 10 ta shar bo'lib, ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Ketma-ket ikkita shar olinganda ikkinchisini oq rangli bo'lish ehtimolini toping.

3. Nishonga ketma-ket o'q otishda o'q tegishlar sonini nisbiy chastotasi 0,6 ga teng bo'lib 12 marta o'q nishonga tegmagan bo'lsa necha marta o'q otilgan.

4. Agar ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $D(\xi_1) = 3$, $D(\xi_2) = 4$, bo'lsa, $D(2\xi_1 - 3\xi_2)$ ni toping

5. Agar $P(A) > 0$ bo'lsa, B hodisaning A hodisasi ro'y bergandagi shartli ehtimoli qanday topiladi?

2-guruxga

1. Chekli qiymatli diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nimaga teng?

2. $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

3. ξ_k tasodifiy miqdorlar mos ravishda $k(k = 1, 2, \dots, n)$ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsa $M(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ hisoblansin.

4. $5, 2, 1, 4, x, 2, 4, x, 3, 3, 4, 5$ larning o'rta qiymati 3 ga teng bo'lsa, x ni toping.

5. 0,1 parametrli geometrik taqsimotga ega tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

3-guruxga

1. Idishda nomerlangan 5 ta bir hil sharlar bo'lib, ulardan ketma ket 3 tasini olish (takrorsiz tanlanma) tajribasiga mos kelgan Ω ning elementlari sonini toping.

2. Kubni 50 marta tashlashda tushgan sonlar yig'indisi matematik kutilmasini toping.

3. $5, 2, 1, 4, x, 2, 4, x, 3, 3, 4, 5$ larning o'rta qiymati 3 ga teng bo'lsa, x ni toping. 4. Agar ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz va har biri mos ravishda (2;1) hamda (1;2) parametrlar bilan normal taqsimlangan bo'lsa, $D(\xi_1 - \xi_2)$ ni toping. 5. ξ va η tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi formulasini yozing

ADABIYOTLAR

1. Yusupova A.K., Gaffarov R. The role of student attentiveness in the classroom of probability theory and mathematical statistics in higher education. Asia Journal of Research in Social Sciences and Humanities. ISSN: 2249-7315 vol.11 Issue 11, November 2021 sjef 2021-9,037.

2. Yusupova A.K. Some considerations for teaching probability theory and mathematical statistics. Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. December 2021 volume 1. 1183-1191.

Методические аспекты преподавания раздела преобразования Лапласа

Арзикулов С. Д.¹, Сафаров Ж. Ш.²

¹ТГЭУ, Ташкент, Узбекистан;
arzikulov.s@mail.ru

²ТУИТ имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
j.safarov65@mail.ru

Преобразование Лапласа — мощный инструмент решения дифференциальных уравнений. Целью преподавания преобразований Лапласа — сформировать у студентов понимание перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям, а также навыки применения преобразования для анализа динамических систем. Преобразование Лапласа является одним из основных инструментов решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, особенно при наличии начальных условий. Оно переводит задачу из временной области t в область комплексной переменной s , где дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические [1]-[3].

Перед изучением преобразования Лапласа студент должен уверенно владеть интегралами, базовыми приемами решения линейных ОДУ, а также иметь представление о комплексных переменных и их свойствах. Эти знания обеспечивают понимание сути метода и позволяют сосредоточиться на применениях.

Основная идея метода заключается в следующем: для функции $f(t)$, $t \geq 0$, прямое преобразование Лапласа определяется как

$$Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Если $y(t)$ — решение исходного уравнения, то $Y(s)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению, которое проще решать.

При решении дифференциальных уравнений с использованием преобразований Лапласа рекомендуется придерживаться следующим принципам:

- 1) делать акцент на физическом смысле комплексной переменной s ;
- 2) использовать примеры из электротехники, механики которые сводятся к решению дифференциальных уравнений;
- 3) использовать компьютерных средств для проверки вычислений, а также составить программы для решения дифференциальных уравнений.

Преобразование Лапласа позволяет превратить сложную задачу решения дифференциального уравнения в более простую алгебраическую, что делает его незаменимым инструментом в прикладной математике и инженерных науках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Widder D. V. The Laplace Transform. Princeton University Press, 2015.
2. Шеврин Л. Д. Преобразование Лапласа и его приложения. Москва, Наука-1986.
3. Jin Li and Dan Ma. Laplace transforms and valuations// Journal of Functional Analysis. V. 270, no 9, 2016. p. 3316-3329

О нестандартных методах решений некоторых дифференциальных уравнений

Сафаров Ж. Ш.¹, Абдиева З. А.², Хуррамова М. Ж.³

¹ТУИТ имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;
j.safarov65@mail.ru

²УДН имени академика А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан;
abdieva-zaru@mail.ru

³ТГЭУ, Ташкент, Узбекистан;
maftunakhonsafarova94@mail.ru

Решение дифференциальных уравнений является важнейшей задачей прикладной математики, механики и естественных наук. Помимо классических методов, таких как разделение переменных, метод вариации постоянных и метод неопределенных коэффициентов, существуют и нестандартные методы, которые применяются в более сложных или особенных случаях. В частности в работах [1]-[2] приводятся некоторые методы решения дифференциальных уравнений нестандартными способами. Эти методы особенно актуальны при наличии нелинейности, особых граничных условий, разрывов или отсутствия явного аналитического решения. К этим методам относятся следующие:

- метод особых решений;
- метод интегрирующего множителя с переменными коэффициентами;
- метод обратной задачи;
- метод интегральных уравнений;
- вариационные методы;
- численные и приближенные методы и др.

В данной работе речь будет идти о методе интегральных уравнений, который заключается в преобразовании дифференциального уравнения в эквивалентную интегральную форму, после чего решается уже интегральное уравнение. Это особенно полезно при наличии начальных или граничных условий.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями:

$$y''(x) = f(x), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1.$$

Интегрируя уравнение дважды имеем:

$$y'(x) = y_1 + \int_a^x f(s) ds,$$
$$y(x) = y_0 + y_1(x - a) + \int_a^x \int_a^s f(t) dt ds.$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение, эквивалентное исходной задаче. В ряде случаев удобнее решать интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко Н.М. Дифференциальные уравнения и ряды. Екатеринбург 2006.
2. Сафаров Ж.Ш., Рахматова З.А. Некоторые примеры дифференциальных уравнений решаемых нестандартными способами // Научный журнал Интернаука, по 10(233), Часть 1, 2022. -С.29-31